

М. Ф. Гамаль

ОДНО ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОДОБИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНО ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА СЖАТИЮ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть \mathcal{H} – (комплексное, сепарабельное) гильбертово пространство, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – пространство всех (линейных, ограниченных) операторов, действующих в \mathcal{H} . Говорят, что *положительные степени оператора* $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *ограничены в совокупности*, если $\sup_{n \geq 1} \|R^n\| < \infty$. Оператор R называется *полиномиально ограниченным*, если существует константа $M > 0$, такая что

$$\|p(R)\| \leq M \sup\{|p(z)| : |z| \leq 1\} \quad \text{для любого многочлена } p.$$

Оператор T называется *сжатием*, если $\|T\| \leq 1$. Ясно, что у полиномиально ограниченного оператора положительные степени ограничены в совокупности. Сжатие является полиномиально ограниченным с константой $M = 1$ (неравенство фон Нейманна; см., например, [25, предложение I.8.3]).

Пусть \mathcal{H}, \mathcal{K} – гильбертовы пространства, $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ – пространство всех (линейных, ограниченных) операторов, действующих из \mathcal{H} в \mathcal{K} . Операторы $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ называются *подобными*, если существует *обратимый* оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, такой, что $XR = TX$, обозначение: $R \approx T$. (Оператор X называется *обратимым*, если он имеет *ограниченный* обратный X^{-1} .) Ясно, что ограниченность положительных степеней и полиномиальная ограниченность сохраняются при подобии.

Вопрос о том, всякий ли оператор, у которого положительные степени ограничены в совокупности, подобен сжатию, был поставлен Сёкефальви–Надем [24]. Отрицательный ответ на этот вопрос дал Фогель [9], он построил оператор, у которого положительные степени ограничены в совокупности, не являющийся полиномиально ограниченным (см. также [11] и [14]). В [12] был поставлен вопрос, будет ли

Ключевые слова: полиномиально ограниченный оператор, подобие, сжатие, C_0 -оператор, интерполяционное условие Карлесона.

всякий полиномиально ограниченный оператор подобен сжатию. Отрицательный ответ на этот вопрос дал Пизье [22], см. также [8] и [21].

Пример оператора, у которого положительные степени ограничены в совокупности, не являющегося полиномиально ограниченным, из [9] и пример полиномиально ограниченного оператора, не подобного сжатию, из [22] имеют вид

$$\begin{pmatrix} T_0 & * \\ \mathbb{O} & T_1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где T_0 и T_1 – сжатия. Вопрос о дополнительных условиях, гарантирующих подобие оператора вида (1.1) сжатию, рассматривался в [4] (среди других вопросов) и [1]. Следующая теорема – это частный случай следствия 4.2 из [4].

Теорема А [4]. Пусть оператор V подобен изометрии, оператор T подобен сжатию, оператор R имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} V & * \\ \mathbb{O} & T \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

и положительные степени оператора R ограничены в совокупности. Тогда R подобен сжатию.

Ясно, что оператор R из теоремы А не обязательно подобен оператору $V \oplus T$. Например, если R – односторонний сдвиг кратности 1, то R может быть представлен в виде (1.2) и R не подобен оператору $V \oplus T$. С другой стороны, имеют место следующие хорошо известные теоремы.

Теорема В [1]. Пусть оператор U подобен унитарному, положительные степени оператора R ограничены в совокупности, и

$$R = \begin{pmatrix} U & * \\ \mathbb{O} & T \end{pmatrix}.$$

Тогда $R \approx U \oplus T$.

Теорема С [6]. Пусть оператор $V \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ подобен изометрии, оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ подобен сжатию, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, и $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} T & A \\ \mathbb{O} & V \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор R подобен сжатию, если и только если существует оператор $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, такой что $A = TY - YV$, и тогда $R \approx T \oplus V$, поскольку

$$\begin{pmatrix} I & Y \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & A \\ \mathbb{O} & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы В см. в [1, следствие 2.2], см. также ссылки там, доказательство теоремы С см., например, в [6, §2].

Отметим следующий простой факт.

Лемма 1.1. Пусть положительные степени оператора $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ограничены в совокупности и $\mathcal{H} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где \mathcal{M} и \mathcal{N} – (замкнутые) подпространства пространства \mathcal{H} , такие что \mathcal{M} и \mathcal{N} инвариантны для T , оператор $T|_{\mathcal{M}}$ подобен изометрии и $\|T^n x\| \rightarrow_n 0$ для любого $x \in \mathcal{N}$. Тогда $T \approx T|_{\mathcal{M}} \oplus T|_{\mathcal{N}}$.

Доказательство. Положим $C = \sup_{n \geq 0} \|T^n\|$. Так как оператор $T|_{\mathcal{M}}$ подобен изометрии, то существует число $c > 0$, такое что $\|T^n x\| \geq c\|x\|$ для любого $x \in \mathcal{M}$, $n \geq 0$. Ясно, что

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2} = \sqrt{2}\|x \oplus y\|.$$

Определим оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}, \mathcal{H})$ по формуле $X(x \oplus y) = x + y$, $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{N}$. Пусть $x \in \mathcal{M}$ и $y \in \mathcal{N}$. Имеем

$$C\|x + y\| \geq \|T^n(x + y)\| \geq \|T^n x\| - \|T^n y\| \geq c\|x\| - \|T^n y\| \rightarrow_n c\|x\|.$$

Поэтому $\|x\| \leq \frac{C}{c}\|x + y\|$ для любых $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{N}$. Из оценок

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + \|y\|^2 &\leq (\|x + y\| + \|x\|)^2 + \|x\|^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{C}{c}\right)^2 \|x + y\|^2 + \left(\frac{C}{c}\right)^2 \|x + y\|^2 \\ &= \left(1 + 2\frac{C}{c} + 2\left(\frac{C}{c}\right)^2\right) \|x + y\|^2 \end{aligned}$$

закключаем, что оператор X обратим и $\|X^{-1}\| \leq \left(1 + 2\frac{C}{c} + 2\left(\frac{C}{c}\right)^2\right)^{1/2}$. Равенство $X(T|_{\mathcal{M}} \oplus T|_{\mathcal{N}}) = TX$ очевидно. \square

Приведенные ниже утверждения о полиномиально ограниченных операторах можно найти в [17] или [13]. Пусть $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – полиномиально ограниченный оператор. Тогда существуют два инвариантных подпространства \mathcal{H}_a и \mathcal{H}_s оператора R , такие что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \dot{+} \mathcal{H}_s$,

оператор $R|_{\mathcal{H}_a}$ абсолютно непрерывный и оператор $R|_{\mathcal{H}_s}$ сингулярный. Любой полиномиально ограниченный сингулярный оператор подобен сингулярному унитарному оператору. Для абсолютно непрерывного полиномиально ограниченного оператора R корректно определено H^∞ -исчисление, то есть для любой функции $\varphi \in H^\infty$ определен оператор $\varphi(R)$, и $\|\varphi(R)\| \leq M\|\varphi\|_\infty$, где M – константа из определения полиномиальной ограниченности оператора R . Для $\varphi \in H^\infty$ положим $\tilde{\varphi}(z) = \overline{\varphi(\bar{z})}$, $z \in \mathbb{D}$. Тогда $\tilde{\varphi} \in H^\infty$ и

$$\tilde{\varphi}(R^*) = \varphi(R)^* \quad (1.3)$$

для любого абсолютно непрерывного полиномиально ограниченного оператора R . Абсолютно непрерывный полиномиально ограниченный оператор R называется оператором класса C_0 , если существует функция $\varphi \in H^\infty$, такая что $\varphi \not\equiv 0$ и $\varphi(R) = \mathbb{O}$ [2]. Так как оператор R класса C_0 квазиподобен сжатию (см. [2]), то из [25, III.4.4] следует, что существует внутренняя функция θ , такая что $\theta(R) = \mathbb{O}$.

Пусть θ – внутренняя функция, имеющая следующее свойство:

$$\begin{aligned} &\text{если } T \text{ – абсолютно непрерывный} \\ &\text{полиномиально ограниченный оператор} \\ &\text{и } \theta(T) = \mathbb{O}, \quad \text{то } T \text{ подобен сжатию.} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из (1.3) ясно, что θ обладает свойством (1.4) тогда и только тогда, когда $\tilde{\theta}$ обладает свойством (1.4).

Следующая теорема является основным результатом настоящей статьи.

Теорема 1.2. Пусть T_0 – абсолютно непрерывный полиномиально ограниченный оператор и существует внутренняя функция θ , обладающая свойством (1.4) и такая что $\theta(T_0) = \mathbb{O}$, оператор T_1 подобен сжатию, и оператор

$$R = \begin{pmatrix} T_0 & * \\ \mathbb{O} & T_1 \end{pmatrix}$$

полиномиально ограничен. Тогда R подобен сжатию.

У этой теоремы есть простое следствие.

Теорема 1.3. Пусть \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_1 – гильбертовы пространства, $T_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, $T_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, T_0 – оператор класса C_0 и существует внутренняя функция θ , обладающая свойством (1.4) и такая

что $\theta(T_0) = \mathbb{O}$, оператор T_1 подобен сжатию, и оператор

$$R = \begin{pmatrix} T_1 & A \\ \mathbb{O} & T_0 \end{pmatrix}$$

полиномиально ограничен. Тогда R подобен сжатию.

Доказательство. Оператор R^* имеет следующую матричную форму в пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$:

$$R^* = \begin{pmatrix} T_0^* & A^* \\ \mathbb{O} & T_1^* \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\tilde{\theta}(T_0^*) = \theta(T_0)^* = \mathbb{O}$ и $\tilde{\theta}$ обладает свойством (1.4), к оператору R^* можно применить теорему 1.2. \square

Хорошо известно, что если θ – произведение Бляшке с простыми нулями $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{D}$, удовлетворяющими интерполяционному условию Карлесона (определение напоминает в §3), и T – абсолютно непрерывный полиномиально ограниченный оператор, такой что $\theta(T) = \mathbb{O}$, то

$$T \approx \bigoplus_n \lambda_n I_{\ker(T - \lambda_n I)},$$

поэтому оператор T подобен сжатию (см., например, [5, доказательство теоремы 2.1], [27, лемма 2.3], см. также лемму 3.1 настоящей статьи и ссылки перед ней). Таким образом, произведение Бляшке с простыми нулями, удовлетворяющими условию Карлесона, обладает свойством (1.4). Используя результаты работ [3] и [26], легко увидеть, что конечное произведение произведений Бляшке с простыми нулями, удовлетворяющими условию Карлесона, обладает свойством (1.4), см. ниже теорему 3.2. С другой стороны, используя последовательность конечномерных операторов, равномерно полиномиально ограниченную, но не являющуюся равномерно вполне полиномиально ограниченной (определение вполне полиномиальной ограниченности и построение такой последовательности операторов см. в [8, 22]), легко построить абсолютно непрерывный полиномиально ограниченный оператор T , такой что $\theta(T) = \mathbb{O}$ для некоторого произведения Бляшке θ и при этом оператор T не подобен сжатию, см. последний абзац в [10, §5], см. также [10, теорема 7.1]. Таким образом, существуют произведения Бляшке, не обладающие свойством (1.4). Автор не знает, существуют ли другие внутренние функции, обладающие свойством (1.4),

кроме конечных произведений произведений Бляшке с простыми нулями, удовлетворяющими условию Карлесона.

Статья организована следующим образом. В §2 доказывается теорема 1.2. В §3 показывается, что конечное произведение произведений Бляшке с простыми нулями, удовлетворяющими условию Карлесона, обладает свойством (1.4). В §4 с использованием примера Ле Мерди [15] показывается, что теорема 1.2 не может быть обобщена на операторы, положительные степени которых ограничены в совокупности.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Следующие леммы просты и хорошо известны.

Лемма 2.1. Пусть $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – полиномиально ограниченный оператор и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \dot{+} \mathcal{H}_s$, где \mathcal{H}_a и \mathcal{H}_s – инвариантные подпространства для R , такие что оператор $R|_{\mathcal{H}_a}$ – абсолютно непрерывный, а оператор $R|_{\mathcal{H}_s}$ – сингулярный. Пусть \mathcal{M} – инвариантное подпространство для R , такое что оператор $R|_{\mathcal{M}}$ – абсолютно непрерывный. Тогда $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_a$.

Доказательство. Обозначим через Q проектор на \mathcal{H}_s параллельно \mathcal{H}_a , то есть $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $Q|_{\mathcal{H}_s} = I_{\mathcal{H}_s}$ и $Q|_{\mathcal{H}_a} = \mathbb{O}$. Тогда $Q|_{\mathcal{M}}R|_{\mathcal{M}} = R|_{\mathcal{H}_s}Q|_{\mathcal{M}}$. Так как оператор $R|_{\mathcal{M}}$ – абсолютно непрерывный и оператор $R|_{\mathcal{H}_s}$ – сингулярный, то $Q|_{\mathcal{M}} = \mathbb{O}$ (см. [17] или [13, предложение 15]). Это означает, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_a$. \square

Лемма 2.2. Пусть R – полиномиально ограниченный оператор, \mathcal{M} – его инвариантное подпространство и операторы $R|_{\mathcal{M}}$ и $P_{\mathcal{M}^\perp}R|_{\mathcal{M}^\perp}$ – абсолютно непрерывные. Тогда оператор R – абсолютно непрерывный.

Доказательство. Обозначим через \mathcal{H} пространство, в котором действует R , и пусть \mathcal{H}_a и \mathcal{H}_s – такие же, как в лемме 2.1. Тогда $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_a$, следовательно, $\mathcal{M}^\perp \supset \mathcal{H}_a^\perp$. Ясно, что пространства \mathcal{M}^\perp и \mathcal{H}_a^\perp инвариантны для R^* , $R^*|_{\mathcal{M}^\perp} = (P_{\mathcal{M}^\perp}R|_{\mathcal{M}^\perp})^*$ и $R^*|_{\mathcal{H}_a^\perp} = (P_{\mathcal{H}_a^\perp}R|_{\mathcal{H}_a^\perp})^*$. Имеем $P_{\mathcal{H}_a^\perp}R|_{\mathcal{H}_a^\perp} \approx R|_{\mathcal{H}_s}$, поэтому оператор $P_{\mathcal{H}_a^\perp}R|_{\mathcal{H}_a^\perp}$ – сингулярный [13, предложение 16]. Таким образом, оператор $R^*|_{\mathcal{H}_a^\perp}$ – сингулярный [13, предложение 14], и, так как оператор $R^*|_{\mathcal{M}^\perp}$ – абсолютно непрерывный, заключаем, что $\mathcal{H}_a^\perp = \{0\}$. \square

Следующая теорема основана на теореме А, являющейся частным случаем следствия 4.2 из [4].

Теорема 2.3. Пусть \mathcal{H}_0 и \mathcal{K} – гильбертовы пространства, $T_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ – полиномиально ограниченный оператор класса C_0 и существует внутренняя функция θ , обладающая свойством (1.4) и такая что $\theta(T_0) = \mathbb{O}$, $V \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ – абсолютно непрерывная изометрия, а оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H}_0)$ таков, что оператор

$$R = \begin{pmatrix} T_0 & A \\ \mathbb{O} & V \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

– полиномиально ограниченный. Тогда оператор R подобен сжатию.

Доказательство. По лемме 2.2 оператор R – абсолютно непрерывный, поэтому оператор $\theta(R)$ корректно определен. Положим

$$\mathcal{M} = \text{clos } \theta(R)(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{K}).$$

Ясно, что $R\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ и $\theta(P_{\mathcal{M}^\perp}R|_{\mathcal{M}^\perp}) = P_{\mathcal{M}^\perp}\theta(R)|_{\mathcal{M}^\perp} = \mathbb{O}$. Так как θ обладает свойством (1.4), оператор $P_{\mathcal{M}^\perp}R|_{\mathcal{M}^\perp}$ подобен сжатию.

Покажем, что $R|_{\mathcal{M}} \approx V$. Пусть $A_\theta \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H}_0)$ – оператор, такой что

$$\theta(R) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & A_\theta \\ \mathbb{O} & \theta(V) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Из равенства $R\theta(R) = \theta(R)R$, записанного в матричной форме, заключаем, что

$$T_0A_\theta + A\theta(V) = A_\theta V. \quad (2.3)$$

Положим $X = \theta(R)|_{\mathcal{K}}$. Из (2.2) ясно, что $\mathcal{M} = \text{clos } X\mathcal{K}$. Таким образом, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ и X действует по формуле $Xx = A_\theta x \oplus \theta(V)x$, $x \in \mathcal{K}$. Имеем

$$\|Xx\|^2 = \|A_\theta x\|^2 + \|\theta(V)x\|^2 \geq \|\theta(V)x\|^2 = \|x\|^2$$

(поскольку функция θ – внутренняя и оператор V – абсолютно непрерывная изометрия). Поэтому оператор X обратим. Из (2.3) следует, что $R|_{\mathcal{M}}X = XV$. Таким образом, оператор X реализует соотношение $R|_{\mathcal{M}} \approx V$.

Мы получили, что оператор R имеет инвариантное подпространство \mathcal{M} , такое что оператор $R|_{\mathcal{M}}$ подобен изометрии, а оператор $P_{\mathcal{M}^\perp}R|_{\mathcal{M}^\perp}$ подобен сжатию. По теореме А оператор R подобен сжатию. \square

Замечание 2.4. Пусть оператор R имеет вид (2.1), где V – изометрия. По теореме С (см. введение), оператор R подобен сжатию тогда и только тогда, когда оператор T_0 подобен сжатию и существует оператор Y , такой что $A = T_0Y - YV$, и тогда

$$\begin{pmatrix} I & Y \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} T_0 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Теперь предположим, что оператор R удовлетворяет условиям теоремы 2.3. Тогда существует оператор $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H}_0)$, такой что $A = T_0Y - YV$. Пусть оператор A_θ определен в (2.2). Из (2.4) и (2.2) легко увидеть, что $Y\theta(V) = -A_\theta$, то есть оператор Y может быть определен на $\theta(V)\mathcal{K}$ единственным образом. Автор не знает, как можно определить Y на $\mathcal{K} \ominus \theta(V)\mathcal{K}$, см. также пример 4.1 ниже.

Предложение 2.5. Пусть $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{K}_1$ – гильбертовы пространства, $T_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$, $T_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $V_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1)$, $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{K}_1)$ и $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$. Положим $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{H}_1$,

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & K \\ \mathbb{O} & T_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}), \quad R = \begin{pmatrix} T_0 & A \\ \mathbb{O} & T_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

и

$$R_0 = \begin{pmatrix} T_0 & \mathbb{O} & A \\ \mathbb{O} & V_1 & K \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & T_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{K}). \quad (2.5)$$

Тогда \mathcal{K}_1 – инвариантное подпространство для R_0 и R_0 имеет следующий вид относительно представления пространства $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{K}$ в виде $\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{H}$:

$$R_0 = \begin{pmatrix} V_1 & * \\ \mathbb{O} & R \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{H}). \quad (2.6)$$

1) Пусть положительные степени оператора V ограничены в совокупности (пусть V – полиномиально ограниченный оператор). Тогда положительные степени оператора R ограничены в совокупности (R – полиномиально ограниченный оператор), если и только если положительные степени оператора R_0 ограничены в совокупности (R_0 – полиномиально ограниченный оператор). 2) Пусть V – изометрия. Тогда оператор R подобен сжатию, если и только если оператор R_0 подобен сжатию.

Доказательство. 1) Пусть n – натуральное число, $K_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{K}_1)$ и $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$ – операторы, такие что

$$V^n = \begin{pmatrix} V_1^n & K_n \\ \mathbb{O} & T_1^n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad R^n = \begin{pmatrix} T_0^n & A_n \\ \mathbb{O} & T_1^n \end{pmatrix}.$$

Простое вычисление показывает, что

$$R_0^n = \begin{pmatrix} T_0^n & \mathbb{O} & A_n \\ \mathbb{O} & V_1^n & K_n \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & T_1^n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что степени оператора V ограничены в совокупности тогда и только тогда, когда нормы операторов из матричного представления операторов V^n ограничены равномерно по n , и то же самое верно для R и R_0 . Отсюда следует утверждение об ограниченности степеней в совокупности. Утверждение о полиномиальной ограниченности доказывается аналогично.

2) Пусть V – изометрия, тогда V_1 – изометрия, поскольку $V_1 = V|_{\mathcal{K}_1}$. Если оператор R подобен сжатию, то оператор R_0 подобен сжатию по теореме А, так как R_0 имеет вид (2.6). Если оператор R_0 подобен сжатию, то оператор R подобен сжатию, потому что R является компрессией оператора R_0 на его коинвариантное подпространство. \square

Доказательство теоремы 1.2. Не умаляя общности, можно предположить, что T_1 – вполне неунитарное сжатие. Действительно, пусть T_2 – сжатие, Y – обратимый оператор и $YT_1Y^{-1} = T_2$. Тогда

$$R_1 := \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & Y \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & Y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 & * \\ \mathbb{O} & T_2 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $T_2 = T_3 \oplus U$, где T_3 – вполне неунитарное сжатие, а U – унитарный оператор. Тогда

$$R_1 = \begin{pmatrix} T_0 & A_1 & A_2 \\ \mathbb{O} & T_3 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & U \end{pmatrix},$$

где A_1 и A_2 – подходящие операторы. По теореме В (примененной к R_1^*), оператор R_1 подобен сжатию тогда и только тогда, когда оператор $\begin{pmatrix} T_0 & A_1 \\ \mathbb{O} & T_3 \end{pmatrix}$ подобен сжатию.

Таким образом, пусть $R = \begin{pmatrix} T_0 & A \\ \mathbb{O} & T_1 \end{pmatrix}$, где $\theta(T_0) = \mathbb{O}$ и T_1 – вполне неунитарное сжатие. Обозначим через V минимальную изометрическую дилатацию сжатия T_1 . Так как сжатие T_1 вполне неунитарно, то V – абсолютно непрерывная изометрия (см. [25, теоремы I.4.1 и II.6.4]). Имеем $V = \begin{pmatrix} V_1 & K \\ \mathbb{O} & T_1 \end{pmatrix}$ для некоторых операторов V_1 и K . Определим оператор R_0 по формуле (2.5). По предложению 2.5 (1) оператор R_0 полиномиально ограничен. По теореме 2.3 оператор R_0 подобен сжатию. По предложению 2.5 (2) оператор R подобен сжатию. \square

§3. О ФУНКЦИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ (1.4)

В этом параграфе будет доказано существование внутренних функций, удовлетворяющих условию (1.4) (теорема 3.2). Также будет показано, что конечное произведение функций, удовлетворяющих условию (1.4), также удовлетворяет условию (1.4) (предложение 3.3).

Напомним определения. Пусть \mathbb{D} – открытый единичный круг. Для $\lambda \in \mathbb{D}$ положим $b_\lambda(z) = \frac{|\lambda|}{\lambda} \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda}z}$, $z \in \mathbb{D}$. Хорошо известно, что если $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{D}$ и $\sum_n (1 - |\lambda_n|) < \infty$, то произведение $B = \prod_n b_{\lambda_n}$ сходится и называется *произведением Бляшке*. Положим $B_n = \prod_{k \neq n} b_{\lambda_k}$. Последовательность $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет *интерполяционному условию Карлесона* (для краткости, *условию Карлесона*), если $\inf_n |B_n(\lambda_n)| > 0$.

Пусть $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность внутренних функций, такая что произведение $\theta = \prod_{n \in \mathbb{N}} \theta_n$ сходится. Последовательность $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет *обобщенному условию Карлесона*, если существует число $\delta > 0$, такое что $|\theta(z)| \geq \delta \inf_{n \in \mathbb{N}} |\theta_n(z)|$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Хорошо известно, что последовательность $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию Карлесона тогда и только тогда, когда последовательность $\{b_{\lambda_n}\}_n$ удовлетворяет обобщенному условию Карлесона, см., например, [19, §IX.3] или [20, лемма II.C.3.2.18].

Следующая лемма является непосредственным следствием результатов из [26, §3.4], см. также [19, §IX. 2, IX.3] или [20, теоремы II.C.3.1.4 и II.C.3.2.14]. Другое доказательство см. в [7, теорема 4.4]. Доказательство леммы приводится здесь потому, что результаты из [26] сформулированы только для компрессий одностороннего сдвига кратности 1.

Лемма 3.1. Пусть $\theta = \prod_{n \in \mathbb{N}} \theta_n$, где $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность внутренних функций, удовлетворяющая обобщенному условию Карлесона. Пусть T – абсолютно непрерывный полиномиально ограниченный оператор класса C_0 , такой что $\theta(T) = \mathbb{O}$. Тогда

$$T \approx \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T|_{\ker \theta_n(T)}.$$

Доказательство. Обозначим через \mathcal{H} пространство, в котором действует T , и положим $\mathcal{H}_n = \ker \theta_n(T)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Тогда существует функция $\varphi \in H^\infty$, такая что $\varphi - \mu_n \in \theta_n H^\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ ([20, теорема II.C.3.2.14], или [26, теоремы 2.3 и 3.4], или [19, §IX.2 и §IX.3]). Ясно, что $\varphi(T)$ – ограниченный оператор, и $\varphi(T)|_{\mathcal{H}_n} = \mu_n I_{\mathcal{H}_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Мы получили, что для любой последовательности $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ отображение

$$\sum_n x_n \mapsto \sum_n \mu_n x_n, \quad \text{где } x_n \in \mathcal{H}_n,$$

ограничено. Применяя [20, теорема II.C.3.1.4], или [26, теорема 2.1], или [19, §VI.4], получаем, что отображение

$$X: \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \sum_n x_n \mapsto \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} x_n, \quad x_n \in \mathcal{H}_n,$$

ограничено и обратимо. Ясно, что $XT = (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T|_{\mathcal{H}_n})X$, то есть $T \approx \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T|_{\mathcal{H}_n}$. \square

Теорема 3.2. Пусть $N \in \mathbb{N}$, B_1, \dots, B_N – произведения Бляшке с простыми нулями, удовлетворяющими условию Карлесона, и $\theta = B_1 \cdots B_N$. Тогда θ обладает свойством (1.4).

Доказательство. По теореме 5.5 из [26], см. также [19, §IX.5] или [20, II.C.3.3.5(c) (ii), (iv)], $\theta = \prod_n \theta_n$, где $\{\theta_n\}_n$ удовлетворяет обобщенному условию Карлесона и θ_n – конечное произведение Бляшке, причем $\deg \theta_n \leq N$ для всех n , где $\deg \vartheta$ – это количество нулей конечного произведения Бляшке ϑ с учетом их кратности.

Пусть T – абсолютно непрерывный полиномиально ограниченный оператор, такой что $\theta(T) = \mathbb{O}$. Положим $T_n = T|_{\ker \theta_n(T)}$. Так как $\{\theta_n\}_n$ удовлетворяет обобщенному условию Карлесона, то по лемме 3.1 получаем, что

$$T \approx \bigoplus_n T_n. \tag{3.1}$$

Пусть n фиксировано. Так как $\theta_n(T_n) = \mathbb{O}$ и $\deg \theta_n \leq N$, то существует многочлен p_n , такой что $p_n(T_n) = \mathbb{O}$ и $\deg p_n \leq N$. По теореме 2 из [3], существует константа $C > 0$, зависящая только от N , и обратимый оператор X_n , такие что

$$\|X_n\| \|X_n^{-1}\| \leq C \quad \text{и} \quad R_n := X_n T_n X_n^{-1} \text{ — сжатие.} \quad (3.2)$$

Отметим, что теорема 2 из [3] сформулирована для оператора $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, где \mathcal{H} — гильбертово пространство и $\dim \mathcal{H} \leq N$, однако условие, используемое в доказательстве — это существование многочлена p , такого что $p(T) = \mathbb{O}$ и $\deg p \leq N$. Конечно, если $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\dim \mathcal{H} \leq N$, то существует многочлен p , такой что $p(T) = \mathbb{O}$ и $\deg p \leq N$, но обратное неверно. Таким образом, теорема 2 из [3] сформулирована в более слабой форме, чем доказана.

Заключение теоремы следует из соотношений (3.1) и (3.2). \square

Предложение 3.3. Пусть внутренние функции θ_0 и θ_1 обладают свойством (1.4). Тогда функция $\theta_0\theta_1$ обладает свойством (1.4).

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — абсолютно непрерывный полиномиально ограниченный оператор, такой что $(\theta_0\theta_1)(T) = \mathbb{O}$. Положим $\mathcal{H}_0 = \ker \theta_0(T)$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0$, $T_0 = T|_{\mathcal{H}_0}$ и $T_1 = P_{\mathcal{H}_1} T|_{\mathcal{H}_1}$. Ясно, что $\theta_0(T_0) = \mathbb{O}$ и $\theta_1(T_1) = \mathbb{O}$. По свойству (1.4) оператор T_1 подобен сжатию. По теореме 1.2 оператор T подобен сжатию. \square

Замечание 3.4. Предложение 3.3 дает другое доказательство теоремы 3.2. Именно, если $V = V_1 \cdots V_N$, где V_n — произведения Бляшке с простыми нулями, удовлетворяющими условию Карлесона, для всех $1 \leq n \leq N$ и $N < \infty$, то V обладает свойством (1.4), потому что все V_n обладают свойством (1.4). Это доказательство не использует результаты работ [3] и [26], но не дает оценок норм оператора, реализующего подобие полиномиально ограниченного оператора сжатию, в то время как работы [3] и [26] содержат такие оценки.

Автор не знает, существуют ли другие примеры функций, обладающих свойством (1.4), кроме функций из условия теоремы 3.2.

§4. ПРИМЕРЫ

В этом параграфе рассматривается попытка прямого построения оператора, сплетающего полиномиально ограниченный оператор из

теоремы 2.3 с сжатием, см. замечание 2.4. Также с использованием примера Ле Мерди [15] показывается, что утверждения настоящей статьи о полиномиально ограниченных операторах не могут быть обобщены на операторы, о которых предполагается только то, что их положительные степени ограничены в совокупности.

4.1. О построении сплетающего оператора.

Пример 4.1. Пусть θ – внутренняя функция, обладающая свойством (1.4), а $V \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ – абсолютно непрерывная изометрия. Положим $\mathcal{K}_1 = \theta(V)\mathcal{K}$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{K} \ominus \mathcal{K}_1$, $V_1 = V|_{\mathcal{K}_1}$, $T_1 = P_{\mathcal{H}_1}V|_{\mathcal{H}_1}$, $K = P_{\mathcal{K}_1}V|_{\mathcal{H}_1}$. Пусть $T_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ и $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$ таковы, что оператор

$$R = \begin{pmatrix} T_0 & A \\ \mathbb{O} & T_1 \end{pmatrix}$$

полиномиально ограничен и $\theta(R) = \mathbb{O}$. Определим R_0 по формуле (2.5). По предложению 2.5 (1) оператор R_0 полиномиально ограничен. Заметим, что R_0 имеет вид

$$R_0 = \begin{pmatrix} T_0 & * \\ \mathbb{O} & V \end{pmatrix}.$$

По теореме 2.3 оператор R_0 подобен сжатию. Пусть $Y_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H}_0)$ – оператор из замечания 2.4, примененного к R_0 . Принимая во внимание равенства $\theta(R) = \mathbb{O}$ и (2.4) (для R_0 и Y_1), легко заключить, что $Y_1|_{\mathcal{K}_1} = \mathbb{O}$. Положим $Y = Y_1|_{\mathcal{H}_1}$. Тогда

$$A = T_0Y - YT_1 \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} I & Y \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} T_0 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Теперь предположим, что $\theta = B = \prod_n b_{\lambda_n}$ – произведение Бляшке с простыми нулями $\{\lambda_n\}_n$ (здесь $b_\lambda(z) = \frac{|\lambda|}{\lambda} \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda}z}$, $z, \lambda \in \mathbb{D}$), а V – односторонний сдвиг кратности 1, то есть оператор умножения на независимую переменную в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$. Положим $B_n = \prod_{k \neq n} b_{\lambda_k}$ и $k_n(z) = \frac{(1 - |\lambda_n|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\lambda}_n z} B_n(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Тогда $\mathcal{H}_1 = \vee_n k_n$, $\|k_n\| = 1$ и $T_1 k_n = \lambda_n k_n$. Кроме того, пусть $\{e_n\}_n$ – ортонормированный базис пространства \mathcal{H}_0 и $T_0 e_n = \lambda_n e_n$. Положим $a_{jn} = (A k_n, e_j)$ для всех индексов n, j . Для $\varphi \in H^\infty$ положим $A_\varphi = P_{\mathcal{H}_0} \varphi(R)|_{\mathcal{H}_1}$. Легко

видеть, что

$$(A_\varphi k_n, e_j) = \frac{\varphi(\lambda_n) - \varphi(\lambda_j)}{\lambda_n - \lambda_j} a_{jn}, \quad j \neq n, \quad (A_\varphi k_n, e_n) = \varphi'(\lambda_n) a_{nn}. \quad (4.2)$$

Так как $A_B = \mathbb{O}$ и $B'(\lambda_n) \neq 0$ для всех n , из (4.2) заключаем, что $a_{nn} = 0$ для всех n . Поэтому

$$(A_\varphi k_n, e_n) = 0 \quad \text{для любой функции } \varphi \in H^\infty. \quad (4.3)$$

Также

$$R(A_{B_n/B_n(\lambda_n)} k_n \oplus k_n) = \lambda_n (A_{B_n/B_n(\lambda_n)} k_n \oplus k_n). \quad (4.4)$$

Пусть $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$ удовлетворяет условию (4.1). Тогда

$$A_\varphi = \varphi(T_0)Y - Y\varphi(T_1) \quad \text{для любой функции } \varphi \in H^\infty. \quad (4.5)$$

Положим $\alpha_n = (Yk_n, e_n)$. Из равенств (4.3) и (4.5), примененных к $\varphi = B_n/B_n(\lambda_n)$, легко увидеть, что

$$Yk_n = -A_{B_n/B_n(\lambda_n)} k_n + \alpha_n e_n \quad \text{для всех } n. \quad (4.6)$$

Теперь предположим, что последовательность $\{\lambda_n\}_n$ удовлетворяет условию Карлесона (определение напоминает в §3). По лемме 3.1 семейство $\{k_n\}_n$ эквивалентно ортонормированному базису пространства \mathcal{H}_1 , то есть существует обратимый оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, такой что семейство $\{Xk_n\}_n$ – ортонормированный базис пространства \mathcal{H}_1 . Также по лемме 3.1 семейство пространств

$$\{e_n \vee (A_{B_n/B_n(\lambda_n)} k_n \oplus k_n)\}_n$$

эквивалентно ортогональному семейству пространств, потому что эти пространства – это собственные подпространства полиномиально ограниченного оператора R , такого что $B(R) = \mathbb{O}$. Кроме того, из равенства (4.3) имеем $(e_n, A_{B_n/B_n(\lambda_n)} k_n \oplus k_n) = 0$ и

$$1 \leq \|A_{B_n/B_n(\lambda_n)} k_n \oplus k_n\| \leq (M^2/\delta^2 + 1)^{1/2},$$

где M – константа из условия полиномиальной ограниченности оператора R , а $\delta = \inf_n |B_n(\lambda_n)|$. Таким образом, объединение семейств

$$\{e_n\}_n \quad \text{и} \quad \{A_{B_n/B_n(\lambda_n)} k_n \oplus k_n\}_n$$

эквивалентно ортонормированному базису пространства $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Поэтому оператор Z , действующий по формулам

$$Ze_n = e_n, \quad Zk_n = A_{B_n/B_n(\lambda_n)} k_n \oplus k_n \quad \text{для всех индексов } n,$$

ограничен. Ясно, что оператор $P_{\mathcal{H}_0} Z|_{\mathcal{H}_1}$ также ограничен и

$$P_{\mathcal{H}_0} Z k_n = A_{B_n/B_n(\lambda_n)} k_n.$$

Мы заключаем, что оператор Y , определенный формулой (4.6), ограничен для любой ограниченной последовательности $\{\alpha_n\}_n$.

В случае, когда $B = B_1 \cdots B_N$ – произведение Бляшке с простыми нулями, где B_1, \dots, B_N – произведения Бляшке, нули которых удовлетворяют условию Карлесона, но последовательность нулей произведения Бляшке B не удовлетворяет условию Карлесона, автор не знает, для каких последовательностей $\{\alpha_n\}_n$ оператор Y , определенный формулой (4.6), ограничен. Однако по теоремам 2.3 и 3.2 такие последовательности $\{\alpha_n\}_n$ существуют.

4.2. Об операторах, положительные степени которых ограничены в совокупности. Частные случаи леммы 3.1 и теоремы 1.2 могут быть переформулированы следующим образом.

Предложение 4.2. Пусть \mathcal{H} – гильбертово пространство, $\{x_n\}_n \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{H} = \vee_n x_n$, последовательность $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{D}$ такова, что $\lambda_n \neq \lambda_k$ при $n \neq k$, $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию Карлесона и оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ действует по формуле $T x_n = \lambda_n x_n$ для всех n . Пусть \mathcal{E} – гильбертово пространство, $\{e_n\}_n$ – ортонормированный базис пространства \mathcal{E} и оператор $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ действует по формуле $D e_n = \lambda_n e_n$ для всех n . Если T – полиномиально ограниченный оператор, то $T \approx D$.

Предложение 4.3. Пусть \mathcal{E} – гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_n\}_n$, последовательность $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{D}$ такова, что $\lambda_n \neq \lambda_k$ при $n \neq k$, $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию Карлесона и оператор $D \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ действует по формуле $D e_n = \lambda_n e_n$ для всех n . Пусть \mathcal{H} – гильбертово пространство, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – сжатие и $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$. Положим

$$R = \begin{pmatrix} D & A \\ \mathbb{O} & T \end{pmatrix}.$$

Если R – полиномиально ограниченный оператор, то R подобен сжатию.

Пример из [15, предложение 5.2] показывает, что предложения 4.2 и 4.3 не могут быть обобщены на операторы, удовлетворяющие условию Тадмора–Ритта, то есть такие операторы, для которых имеет

место оценка $\|(T - zI)^{-1}\| \leq C/|z - 1|$ при $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, для некоторой константы $C > 0$, и, следовательно, на операторы, у которых положительные степени ограничены в совокупности ([16, 18, 28]); см. также более простое доказательство в [27]. Приведем краткое изложение примера Ле Мерди.

Пусть \mathcal{E} – гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n=0}^\infty$. Существует семейство $\{\alpha_{kn}\}_{k,n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$, такое что последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, определенная по формулам

$$x_{2n} = e_{2n}, \quad x_{2n+1} = e_{2n+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{kn} e_{2k}, \quad n \geq 0, \quad (4.7)$$

имеет следующие свойства:

$$\|x_n\| \asymp 1, \quad \sup_{n \geq 0} \|\mathcal{P}_n\| < \infty, \quad (4.8)$$

где оператор $\mathcal{P}_n \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ действует по формуле $\mathcal{P}_n x_k = x_k$, $k \leq n$, $\mathcal{P}_n x_k = 0$, $k > n$, но последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ не является безусловным базисом пространства \mathcal{E} . Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty \subset (0, 1)$ и $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, $n \geq 0$. Определим оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ по формуле $T x_n = \lambda_n x_n$ для всех $n \geq 0$. По [27, лемма 2.2], T удовлетворяет условию Тадмора–Ритта. Следовательно, положительные степени оператора T ограничены в совокупности (см. [16, 18, 28].) Положим

$$\mathcal{E}_0 = \bigvee_{n \geq 0} e_{2n}, \quad \mathcal{E}_1 = \bigvee_{n \geq 0} e_{2n+1},$$

$$D_0 e_{2n} = \lambda_{2n} e_{2n}, \quad D_1 e_{2n+1} = \lambda_{2n+1} e_{2n+1}, \quad n \geq 0.$$

Легко видеть, что T имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} D_0 & A \\ \mathbb{O} & D_1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

где $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_0)$ – подходящий оператор.

Теперь предположим, что $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет условию Карлесона. Если предположить, что оператор T подобен сжатию, то должно быть выполнено соотношение $T \approx D_0 \oplus D_1$. Но это соотношение означает, что $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ – безусловный базис пространства \mathcal{E} . Получили противоречие. Таким образом, T имеет вид как в предложении 4.2, но T не удовлетворяет заключению предложения 4.2. Также, так как T имеет вид (4.9), то T имеет вид как в предложении 4.3, но T не удовлетворяет заключению предложения 4.3.

Замечание 4.4. Пример семейства $\{\alpha_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$, такого что последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенная формулами (4.7), имеет нужные свойства, может быть найден в [23, пример III.14.5, с. 429]. Именно, предположим, что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет следующие свойства:

$$a_n \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} na_n^2 < \infty, \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty.$$

Положим

$$\alpha_{kn} = 0, \quad \text{если } k < n, \quad \text{и} \quad \alpha_{kn} = a_{k-n}, \quad \text{если } k \geq n. \quad (4.10)$$

Тогда семейство $\{\alpha_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ имеет нужные свойства. Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность (не обязательно неотрицательных) комплексных чисел, такая что $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, семейство $\{\alpha_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ определено формулами (4.10) и последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена формулами (4.7). Положим

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (4.11)$$

Легко видеть, что условия (4.8) выполняются тогда и только тогда, когда оператор Ганкеля с символом ψ , $\psi(z) = \bar{z}\varphi(\bar{z})$, $z \in \mathbb{T}$ (\mathbb{T} – единичная окружность), ограничен, то есть когда $\varphi \in BMOA$, в то время как последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ является безусловным базисом тогда и только тогда, когда оператор Тёплица с символом φ ограничен, то есть когда $\varphi \in H^{\infty}$ (об операторах Ганкеля и Тёплица и их символах см., например, [21, гл. 1.1, 1.3], см. также [19, §VIII.2, VIII.6], [20, гл. I.B.1, §I.B.4.1]). Условие $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty$ – это простое достаточное условие ограниченности оператора Ганкеля, в то время как условие $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ – это необходимое и достаточное условие для включения $\varphi \in H^{\infty}$, если функция φ определена формулой (4.11) и $a_n \geq 0$ для всех $n \geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Badea, *Perturbations of operators similar to contractions and the commutator equation*. — Stud. Math. **150**, No. 3 (2002), 273–293.
2. H. Bercovici, B. Prunaru, *Quasiaffine transforms of polynomially bounded operators*. — Arch. Math. (Basel), **71** (1998), 384–387.

3. J. Bourgain, *On the similarity problem for polynomially bounded operators on Hilbert space.* — *Isr. J. Math.* **54** (1986), 227–241.
4. G. Cassier, *Generalized Toeplitz operators, restrictions to invariant subspaces and similarity problems.* — *J. Oper. Theory* **53**, No. 1 (2005), 49–89.
5. G. Cassier, J. Esterle, *Factorisation spatiale.* — *J. Oper. Theory* **62**, No. 1 (2009), 111–123.
6. D. N. Clark, *Projectivity and lifting of Hilbert module maps.* — *Ann. Pol. Math.* **66** (1997), 43–48.
7. R. Clouâtre, *Similarity results for operators of class C_0 and the algebra $H^\infty(T)$.* *Oper. Matrices* **8**, No. 2 (2014), 425–447.
8. K. R. Davidson, V. I. Paulsen, *Polynomially bounded operators.* — *J. reine angew. Math.* **487** (1997), 153–170.
9. S. R. Foguel, *A counterexample to a problem of Sz.-Nagy.* — *Proc. Am. Math. Soc.* **15** (1964), 788–790.
10. M. F. Gamal', *Examples of cyclic polynomially bounded operators that are not similar to contractions.* — *Acta Sci. Math. (Szeged)* **82** (2016), 597–628.
11. P. R. Halmos, *On Foguel's answer to Nagy's question.* — *Proc. Am. Math. Soc.* **15** (1964), 791–793.
12. P. R. Halmos, *Ten problems in Hilbert space.* — *Bull. Am. Math. Soc.* **76** (1970), 887–933.
13. L. Kérchy, *Quasianalytic polynomially bounded operators.* — *Operator Theory: the State of the Art, Theta, Bucharest* (2016), 75–101.
14. A. Lebow, *A power-bounded operator that is not polynomially bounded.* — *Mich. Math. J.* **15** (1968), 397–399.
15. C. Le Merdy, *The similarity problem for bounded analytic semigroups on Hilbert space.* — *Semigroup Forum* **56**, No.2 (1998), 205–224.
16. Yu. Lyubich, *Spectral localization, power boundedness and invariant subspaces under Ritt's type condition,* *Studia Math.* **134** (2) (1999), 153–167.
17. W. Mlak, *Algebraic polynomially bounded operators.* — *Ann. Polon. Math.* **29** (1974), 133–139.
18. B. Nagy, J. Zemanek, *A resolvent condition implying power boundedness.* — *Stud. Math.* **134**, No. 2 (1999), 143–151.
19. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* М., Наука, 1980.
20. N. K. Nikolski, *Operators, functions, and systems: an easy reading. Volume I: Hardy, Hankel, and Toeplitz, Volume II: Model operators and systems,* *Math. Surveys and Monographs* **93**, AMS, 2002
21. V. V. Peller, *Hankel operators and their applications.* Springer Monographs in Math. New York, NY, Springer, 2003.
22. G. Pisier, *A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction.* — *J. Am. Math. Soc.* **10** (1997), No. 2, 351–369.
23. I. Singer, *Bases in Banach spaces.* I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag VIII, 1970.
24. B. Sz.-Nagy, *Completely continuous operators with uniformly bounded iterates.* — *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **4** (1959), 89–93.
25. B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, L. Kérchy, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* Springer, New York, 2010.

26. В. И. Васюнин, *Безусловно сходящиеся спектральные разложения и задачи интерполяции*. — Тр. МИАН СССР **130** (1978), 5–49.
27. P. Vitse, *Functional calculus under the Tadmor–Ritt condition, and free interpolation by polynomials of a given degree*. — J. Funct. Anal. **210**, No. 1 (2004), 43–72.
28. P. Vitse, *The Riesz turndown collar theorem giving an asymptotic estimate of the powers of an operator under the Ritt condition*. — Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **53**, No. 2 (2004), 283–312.

Gamal' M. F. A sufficient condition for the similarity of a polynomially bounded operator to a contraction.

Let T be a polynomially bounded operator, and let \mathcal{M} be its invariant subspace. Suppose that $P_{\mathcal{M}^\perp}T|_{\mathcal{M}^\perp}$ is similar to a contraction, while $\theta(T|_{\mathcal{M}}) = 0$, where θ is a finite product of Blaschke products with simple zeros satisfying the Carleson interpolating condition. Then T is similar to a contraction. It is mentioned that Le Merdy's example shows that the assumption of polynomially boundedness cannot be replaced by the assumption of power boundedness.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: gamal@pdmi.ras.ru

Поступило 22 мая 2017 г.