Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 456, 2017 г.

О. Л. Виноградов, А. В. Гладкая

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕПЕРИОДИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

§1. Введение

1.1. История вопроса. Пусть C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерной нормой, $\delta_h^k(f)$ – конечная разность k-го порядка, $\omega_1(f,h)$ – равномерный модуль непрерывности первого порядка функции f с шагом h.

В 1937 году Фавар [1], а также Ахиезер и Крейн [2] построили линейный метод приближения $\mathcal{X}_{n,r}$ со значениями в пространстве $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$, такой что для любой функции $f \in C^{(r)}$ справедливо неравенство

$$\|f-\mathcal{X}_{n,r}(f)\| \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l(r+1)}}{(2l+1)^{r+1}},$$

причем при любом $n \in \mathbb{N}$ константа $\mathcal{K}_r$ на всем $C^{(r)}$ не может быть уменьшена, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение функции f в $\mathcal{T}_{2n-1}$. Константы $\mathcal{K}_r$ называют *константами Фавара,* а операторы $\mathcal{X}_{n,r}$ – *операторами Ахиезера–Крейна–Фавара.* Для нечетных r неравенство (1) было усилено Жуком ($r=1$) [3] и Лигуном ($r>1$) [4], которые установили неравенство Джексона с точной константой:

$$\|f-\mathcal{X}_{n,r}(f)\| \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\,\omega_1\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right) \tag{2}$$

Ключевые слова: наилучшее приближение, непериодические сплайны, неравенства типа Джексона.

для любой функции $f \in C^{(r)}$. Далее Жук [5] усилил неравенства (1) и (2) следующим образом:

$$\|f - \mathcal{X}_{n,r}(f)\| \leqslant \left(\frac{\pi}{n}\right)^r \left\{A_{r,0}\|f^{(r)}\| + N_{n,r,m}(f^{(r)})\right\} \tag{3}$$

при всех $r \in \mathbb{N}$, а если, кроме того, r нечетно, то

$$\|f - \mathcal{X}_{n,r}(f)\| \leqslant \left(\frac{\pi}{n}\right)^r \left\{\frac{A_{r,0}}{2}\,\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right) + N_{n,r,m}(f^{(r)})\right\}. \tag{4}$$

Здесь $n, m \in \mathbb{N}$,

$$N_{n,r,m}(f^{(r)}) = \sum_{\nu=1}^{m-1} A_{r,\nu} \left\|\delta^{\nu}_{\frac{\pi}{n}}(f^{(r)})\right\| + \left(\frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} - \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^{\nu} A_{r,\nu}\right) 2^{-m} \left\|\delta^{m}_{\frac{\pi}{n}}(f^{(r)})\right\|,$$

а $A_{r,\nu}$ – некоторые явно построенные константы.

Эти оценки справедливы для широкого класса пространств с полунормой и точны еще и в интегральной метрике.

Жук получал своим методом оценки не только отклонений линейных методов приближения, но и функционалов общего вида, заданных на пространствах периодических функций, для которых справедливы неравенства типа (1). Некоторые из этих оценок вошли в книгу [6, главы 4 и 8]; см. библиографию там же.

Для приближений функций, заданных на оси, целыми функциями конечной степени аналог неравенства (1) установил Крейн [7], аналог неравенства (2) – Громов [8], неравенств (3) и (4) для наилучших приближений – Мерлина [9, 10], для отклонений линейного метода – Виноградов [11].

Для приближений периодических функций сплайнами аналоги неравенств (2)–(4) доказали Виноградов и Жук [12]. Участвующие в этих оценках сплайновые аналоги методов $\mathcal{X}_{n,r}$ ранее построил Виноградов [13]. Для приближений сплайнами в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ аналоги методов $\mathcal{X}_{n,r}$ построили Виноградов и Гладкая [14]; они же [15] доказали неравенства (2). Неравенства типа (1) для наилучших приближений периодическими и непериодическими сплайнами были известны ранее; их историю см. в [14].

В настоящей работе устанавливаются неравенства типа (3) и (4) для приближений сплайнами в пространствах $L_p(\mathbb{R})$. При этом неравенства типа (2) получаются как частные случаи при $m = 1$. Изложение в основном следует схеме из [12], которая восходит к упомянутой схеме Жука. На те результаты из [12], которые используются без изменений, мы даем ссылку, а в тех случаях, когда утверждение формально новое, но доказывается аналогично близкому утверждению из [12], проводим это доказательство.

В §2 и 3 описываются итерации формулы Эйлера–Маклорена, и на их основе строятся линейные операторы, отклонение которых допускает оценки типа (3) и (4). В §4 общие результаты применяются к приближению сплайнами в $L_p(\mathbb{R})$.

Подчеркнем, что в данной работе мы ограничиваемся линейными методами приближения. Многие оценки, полученные линейными методами, являются новыми и неулучшаемыми и для наилучших приближений. Специфика наилучших приближений позволяет получить для них ряд тонких неравенств, неверных для отклонений линейных методов приближения, но эти вопросы в работе не затрагиваются.

1.2. Обозначения. Далее $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ – множества вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно; если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными; $UCB(\mathbb{R})$ – пространство равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с равномерной нормой; если $p \in [1, +\infty]$, то $L_p(\mathbb{R})$ – стандартные пространства Лебега на прямой; $W_p^{(r)}(\mathbb{R})$ – множество функций, принадлежащих $L_p(\mathbb{R})$ и являющихся r-кратными интегралами от функций из $L_p(\mathbb{R})$; $W_{1,\mathrm{loc}}^{(r)}(\mathbb{R})$ – множество r-кратных интегралов от локально суммируемых на $\mathbb{R}$ функций.

Пусть $\mathfrak{M}$ – замкнутое подпространство пространства $L_p(\mathbb{R})$ при $p \in [1, +\infty)$ или пространства $UCB(\mathbb{R})$ при $p = +\infty$, P – полунорма, заданная на $\mathfrak{M}$, и выполняются следующие условия.

1) Пространство $(\mathfrak{M}, P)$ инвариантно относительно сдвига, т.е. для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $h \in \mathbb{R}$ будет $f(\,\cdot\, + h) \in \mathfrak{M}$ и $P(f(\,\cdot\, + h)) = P(f)$.

2) Существует такая постоянная B, что $P(f) \leqslant B\|f\|_p$ для всех $f \in \mathfrak{M}$.

Тогда будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M}, P)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Примерами пространств класса $\mathcal{B}$ служат: $\bigl(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\bigr)$, $(L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ при $p \in [1, +\infty)$, пространства периодических функций $\bigl(C, \|\cdot\|_p\bigr)$ при $p \in [1, +\infty]$, а также более общие пространства равномерно непрерывных почти-периодических функций, показатели которых принадлежат фиксированному множеству, с различными нормами.

Если $r \in \mathbb{N}$, то $\mathfrak{M}^{(r)}$ – множество функций $f \in \mathfrak{M}$, таких что $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in \mathfrak{M}$; $f^{(-r)}$ – любая r-я первообразная функции f. Центральные разности, модули непрерывности и функции Стеклова порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ функции f определяются равенствами

$$\delta_t^r(f, x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f\left(x + \frac{rt}{2} - kt\right),$$

$$\omega_r(f, h)_P = \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} P\big(\delta_t^r(f)\big), \qquad S_{h,r}(f) = \frac{1}{h^r}\delta_h^r(f^{(-r)});$$

величина

$$E(f, \mathfrak{N})_P = \inf_{T \in \mathfrak{N}} P(f - T)$$

есть наилучшее приближение функции f элементами множества $\mathfrak{N}$ по полунорме P. Индекс p у наилучшего приближения, модуля непрерывности и т.п. означает, что $P(f) = \|f\|_p$.

При $\sigma > 0$ через $\mathbf{S}_{\sigma,\mu}$ обозначается множество сплайнов порядка $\mu \in \mathbb{Z}_+$ дефекта 1 по равномерному разбиению $\frac{k\pi}{\sigma}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Другими словами, при $\mu \in \mathbb{N}$ это множество $(\mu-1)$-гладких на $\mathbb{R}$ функций, являющихся на каждом интервале $\left(\frac{k\pi}{\sigma}, \frac{(k+1)\pi}{\sigma}\right)$ алгебраическим многочленом степени не выше μ, а при $\mu = 0$ – множество функций, постоянных на каждом таком интервале.

Пусть еще B_r – 1-периодические сплайны Бернулли, то есть

$$B_0(x) = 1, \quad B_r(x) = -\frac{r!}{2^{r-1}\pi^r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x - r\pi/2)}{k^r}, \quad r \in \mathbb{N};$$

$$\gamma_k = \frac{B_k\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}$$

– коэффициенты в формуле Эйлера–Маклорена. Символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0.

В кратных суммах будут использоваться следующие обозначения:

$$\langle k\rangle_0 = 0, \qquad \langle k\rangle_\nu = k_1 + \dots + k_\nu,$$

$$\mathbb{O}_m = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m, \qquad K_{r,0} = \{0\},$$

$$K_{r,m} = \left\{k \in \mathbb{Z}_+^m : 0 \leqslant k_\nu \leqslant r + \nu - 2 - \langle k\rangle_{\nu-1}\right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

При фиксированном m для $k \in \mathbb{Z}_+^m$ вместо $\langle k\rangle_m$ пишем просто $\langle k\rangle$, если это не приводит к двусмысленности.

§2. Формула Эйлера–Маклорена и ее неполные итерации

Лемма 1 (формула Эйлера–Маклорена [6, следствие II.6.1]). *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in W^{(r)}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$f = L_{h,r,1}(f) + R_{h,r,0}(f),$$

где

$$L_{h,r,1}(f) = \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k h^{k-1} \delta^1_h (f^{(k-1)}),$$

$$R_{h,r,0}(f) = \frac{h^r}{r!} \int_{-1/2}^{1/2} f^{(r)}(\,\cdot\, - th) \left(B_r\left(\frac{1}{2}\right) - B_r(t) \right) dt. \qquad (5)$$

Если, кроме того, r нечетно, то

$$R_{h,r,0}(f) = \frac{h^r}{r!} \int_0^{1/2} \delta^1_{2th}(f) B_r(t)\, dt. \qquad (6)$$

Формула Эйлера–Маклорена дает разложение функции по разностям первого порядка ее последовательных производных, начиная с первообразной.

Замечание 1. В условиях леммы 1

$$L_{h,r,1}(f) = \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k h^k S^{(k)}_{h,1}(f).$$

Определим итерации формулы Эйлера–Маклорена следующим образом. Пусть I – тождественный оператор, $r, m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in W^{(r)}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Положим $L_{h,r,0} = I$,

$$L_{h,r,m}(f) = \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k h^k L_{h,r+1-k,m-1}\left(S^{(k)}_{h,1}(f) \right),$$

$$R_{h,r,m}(f) = L_{h,r,m}(f) - L_{h,r,m+1}(f).$$

Для получения различных форм записи операторов $L_{h,r,m}$ и $R_{h,r,m}$ сделаем несколько общих замечаний.

Пусть Y_k – некоторые операторы,

$$L_{r,0} = I, \quad L_{r,1} = \sum_{k=0}^{r-1} Y_k, \quad L_{r,m} = \sum_{k=0}^{r-1} L_{r+1-k,m-1} Y_k,$$

$$R_{r,m} = L_{r,m} - L_{r,m+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= L_{r,m} + \sum_{\nu=0}^{m-1} R_{r,\nu}, \\ L_{r,m} &= \sum_{k\in K_{r,m}} Y_{k_m} \cdot \ldots \cdot Y_{k_1} \\ &= \sum_{k\in K_{r,m-1}} L_{r+m-1-\langle k\rangle,1} Y_{k_{m-1}} \cdot \ldots \cdot Y_{k_1}, \qquad m-1\in\mathbb{N}, \\ R_{r,m} &= \sum_{k\in K_{r,m}} R_{r+m-\langle k\rangle,0} Y_{k_m} \cdot \ldots \cdot Y_{k_1}, \qquad m\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Эти утверждения легко доказываются по индукции.

В нашем случае

$$Y_k(f) = \gamma_k h^k S_{h,1}^{(k)}(f).$$

Заметим, что операторы Y_k коммутируют и

$$Y_{k_1} \cdot \ldots \cdot Y_{k_\nu}(f) = \left(\prod_{j=1}^{\nu} \gamma_{k_j}\right) h^{\langle k\rangle_\nu} S_{h,\nu}^{(\langle k\rangle_\nu)}(f).$$

Применяя общие формулы к операторам $L_{h,r,m}$ и $R_{h,r,m}$, получаем следующее утверждение.

Лемма 2 (итерированная формула Эйлера–Маклорена [12])**.** *Пусть* $r, m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in W_{1,\mathrm{loc}}^{(r)}(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$f = L_{h,r,m}(f) + \sum_{\nu=0}^{m-1} R_{h,r,\nu}(f),$$

где

$$L_{h,r,m}(f) = \sum_{k\in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} \gamma_{k_j}\right) h^{\langle k\rangle} S_{h,m}^{(\langle k\rangle)}(f),$$

$$\begin{aligned} R_{h,r,\nu}(f) &= \sum_{k\in K_{r,\nu}} \left(\prod_{j=1}^{m} \gamma_{k_j}\right) h^{\langle k\rangle} R_{h,r+\nu-\langle k\rangle,0}\left(S_{h,\nu}^{(\langle k\rangle)}(f)\right) \\ &= h^r \int_{-1/2}^{1/2} \delta_h^{\nu}(f^{(r)}, \cdot - th) \sum_{k\in K_{r,\nu}} \left(\prod_{j=1}^{\nu} \gamma_{k_j}\right) \frac{1}{(r+\nu-\langle k\rangle)!} \qquad (7) \\ &\quad \times \left(B_{r+\nu-\langle k\rangle}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{r+\nu-\langle k\rangle}(t)\right) dt. \end{aligned}$$

Замечание 2. Итерации формулы Эйлера–Маклорена могут быть описаны так: на m-м шаге к каждому слагаемому в $(m-1)$-кратной сумме применяется формула Эйлера–Маклорена такого порядка, чтобы остаточный член содержал под знаком интеграла r-ю производную функции f. Поскольку к каждому слагаемому применяется формула со своим количеством членов, мы называем такие итерации неполными.

Замечание 3. Поскольку все числа $B_k\left(\frac{1}{2}\right)$ при нечетных k равны нулю, при суммировании мы можем опустить слагаемые, в которых хотя бы одна из компонент мультииндекса нечетна. Подобные суммы можно записать в виде

$$\sum_{k\in K_{r,m}} a_k = \sum_{l\in \Lambda_{r,m}} a_{2l},$$

где $\Lambda_{r,0} = \{0\}$,

$$\Lambda_{r,m} = \left\{l \in \mathbb{Z}_+^m : 0 \leqslant l_\nu \leqslant [r+\nu-2-2\langle l\rangle_{\nu-1}]/2\right\}$$

при $m \in \mathbb{N}$. Например,

$$\begin{aligned} L_{h,r,1}(f) &= \sum_{l=0}^{[(r-1)/2]} \gamma_{2l} h^{2l-1} \delta_h^1(f^{(2l-1)}), \\ L_{h,r,m}(f) &= \sum_{l\in\Lambda_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} \gamma_{2l_j}\right) h^{\langle 2l\rangle} S_{h,m}^{(\langle 2l\rangle)}(f), \\ R_{h,r,\nu}(f) &= \sum_{l\in\Lambda_{r,\nu}} \left(\prod_{j=1}^{\nu} \gamma_{2l_j}\right) h^{\langle 2l\rangle} R_{h,r+\nu-\langle 2l\rangle,0}\left(S_{h,\nu}^{(\langle 2l\rangle)}(f)\right) \\ &= h^r \int_{-1/2}^{1/2} \delta_h^{\nu}(f^{(r)}, \cdot - th) \sum_{l\in\Lambda_{r,\nu}} \left(\prod_{j=1}^{\nu} \gamma_{2l_j}\right) \frac{1}{(r+\nu-\langle 2l\rangle)!} \end{aligned}$$

$$\times\left(B_{r+\nu-\langle 2l\rangle}\left(\frac{1}{2}\right)-B_{r+\nu-\langle 2l\rangle}(t)\right)\,dt.$$

В дальнейшем мы ограничимся лишь одним типом записи.

Перейдем к оценке остатков в итерированной формуле Эйлера–Маклорена. Положим

$$A_{r,0}=\frac{2}{r!}\int_0^{1/2}\left|B_r(t)-B_r\left(\frac{1}{2}\right)\right|\,dt,\qquad A_{r,m}=\sum_{k=0}^{r-1}|\gamma_k|A_{r+1-k,m-1}.$$

По общим формулам

$$A_{r,m}=\sum_{k\in K_{r,m}}\left(\prod_{j=1}^{m}|\gamma_{k_j}|\right)A_{r+m-\langle k\rangle,0}.$$

Поскольку функция $B_r(\,\cdot\,)-B_r\left(\frac{1}{2}\right)$ сохраняет знак на $(0,1/2)$, имеем

$$\begin{aligned}A_{r,0}&=\frac{2}{r!}\left|\int_0^{1/2}\left(B_r(t)-B_r\left(\frac{1}{2}\right)\right)\,dt\right|\\&=\frac{2}{r!}\left|\frac{B_{r+1}(\frac{1}{2})-B_{r+1}(0)}{r+1}-\frac{1}{2}B_r\left(\frac{1}{2}\right)\right|\\&=\begin{cases}\frac{\left|B_r\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{r!}, & r\ \text{четно},\\ \frac{2\left|B_{r+1}(\frac{1}{2})-B_{r+1}(0)\right|}{(r+1)!}, & r\ \text{нечетно}.\end{cases}\end{aligned}$$

Лемма 3. *Пусть* $(\mathfrak{M},P)\in\mathcal{B}$, $r,m\in\mathbb{N}$, $h>0$, $f\in W_{1,\mathrm{loc}}^{(r)}(\mathbb{R})$, $f^{(r)}\in\mathfrak{M}$. *Тогда* $f-L_{h,r,m}(f)\in\mathfrak{M}$ *и*

$$P(f-L_{h,r,m}(f))\leqslant h^r\sum_{\nu=0}^{m-1}A_{r,\nu}P\left(\delta_h^\nu(f^{(r)})\right).$$

Если, кроме того, r *нечетно, то*

$$P(f-L_{h,r,m}(f))\leqslant h^r\left\{\frac{A_{r,0}}{2}\,\omega_1(f^{(r)},h)_P+\sum_{\nu=1}^{m-1}A_{r,\nu}P\left(\delta_h^\nu(f^{(r)})\right)\right\}.$$

Доказательство. Включение следует из представления разности $f-L_{h,r,m}(f)$ в виде свертки $f^{(r)}$ с суммируемой функцией [11]. Из равенств (5) и (6) видно, что

$$P(R_{h,r,0}(f))\leqslant h^rA_{r,0}P(f^{(r)}),\tag{8}$$

а если, кроме того, r нечетно, то

$$P(R_{h,r,0}(f)) \leqslant h^r \frac{A_{r,0}}{2} \, \omega_1(f^{(r)}, h)_P.$$

Из соотношений (7), (8) и определения чисел $A_{r,\nu}$ получаем

$$P(R_{h,r,\nu}(f)) \leqslant h^r A_{r,\nu} P\left(\delta_h^\nu(f^{(r)})\right).$$

Суммирование по ν завершает доказательство. □

Лемма 4 ([6, лемма IV.3.1] и [12]). *Пусть* $r, m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$2^m \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^m |\gamma_{k_j}|\right) \frac{\mathcal{K}_{r+m-\langle k\rangle}}{\pi^{r+m-\langle k\rangle}} = \frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} - \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu A_{r,\nu}.$$

Замечание 4. Из леммы 4 следует, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu A_{r,\nu} \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r}.$$

§3. Общая схема построения линейных операторов на основе итераций формулы Эйлера–Маклорена

Пусть $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$ и заданы операторы $Q_\nu : \mathfrak{M}^{(\nu)} \to \mathfrak{M}$, положим

$$M_\nu = \sup_{f \in \mathfrak{M}^{(\nu)}} \frac{P(f - Q_\nu(f))}{P(f^{(\nu)})}.$$

Для $f \in \mathfrak{M}^{(r)}$ положим

$$U_{h,r,m}(f) = \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^m \gamma_{k_j}\right) h^{\langle k\rangle} Q_{r+m-\langle k\rangle}\left(S_{h,m}^{(\langle k\rangle)}(f)\right).$$

Проверим, что это определение корректно. Если $f \in \mathfrak{M}^{(r)}$, то

$$S_{h,m}^{(r+m)}(f) = \frac{1}{h^m} \delta_h^m(f^{(r)}) \in \mathfrak{M}.$$

Кроме того, поскольку $\mathfrak{M}$ замкнуто относительно операции свертки с суммируемым ядром [11], имеем $S_{h,m}(f) \in \mathfrak{M}$, откуда $S_{h,m}(f) \in \mathfrak{M}^{(r+m)}$. Воспользуемся теоремой типа Колмогорова: если $q - 1 \in \mathbb{N}$,

$g \in \mathfrak{M}^{(q)}$, то $g^{(l)} \in \mathfrak{M}$ при всех натуральных $l < q$. Это утверждение хорошо известно для $\mathfrak{M} = L_p(\mathbb{R})$; в общем виде оно вытекает из представления

$$g^{(l)}(x) = \int_{\mathbb{R}} g^{(q)}(x-t)G(t)\,dt + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j g(x-x_j),$$

в котором $G \in L_1(\mathbb{R})$, $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j| < +\infty$, $x_j \in \mathbb{R}$ (см., например, [16, формула Д.7.13]). Отсюда $S_{h,m}^{(\langle k\rangle)}(f) \in \mathfrak{M}$ при всех $k \in K_{r,m}$ (напомним, что $0 \leqslant \langle k\rangle \leqslant r+m-2$ при таких k). Следовательно, $S_{h,m}^{(\langle k\rangle)}(f) \in \mathfrak{M}^{(r+m-\langle k\rangle)}$ и значения $Q_{r+m-\langle k\rangle}\left(S_{h,m}^{(\langle k\rangle)}(f)\right)$ определены.

Лемма 5. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in \mathfrak{M}^{(r)}$. *Тогда*

$$P(L_{h,r,m}(f) - U_{h,r,m}(f)) \leqslant \left\{ \sum_{k\in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}|\right) h^{\langle k\rangle - m} M_{r+m-\langle k\rangle} \right\} P\left(\delta_h^m(f^{(r)})\right).$$

Доказательство. Из определения операторов $L_{h,r,m}$ и $U_{h,r,m}$ следует, что

$$L_{h,r,m}(f) - U_{h,r,m}(f) = \sum_{k\in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} \gamma_{k_j}\right) h^{\langle k\rangle} \left(S_{h,m}^{(\langle k\rangle)}(f) - Q_{r+m-\langle k\rangle}\left(S_{h,m}^{(\langle k\rangle)}(f)\right)\right).$$

Осталось применить неравенства

$$P(g - Q_{r+m-\langle k\rangle}(g)) \leqslant M_{r+m-\langle k\rangle} P(g^{(r+m-\langle k\rangle)})$$

к функции $g = S_{h,m}^{(\langle k\rangle)}(f)$ и воспользоваться равенством

$$g^{(r+m-\langle k\rangle)} = \frac{1}{h^m} \delta_h^m (f^{(r)}). \qquad \square$$

Замечание 5. Если значения операторов Q_ν принадлежат некоторому линейному множеству (тригонометрических полиномов, сплайнов и т.п.), то и значения оператора $U_{h,r,m}$ принадлежат тому же множеству.

Замечание 6. В этом параграфе утверждения формулируются для пространств класса $\mathcal{B}$. Стандартным образом (например, с помощью приближения средними Фейера) оценки переносятся на более широкие классы функций; в частности, на пространства L_p периодических функций и на пространство $L_\infty(\mathbb{R})$. Так, в §4 утверждения формулируются для пространств $L_p(\mathbb{R})$ и при $p = +\infty$ без дополнительных пояснений.

Теорема 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in \mathfrak{M}^{(r)}$. *Тогда*

$$P(f - U_{h,r,m}(f)) \leqslant h^r \sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu} P(\delta_h^\nu(f^{(r)})) + \left\{ \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}| \right) h^{\langle k \rangle - m} M_{r+m-\langle k \rangle} \right\} P\left(\delta_h^m(f^{(r)})\right),$$

$$P(f - U_{h,r,m}(f)) \leqslant h^r \sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu} \omega_\nu(f^{(r)}, h)_P + \left\{ \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}| \right) h^{\langle k \rangle - m} M_{r+m-\langle k \rangle} \right\} \omega_m(f^{(r)}, h)_P.$$

Если, кроме того, r нечетно, то

$$P(f - U_{h,r,m}(f)) \leqslant h^r \left\{ \frac{A_{r,0}}{2} \omega_1(f^{(r)}, h)_P + \sum_{\nu=1}^{m-1} A_{r,\nu} P\left(\delta_h^\nu(f^{(r)})\right) \right\} + \left\{ \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}| \right) h^{\langle k \rangle - m} M_{r+m-\langle k \rangle} \right\} P\left(\delta_h^m(f^{(r)})\right),$$

$$P(f - U_{h,r,m}(f)) \leqslant h^r \left\{ \frac{A_{r,0}}{2} \omega_1(f^{(r)}, h)_P + \sum_{\nu=1}^{m-1} A_{r,\nu} \omega_\nu(f^{(r)}, h)_P \right\} + \left\{ \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}| \right) h^{\langle k \rangle - m} M_{r+m-\langle k \rangle} \right\} \omega_m(f^{(r)}, h)_P.$$

Для *доказательства* теоремы 1 надо сопоставить леммы 3 и 5.

В приложениях важны случаи, когда $M_\nu = \frac{\mathcal{K}_\nu}{\sigma^\nu}$ $(\sigma > 0)$. Сформулируем теорему 1 в этой ситуации.

Теорема 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m \in \mathbb{N}$, $\sigma, h > 0$, $M_\nu = \frac{\mathcal{K}_\nu}{\sigma^\nu}$, $f \in \mathfrak{M}^{(r)}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} P(f - U_{h,r,m}(f)) &\leqslant h^r \sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu} P\left(\delta_h^\nu(f^{(r)})\right) \\ &\quad + h^r \left\{ \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^m |\gamma_{k_j}| \right) \frac{\mathcal{K}_{r+m-\langle k \rangle}}{(\sigma h)^{r+m-\langle k \rangle}} \right\} P\left(\delta_h^m(f^{(r)})\right), \\ P(f - U_{h,r,m}(f)) &\leqslant h^r \sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu} \omega_\nu(f^{(r)}, h)_P \\ &\quad + h^r \left\{ \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^m |\gamma_{k_j}| \right) \frac{\mathcal{K}_{r+m-\langle k \rangle}}{(\sigma h)^{r+m-\langle k \rangle}} \right\} \omega_m(f^{(r)}, h)_P. \end{aligned}$$

Если, кроме того, r *нечетно, то*

$$\begin{aligned} P(f - U_{h,r,m}(f)) &\leqslant h^r \left\{ \frac{A_{r,0}}{2} \omega_1(f^{(r)}, h)_P + \sum_{\nu=1}^{m-1} A_{r,\nu} P\left(\delta_h^\nu(f^{(r)})\right) \right\} \\ &\quad + h^r \left\{ \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^m |\gamma_{k_j}| \right) \frac{\mathcal{K}_{r+m-\langle k \rangle}}{(\sigma h)^{r+m-\langle k \rangle}} \right\} P\left(\delta_h^m(f^{(r)})\right), \\ P(f - U_{h,r,m}(f)) &\leqslant h^r \left\{ \frac{A_{r,0}}{2} \omega_1(f^{(r)}, h)_P + \sum_{\nu=1}^{m-1} A_{r,\nu} \omega_\nu(f^{(r)}, h)_P \right\} \\ &\quad + h^r \left\{ \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^m |\gamma_{k_j}| \right) \frac{\mathcal{K}_{r+m-\langle k \rangle}}{(\sigma h)^{r+m-\langle k \rangle}} \right\} \omega_m(f^{(r)}, h)_P. \end{aligned}$$

Следствие 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $M_\nu = \frac{\mathcal{K}_\nu}{\sigma^\nu}$, $f \in \mathfrak{M}^{(r)}$. *Тогда*

$$P\left(f - U_{\frac{\pi}{\sigma},r,m}(f)\right) \leqslant \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu} P\left(\delta^{\nu}_{\frac{\pi}{\sigma}}(f^{(r)})\right) + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left(\frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} - \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu A_{r,\nu}\right) 2^{-m} P\left(\delta^{m}_{\frac{\pi}{\sigma}}(f^{(r)})\right),$$

$$P\left(f - U_{\frac{\pi}{\sigma},r,m}(f)\right) \leqslant \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu} \omega_\nu \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left(\frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} - \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu A_{r,\nu}\right) 2^{-m} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P.$$

Если, кроме того, r нечетно, то

$$P\left(f - U_{\frac{\pi}{\sigma},r,m}(f)\right) \leqslant \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left\{\frac{A_{r,0}}{2}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P + \sum_{\nu=1}^{m-1} A_{r,\nu} P\left(\delta^{\nu}_{\frac{\pi}{\sigma}}(f^{(r)})\right)\right\} + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left(\frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} - \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu A_{r,\nu}\right) 2^{-m} P\left(\delta^{m}_{\frac{\pi}{\sigma}}(f^{(r)})\right),$$

$$P\left(f - U_{\frac{\pi}{\sigma},r,m}(f)\right) \leqslant \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left\{\frac{A_{r,0}}{2}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P + \sum_{\nu=1}^{m-1} A_{r,\nu} \omega_\nu\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P\right\} + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left(\frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} - \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu A_{r,\nu}\right) 2^{-m} \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P.$$

Для *доказательства* следствия 1 надо положить $h = \frac{\pi}{\sigma}$ в теореме 2 и упростить константу с помощью леммы 4.

Пусть $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $h > 0$. Положим

$$\eta_m(f, h)_P = 2^{-m} P(\delta_h^m(f)), \qquad \zeta_m(f, h)_P = 2^{-m}\omega_m(f, h)_P.$$

Ввиду неравенств

$$P(\delta_h^m(f)) \leqslant 2P(\delta_h^{m-1}(f)), \qquad \omega_m(f^{(r)}, h)_P \leqslant 2\omega_{m-1}(f, h)_P$$

последовательности $\{\eta_m(f,h)_P\}_{m=0}^{\infty}$ и $\{\zeta_m(f,h)_P\}_{m=0}^{\infty}$ убывают. Поэтому существуют конечные пределы

$$\eta_\infty(f,h)_P = \lim_{m\to\infty} \eta_m(f,h)_P, \qquad \zeta_\infty(f,h)_P = \lim_{m\to\infty} \zeta_m(f,h)_P.$$

Замечание 7. Записав правые части неравенств в следствии 1 с помощью величин η_ν и ζ_ν, легко убедиться, что они убывают по m. Поэтому если для отклонения какого-либо оператора имеются оценки типа следствия 1 при различных m, то эти оценки будут тем точнее, чем больше m. Если же оценки справедливы при всех $m \in \mathbb{N}$, то наиболее точной будет оценка через предел правой части при $m \to \infty$.

Замечание 8. Операторы $U_{h,r,m}$, вообще говоря, различны при различных m. Но в некоторых важных случаях, как мы увидим далее, они совпадают при всех или при некоторых m; тогда применимо предыдущее замечание.

Лемма 6. *Пусть $h > 0$, $\mu - 1 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и*

$$U_{h,r,1} = Q_r$$

при всех $r \in \mathbb{N}$, таких что $r + 1 \leqslant \mu$. Тогда

$$U_{h,r,m} = Q_r$$

при всех $r, m \in \mathbb{N}$, таких что $r + m \leqslant \mu$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по m. База индукции (случай $m = 1$) содержится в условии леммы. Сделаем индукционный переход. Пусть $q - 1 \in \mathbb{N}$, $r + q \leqslant \mu$ и лемма верна для всех $m \leqslant q - 1$; докажем, что лемма верна и для $m = q$. Применяя индукционное предположение один раз для $m = 1$ и другой раз для $m = q-1$, находим

$$\begin{aligned} U_{h,r,q} = \sum_{k\in K_{r,q}} \left(\prod_{j=1}^{q} \gamma_{k_j}\right) h^{\langle k\rangle_q} Q_{r+q-\langle k\rangle_q} S_{h,q}^{(\langle k\rangle_q)} \\ = \sum_{k\in K_{r,q-1}} \left(\prod_{j=1}^{q-1} \gamma_{k_j}\right) h^{\langle k\rangle_{q-1}} \\ \times \sum_{k_q=0}^{r+q-2-\langle k\rangle_{q-1}} \gamma_{k_q} h^{k_q} Q_{r+q-\langle k\rangle_{q-1}-k_q} S_{h,1}^{(k_q)} S_{h,q-1}^{(\langle k\rangle_{q-1})} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k\in K_{r,q-1}} \left(\prod_{j=1}^{q-1} \gamma_{k_j}\right) h^{\langle k\rangle_{q-1}} U_{h,r+q-1-\langle k\rangle_{q-1},1} S_{h,q-1}^{(\langle k\rangle_{q-1})}$$

$$= \sum_{k\in K_{r,q-1}} \left(\prod_{j=1}^{q-1} \gamma_{k_j}\right) h^{\langle k\rangle_{q-1}} Q_{r+q-1-\langle k\rangle_{q-1}} S_{h,q-1}^{(\langle k\rangle_{q-1})} = U_{h,r,q-1} = Q_r.$$

Мы учли, что

$$(r+q-1-\langle k\rangle_{q-1})+1 = r+q-\langle k\rangle_{q-1} \leqslant r+q \leqslant \mu. \qquad \square$$

Следствие 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $M_\nu = \frac{\mathcal{K}_\nu}{\sigma^\nu}$, $f \in \mathfrak{M}^{(r)}$. *Тогда*

$$P\left(f - U_{\frac{\pi}{\sigma},r,m}(f)\right) \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} P(f^{(r)}).$$

Если, кроме того, r нечетно, то

$$P\left(f - U_{\frac{\pi}{\sigma},r,m}(f)\right) \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2\sigma^r}\, \omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_P.$$

Для *доказательства* следствия 2 надо применить следствие 1 и заменить в правой части m на 1, что можно сделать в силу ее убывания по m.

Замечание 9. Первое утверждение следствия 2 может быть пересказано так: если величины M_ν для исходных операторов Q_ν не превосходили $\frac{\mathcal{K}_\nu}{\sigma^\nu}$, то и для построенного на их основе оператора $U_{\frac{\pi}{\sigma},r,m}$ величина M_r не превосходит $\frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}$. Для ряда важных классов операторов константа $\frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}$ является наилучшей на этих классах. Для таких случаев мы получили способ построения новых, в некотором смысле оптимальных, операторов на основе уже имеющихся. При этом для нечетных r построенные операторы (в отличие, быть может, от исходных) реализуют точную постоянную не только в неравенстве типа Ахиезера–Крейна–Фавара, но и в неравенстве типа Джексона.

§4. Применение общей схемы к приближению сплайнами

Пусть $\sigma > 0$. Положим

$$\varepsilon_r = \begin{cases} 0, & r \text{ нечетно}, \\ \frac{\pi}{2\sigma}, & r \text{ четно}. \end{cases}$$

Пусть еще $p \in [1, +\infty]$, $\nu, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant \nu$, $Q_\nu = \mathcal{X}_{\sigma,\nu,\mu}$ – построенный в [14] аналог оператора Ахиезера–Крейна–Фавара для сплайнов. На функциях из $W_{1,\mathrm{loc}}^{(\nu)}(\mathbb{R})$, таких что $f^{(\nu)} \in L_p(\mathbb{R})$, оператор $\mathcal{X}_{\sigma,\nu,\mu}$ задается формулой

$$\mathcal{X}_{\sigma,\nu,\mu}(f, x) = f(x) - \int_{\mathbb{R}} f^{(\nu)}(t) F_{\sigma,\nu,\mu}(x, t)\, dt,$$

где

$$F_{\sigma,\nu,\mu}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h_{\sigma,\nu,\mu}(z, t) e^{i(x-t)z}\, dz,$$

$$h_{\sigma,\nu,\mu}(z, t) = \lambda_\nu(z) - \tau_\mu(z) \frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} \lambda_\nu(2\sigma s + z) e^{i2s\sigma\varepsilon_\nu}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} \tau_\mu(2\sigma q + z) e^{i2q\sigma(t+\varepsilon_\nu)}},$$

$$\lambda_\nu(z) = \frac{1}{(iz)^\nu}, \qquad \tau_\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{\sigma}z} - 1}{i\frac{\pi}{\sigma}z} \right)^{\mu+1}.$$

Для операторов $\mathcal{X}_{\sigma,\nu,\mu}$ справедливы соотношения

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,\nu,\mu}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_\nu}{\sigma^\nu} \|f^{(\nu)}\|_p, \tag{9}$$

константу в которых при $p = 1, +\infty$ нельзя уменьшить, даже если заменить левую часть на $E(f, \mathbf{S}_{\sigma,\mu})_p$ и (при $p = +\infty$) ограничиться $\frac{2\pi}{\sigma}$-периодическими функциями [17, глава 5].

Пусть $\sigma, h > 0$, $r, m, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant r + m$, $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. Положим

$$U_{\sigma,h,r,\mu,m}(f) = \sum_{k\in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} \gamma_{k_j} \right) h^{\langle k\rangle} \mathcal{X}_{\sigma,r+m-\langle k\rangle,\mu} \left(S_{h,m}^{(\langle k\rangle)}(f) \right) \tag{10}$$

(поскольку $\mu \geqslant r + m$, все операторы $\mathcal{X}_{\sigma,r+m-\langle k\rangle,\mu}$, действительно, уже определены).

Лемма 7. *Пусть $\sigma > 0$, $r, \mu, m \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant r + m$. Тогда*

$$U_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},r,\mu,m} = \mathcal{X}_{\sigma,r,\mu}.$$

Доказательство. При $m = 1$ это тождество доказано в [15], а на значения $m > 1$ распространяется по лемме 6. □

При нечетном r построенные операторы $U_{\sigma,h,r,\mu,1}$ позволяют доказать для приближения сплайнами неравенство Джексона с точной постоянной, если $\mu \geqslant r+1$. Для доказательства неравенства Джексона при $\mu = r$ требуются операторы, реализующие неравенство типа Ахиезера–Крейна–Фавара (9) при $\mu = \nu - 1$. Эту задачу решают интерполяционные операторы. Пусть $\gamma \geqslant 0$, функция f задана на $\mathbb{R}$ и $f(x) = O(|x|^\gamma)$ при $x \to \infty$. Обозначим через $\xi_{\sigma,\mu}(f)$ сплайн из $\mathbf{S}_{\sigma,\mu}$, интерполирующий f в точках $\frac{k\pi}{\sigma} + \varepsilon_\mu$ и такой, что $\xi_{\sigma,\mu}(f,x) = O(|x|^\gamma)$ при $x \to \infty$. Такой сплайн существует и единствен. Известно, что

$$\|f - \xi_{\sigma,\nu-1}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_\nu}{\sigma^\nu}\|f^{(\nu)}\|_p, \tag{11}$$

причем константу в соотношении (11) при $p = 1, +\infty$ нельзя уменьшить, даже если заменить левую часть на $E(f, \mathbf{S}_{\sigma,\nu-1})_p$. Исторические комментарии к неравенству (11) см. в [14].

Будем понимать под $\mathcal{X}_{\sigma,\nu,\nu-1}$ интерполяционный оператор:

$$\mathcal{X}_{\sigma,\nu,\nu-1} = \xi_{\sigma,\nu-1}.$$

Теперь определим оператор $U_{\sigma,h,r,\mu,m}$ формулой (10) и при $\mu = r + m - 1$ (в этом определении в слагаемом с индексом $k = \mathbb{O}_m$ участвует интерполяционный оператор).

Сформулируем теорему 2 применительно к операторам $U_{\sigma,h,r,\mu,m}$.

Теорема 3. *Пусть* $\sigma, h > 0$, $r, \mu, m \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant r + m - 1$, $p \in [1, +\infty]$, $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
\|f - U_{\sigma,h,r,\mu,m}(f)\|_p &\leqslant h^r \sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu} \left\|\delta_h^\nu(f^{(r)})\right\|_p \\
&+ h^r \left\{ \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}| \right) \frac{\mathcal{K}_{r+m-\langle k \rangle}}{(\sigma h)^{r+m-\langle k \rangle}} \right\} \left\|\delta_h^m(f^{(r)})\right\|_p, \\
\|f - U_{\sigma,h,r,\mu,m}(f)\|_p &\leqslant h^r \sum_{\nu=0}^{m-1} A_{r,\nu}\omega_\nu(f^{(r)}, h)_p \\
&+ h^r \left\{ \sum_{k \in K_{r,m}} \left(\prod_{j=1}^{m} |\gamma_{k_j}| \right) \frac{\mathcal{K}_{r+m-\langle k \rangle}}{(\sigma h)^{r+m-\langle k \rangle}} \right\} \omega_m(f^{(r)}, h)_p.
\end{aligned}$$

Если, кроме того, r нечетно, то

$$\|f-U_{\sigma,h,r,\mu,m}(f)\|_p \leqslant h^r\left\{\frac{A_{r,0}}{2}\,\omega_1(f^{(r)},h)_p+\sum_{\nu=1}^{m-1}A_{r,\nu}\left\|\delta_h^{\nu}(f^{(r)})\right\|_p\right\}$$

$$+h^r\left\{\sum_{k\in K_{r,m}}\left(\prod_{j=1}^{m}|\gamma_{k_j}|\right)\frac{\mathcal{K}_{r+m-\langle k\rangle}}{(\sigma h)^{r+m-\langle k\rangle}}\right\}\left\|\delta_h^{m}(f^{(r)})\right\|_p,$$

$$\|f-U_{\sigma,h,r,\mu,m}(f)\|_p \leqslant h^r\left\{\frac{A_{r,0}}{2}\,\omega_1(f^{(r)},h)_p+\sum_{\nu=1}^{m-1}A_{r,\nu}\omega_\nu(f^{(r)},h)_p\right\}$$

$$+h^r\left\{\sum_{k\in K_{r,m}}\left(\prod_{j=1}^{m}|\gamma_{k_j}|\right)\frac{\mathcal{K}_{r+m-\langle k\rangle}}{(\sigma h)^{r+m-\langle k\rangle}}\right\}\omega_m(f^{(r)},h)_p.$$

Следствие 3. *Пусть $\sigma>0$, $r,\mu\in\mathbb{N}$, r нечетно, $\mu\geqslant r+1$, $p\in[1,+\infty]$, $f\in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\|f-\mathcal{X}_{\sigma,r,\mu}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2\sigma^r}\,\omega_1\left(f^{(r)},\frac{\pi}{\sigma}\right)_p,$$

причем при $p=1,+\infty$ константа не может быть уменьшена, даже если заменить левую часть на $E(f,\mathbf{S}_{\sigma,\mu})_p$ и (при $p=+\infty$) ограничиться $\frac{2\pi}{\sigma}$-периодическими функциями.

Неравенство следствия 3 вытекает из леммы 6 и следствия 2, а его точность – из точности неравенства (9).

Следствие 4. *Пусть $\sigma>0$, $r,m\in\mathbb{N}$, $p\in[1,+\infty]$, $f\in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\left\|f-U_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},r,r+m-1,m}(f)\right\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}\|f^{(r)}\|_p.$$

Если, кроме того, r нечетно, то

$$\left\|f-U_{\sigma,\frac{\pi}{\sigma},r,r+m-1,m}(f)\right\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2\sigma^r}\,\omega_1\left(f^{(r)},\frac{\pi}{\sigma}\right)_p,$$

причем при $p=1,+\infty$ константы не могут быть уменьшены, даже если заменить левую часть на $E(f,\mathbf{S}_{\sigma,r+m-1})_p$ и (при $p=+\infty$) ограничиться $\frac{2\pi}{\sigma}$-периодическими функциями.

Следствие 5. *Пусть* $\sigma, h > 0$, $r, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant r$, r *нечетно,* $p \in [1, +\infty]$, $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\|f - U_{\sigma,h,r,\mu,1}(f)\|_p \leqslant h^r \left\{ \frac{A_{r,0}}{2}\,\omega_1(f^{(r)}, h)_p + \sum_{k=0}^{r-1} |\gamma_k| \frac{\mathcal{K}_{r+1-k}}{(\sigma h)^{r+1-k}} \left\| \delta_h^1(f^{(r)}) \right\|_p \right\},$$

$$\|f - U_{\sigma,h,r,\mu,1}(f)\|_p \leqslant h^r \left\{ \frac{A_{r,0}}{2} + \sum_{k=0}^{r-1} |\gamma_k| \frac{\mathcal{K}_{r+1-k}}{(\sigma h)^{r+1-k}} \right\} \omega_1(f^{(r)}, h)_p.$$

Если $p = +\infty$, $h = \frac{\pi}{\alpha\sigma}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ *нечетно, то константы не могут быть уменьшены, даже если заменить левую часть на* $E(f, \mathbf{S}_{\sigma,\mu})_\infty$ *и ограничиться* $\frac{2\pi}{\sigma}$*-периодическими функциями.*

Неравенства следствия 5 получаются, если положить $m = 1$ в теореме 3. Их точность доказана в [12].

Следствия 3–5 установлены в [15].

Согласно замечанию 7 правые части неравенств теоремы 3 при $h = \frac{\pi}{\sigma}$ убывают по m. Поэтому наилучшую оценку для операторов $\mathcal{X}_{\sigma,r,\mu}$ дает выбор $m = \mu - r$. Отметим еще, что для полиномиальных операторов Ахиезера–Крейна–Фавара утверждение, аналогичное лемме 7, справедливо при всех $m \in \mathbb{N}$, без ограничения сверху. Поэтому для них наилучшая оценка в теореме 3 получается при стремлении m к ∞ [11, 12].

Следствие 6. *Пусть* $\sigma > 0$, $r, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant r + 1$, $p \in [1, +\infty]$, $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,\mu}(f)\|_p \leqslant \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \sum_{\nu=0}^{\mu-r-1} 2^\nu A_{r,\nu} \eta_\nu \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_p + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left(\frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} - \sum_{\nu=0}^{\mu-r-1} 2^\nu A_{r,\nu}\right) \eta_{\mu-r} \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_p,$$

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,\mu}(f)\|_p \leqslant \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \sum_{\nu=0}^{\mu-r-1} 2^\nu A_{r,\nu} \zeta_\nu \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_p + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left(\frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} - \sum_{\nu=0}^{\mu-r-1} 2^\nu A_{r,\nu}\right) \zeta_{\mu-r} \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_p.$$

Если, кроме того, r нечетно, то

$$\|f-\mathcal{X}_{\sigma,r,\mu}(f)\|_p \leqslant \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left\{A_{r,0}\zeta_1\left(f^{(r)},\frac{\pi}{\sigma}\right)_p + \sum_{\nu=1}^{\mu-r-1} 2^\nu A_{r,\nu}\eta_\nu\left(f^{(r)},\frac{\pi}{\sigma}\right)_p\right\} + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left(\frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} - \sum_{\nu=0}^{\mu-r-1} 2^\nu A_{r,\nu}\right)\eta_{\mu-r}\left(f^{(r)},\frac{\pi}{\sigma}\right)_p,$$

$$\|f-\mathcal{X}_{\sigma,r,\mu}(f)\|_p \leqslant \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left\{A_{r,0}\zeta_1\left(f^{(r)},\frac{\pi}{\sigma}\right)_p + \sum_{\nu=1}^{\mu-r-1} 2^\nu A_{r,\nu}\zeta_\nu\left(f^{(r)},\frac{\pi}{\sigma}\right)_p\right\} + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left(\frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} - \sum_{\nu=0}^{\mu-r-1} 2^\nu A_{r,\nu}\right)\zeta_{\mu-r}\left(f^{(r)},\frac{\pi}{\sigma}\right)_p.$$

Замечание 10. Согласно следствиям 3 и 4, мы снова построили линейные операторы со значениями в пространстве сплайнов $\mathbf{S}_{\sigma,\mu}$ ($\mu \geqslant r$), реализующие точную постоянную в неравенстве (9). В свою очередь, при $\mu = r$, используя эти операторы в качестве исходных операторов Q_ν, с помощью схемы § 3 можно построить новые операторы, обладающие тем же свойством. Этот процесс можно продолжать неограниченно. Лемма 7 показывает, что при $\mu > r$ первый шаг схемы не приводит к новым операторам.

Литература

1. J. Favard, *Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynomes trigonométriques.* — Bull. de Sci. Math. **61** (1937), 209–224, 243–256.
2. Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, *О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций.* — Доклады АН СССР **15**, No. 3 (1937), 107–112.
3. В. В. Жук, *О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности.* — Сибирский математический журнал **12**, No. 6 (1971), 1283–1297.
4. А. А. Лигун, *О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций.* — Математические заметки **14**, No. 1 (1973), 21–30.
5. В. В. Жук, *К вопросу о постоянных в прямых теоремах теории аппроксимации для дифференцируемых функций.* — Вестник Ленингр. ун-та Вып. 4, No. 19 (1976), 51–57.
6. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций*, Л.: Изд. ЛГУ, 1982.

7. М. Г. Крейн, *О наилучшей аппроксимации непрерывных дифференцируемых функций на всей вещественной оси.* — Доклады АН СССР **18**, No. 9 (1938) 619–623.
8. А. Ю. Громов, *О точных константах приближений целыми функциями дифференцируемых функций.* — В сб. *Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям*, Вып.7, сс. 17–21, Днепропетровск, 1976.
9. Н. И. Мерлина, *Некоторые точные оценки для полунорм и наилучших приближений целыми функциями.* — Деп.1257-79, 10 апреля 1979.
10. Н. И. Мерлина, *К вопросу о точных оценках для полунорм и наилучших приближений целыми функциями.* — В сб. *Теория функций комплексного переменного и краевые задачи*, Чебоксары, 1979, 20–26.
11. О. Л. Виноградов, *Точные неравенства типа Джексона для приближений классов сверток целыми функциями конечной степени.* — Алгебра и анализ **17**, No. 4 (2005), 56–111.
12. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Точные оценки отклонений линейных методов приближения периодических функций посредством линейных комбинаций модулей непрерывности различных порядков.* — Проблемы математического анализа. Вып. 25 (2003), 57–98.
13. О. Л. Виноградов, *Аналог сумм Ахиезера–Крейна–Фавара для периодических сплайнов минимального дефекта.* — Проблемы математического анализа. Вып. 25 (2003), 29–56.
14. О. Л. Виноградов, А. В. Гладкая, *Непериодический сплайновый аналог операторов Ахиезера–Крейна–Фавара.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 8–35.
15. A. V. Gladkaya, O. L. Vinogradov, *Sharp Jackson type inequalities for spline approximation on the axis.* — Analysis Mathematica **43**, No. 1 (2017), 27–47.
16. В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наукова думка, Киев, 2003.
17. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987.

Vinogradov O. L., Gladkaya A. V. Sharp estimates of linear approximations by nonperiodic splines in terms of linear combinations of moduli of continuity.

Suppose that $\sigma > 0$, $r, \mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geqslant r+1$, r is odd, $p \in [1, +\infty]$, $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. We construct linear operators $\mathcal{X}_{\sigma,r,\mu}$ whose values are splines of degree μ and of minimal defect with knots $\frac{k\pi}{\sigma}$ ($k \in \mathbb{Z}$) such that

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,\mu}(f)\|_p \leqslant \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left\{ \frac{A_{r,0}}{2}\,\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_p + \sum_{\nu=1}^{\mu-r-1} A_{r,\nu}\omega_\nu\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_p \right\}$$

$$+\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^r \left(\frac{\mathcal{K}_r}{\pi^r} - \sum_{\nu=0}^{\mu-r-1} 2^\nu A_{r,\nu}\right) 2^{r-\mu} \omega_{\mu-r}\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_p,$$

where for $p = 1, \ldots, +\infty$ the constants cannot be reduced on the class $W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. Here $\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l(r+1)}}{(2l+1)^{r+1}}$ are the Favard constants, the constants $A_{r,\nu}$ are constructed explicitly, ω_ν is a modulus of continuity of order ν. As a corollary, we get the sharp Jackson type inequality

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,\mu}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2\sigma^r}\, \omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_p.$$

С.-Петербургский государственный университет
Россия, 198504, С.-Петербург
Университетский пр., д.28
E-mail: olvin@math.spbu.ru
E-mail: anna.v.gladkaya@gmail.com

Поступило 2 мая 2017 г.