Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 456, 2017 г.

И. Васильев, А. Целищев

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ НОРМЕ В ПРОСТРАНСТВЕ BMO

§1. Введение

В статье С. В. Бочкарева [4] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\{V_n\}$ *– ядра Валле–Пуссена на окружности,* $Q_0 := V_1$, $Q_n := V_{2^n} - V_{2^{n-1}}$ *при* $n \geqslant 1$. *Для вещественной функции* $f \in L^1$ *положим*

$$\|f\|_D := \sup_I \Big(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \sum_{2^{-n}<|I|} \Big(\int f(t)Q_n(x-t)dt\Big)^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Тогда такая норма эквивалентна величине $\|f\|_{\mathrm{BMO}}$.

Позднее это утверждение было использовано С. В. Бочкаревым в различных вопросах, связанных с тригонометрическими рядами – см., например, [5].

Цель нашей работы – доказать обобщение этого неравенства, заменив ядра Валле-Пуссена на более общие функции S_n, на преобразования Фурье которых наложены некоторые условия в духе теоремы Хёрмандера–Михлина о мультипликаторах (формулировку и доказательство которой можно найти, например, в [1]). Кроме того, функции у нас будут заданы на $\mathbb{R}^d$, а не на окружности. Получившийся результат состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть* $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *– набор функций на* $\mathbb{R}^d$, *у которых существуют обобщённые производные до порядка* $d+1$ *и выполняются следующие условия.*

1) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n \equiv 1$.
2) $\operatorname{supp}\psi_n \subset \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{n-1} \leqslant |x| \leqslant 2^{n+1}\}$.
3) $2^{-nd}\int |D^\alpha\psi_n(\xi)|d\xi \leqslant K2^{-n|\alpha|}$ *при* $0 \leqslant |\alpha| \leqslant d+1$.

Ключевые слова: пространство BMO, теорема Хёрмандера–Михлина.
Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант №14-21-00035.

Здесь K – константа, не зависящая от n. Определим оператор Δ_n равенством $\widehat{\Delta_n f} := \psi_n \hat{f}$ и введем норму

$$\|f\|_D := \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2},$$

где супремум берётся по всем кубам Q, а $l(Q)$ – длина ребра Q. Тогда $C_1\|f\|_D \leqslant \|f\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C_2\|f\|_D$ для некоторых положительных констант C_1 и C_2.

Аналогичный результат верен и для окружности вместо $\mathbb{R}^d$ (разумеется, в последнем условии производные надо заменить на конечные разности). Получившаяся теорема для окружности действительно будет являться обобщением теоремы 1 (условия 1–3 для коэффициентов Фурье ядер Q_n легко проверяются).

Отметим, что в работе [3] рассматривается похожий вопрос. Однако, у неё имеются некоторые отличия от нашей работы. Условия в ней накладываются на сами ядра, а не их преобразования Фурье, при этом супремум берётся лишь по диадическим кубам. Кроме того, похожее выражение можно найти в книге [2] на странице 93.

Авторы выражают благодарность своему научному руководителю С. В. Кислякову за постановку задачи и внимание к работе.

§2. Вспомогательные неравенства

В одной из частей доказательства нам понадобятся две оценки, которые мы сформулируем в виде лемм. Мы будем пользоваться знаком “$\lesssim$”, который означает, что левая часть не больше правой, умноженной на некоторую константу.

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$, Q – произвольный куб с длиной ребра не меньше 2^{-n}. Тогда*

$$\int_Q \Big(\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q} \min\{2^{nd}, 2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\}d\xi\Big)^2 dx \lesssim 2^{-n} l(Q)^{d-1}.$$

Доказательство. Обозначим через Q^+ куб с тем же центром, что и Q, и с длиной стороны больше на 2^{-n}. Сперва докажем, что для любого куба Q, такого, что $l(Q) \geqslant 2^{-n}$, верно неравенство:

$$\int\limits_Q \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus Q^+} 2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)} d\xi \Bigg)^2 dx \lesssim 2^{-n} l(Q)^{d-1}. \tag{1}$$

Будем считать, что $Q = [0, l(Q)]^d$. В силу симметрии, достаточно оценить такое же выражение, в котором внутренний интеграл берётся по множеству $\{\xi : \xi_1, \ldots, \xi_k \in [-2^{-n}, l(Q)+2^{-n}], \xi_{k+1}, \ldots, \xi_d \in (-\infty, -2^{-n}]\}$, где $0 \leqslant k \leqslant d-1$ (если $\xi_j > l(Q)+2^{-n}$, то можно сделать замену $\xi_j \mapsto l(Q)-\xi_j$, $x_j \mapsto l(Q)-x_j$). Мы будем заменять выражение $|x-\xi|$ на эквивалентное ему $|x_1-\xi_1|+\ldots+|x_d-\xi_d|$. Тогда, явно сосчитав интеграл, получаем, что

$$\int\limits_{-2^{-n}}^{l(Q)+2^{-n}} (|x_1-\xi_1|+\ldots+|x_d-\xi_d|)^{-(d+1)} d\xi_1 \lesssim (|x_2-\xi_2|+\ldots+|x_d-\xi_d|)^{-d}.$$

После того, как мы проинтегрируем так k раз, останется $(|x_{k+1}-\xi_{k+1}|+\ldots+|x_d-\xi_d|)^{-(d+1-k)}$. Оставшиеся интегралы посчитаем явно:

$$\int\limits_{-\infty}^{-2^{-n}} (|x_{k+1}-\xi_{k+1}|+\ldots+|x_d-\xi_d|)^{-(d+1-k)} d\xi_{k+1} = C(|x_{k+1}+2^{-n}|+\ldots+|x_d-\xi_d|)^{-(d-k)}.$$

Проинтегрировав так $d-k$ раз, получим, с точностью до домножения на константу,

$$\frac{1}{(x_{k+1}+2^{-n})+\ldots+(x_d+2^{-n})}.$$

Таким образом, остаётся оценить

$$2^{-2n} \int\limits_0^{l(Q)} \cdots \int\limits_0^{l(Q)} \frac{dx_1 \ldots dx_d}{((x_{k+1}+2^{-n})+\ldots+(x_d+2^{-n}))^2} = 2^{-2n} l(Q)^k \int\limits_0^{l(Q)} \cdots \int\limits_0^{l(Q)} \frac{dx_{k+1} \ldots dx_d}{((x_{k+1}+2^{-n})+\ldots+(x_d+2^{-n}))^2}$$

$$\leqslant 2^{-2n} l(Q)^k \int_0^{l(Q)} \cdots \int_0^{l(Q)} \frac{dx_{k+2} \dots dx_d}{2^{-n} + (x_{k+2} + 2^{-n}) + \dots + (x_d + 2^{-n})}$$
$$\leqslant 2^{-2n} l(Q)^{d-1} \frac{1}{2^{-n}} = 2^{-n} l(Q)^{d-1}.$$

Стало быть, неравенство (1) доказано. Отметим, что в качестве Q^+ можно было брать любой куб (или параллелепипед), у которого длины сторон по крайней мере на $c2^{-n}$ больше, чем у Q, для некоторого фиксированного $c > 0$. Кроме того, вместо куба Q можно было также брать параллелепипед – тогда в формулировке в качестве $l(Q)$ надо брать наибольшую сторону этого параллелепипеда.

Выведем теперь из (1) утверждение леммы. Рассмотрим набор кубов $\{q_l\}$ с длинами рёбер порядка 2^{-n} (под этим мы подразумеваем, что, скажем, длины рёбер всех q_l лежат в промежутке от $2^{-n}/10$ до $10 \cdot 2^{-n}$), таких, что их центры лежат на гранях Q, они не пересекаются и $Q \setminus \cup q_l$ содержится в Q^- – кубе с тем же центром, что и у Q, и длиной стороны на $c2^{-n}$ меньше (для некоторого $c > 0$). Ясно, что таких кубов в наборе будет порядка $l(Q)^{d-1}/2^{-n(d-1)} = l(Q)^{d-1} 2^{n(d-1)}$. Тогда

$$\int_Q \Big(\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q} \min\{2^{nd}, 2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\} d\xi \Big)^2 dx$$
$$\leqslant \sum_l \int_{q_l \cap Q} \Big(\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q} \min\{2^{nd}, 2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\} d\xi \Big)^2 dx$$
$$+ \int_{Q^-} \Big(\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q} \min\{2^{nd}, 2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\} d\xi \Big)^2 dx.$$

Второе слагаемое тут оценивается с помощью неравенства (1), поэтому надо оценить первое. Для этого достаточно показать, что

$$\int_{q_l \cap Q} \Big(\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q} \min\{2^{nd}, 2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\} d\xi \Big)^2 dx \lesssim 2^{-nd}.$$

Пусть $\{q_r\}_{r \in R_l}$ – кубы, “соседние” с q_l (их не больше, чем $2d-2$) и сам q_l. Тогда разобьём внутренний интеграл на два и напишем, что интересующее нас выражение не превосходит (с точностью до домножения на константу) следующей величины:

$$\int\limits_{q_l\cap Q}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus(Q\bigcup\cup_{r\in R_l}q_r)}\min\{2^{nd},2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\}d\xi\Big)^2dx$$
$$+\int\limits_{q_l\cap Q}\Big(\int\limits_{\cup_{r\in R_l}q_r}\min\{2^{nd},2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\}d\xi\Big)^2dx.$$

Со вторым интегралом всё ясно – вместо подынтегрального минимума напишем 2^{nd}, проинтегрировав это по $\cup q_l$ – множеству, мера которого не больше $C2^{-nd}$, получим константу. Проинтегрировав квадрат этой константы по $q_l\cap Q$ – также множеству меры не больше 2^{-nd}, можно заключить, что второе слагаемое не больше $C2^{-nd}$.

К первому же слагаемому, как нетрудно видеть, можно применить неравенство (1) (для параллелепипеда $q_l\cap Q$ вместо куба Q), и также получить, что оно не превосходит $C2^{-nd}$, так как длина стороны q_l имеет порядок 2^{-n}. Таким образом, лемма доказана. □

Второе утверждение, которое нам понадобится, очень похоже на только что доказанное.

Лемма 2. *Если Q – куб с длиной ребра не меньше, чем 2^{-n}, то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus Q}\Big(\int\limits_{Q}\min\{2^{nd},2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\}d\xi\Big)^2dx\lesssim 2^{-n}l(Q)^{d-1}.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus Q+}\Big(\int\limits_{Q}2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}d\xi\Big)^2dx\lesssim 2^{-n}l(Q)^{d-1}.$$

Это можно равносильно переписать в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus Q+}\Big(\int\limits_{Q}|x-\xi|^{-(d+1)}d\xi\Big)^2dx\lesssim 2^{n}l(Q)^{d-1}. \tag{2}$$

Утверждение леммы отсюда несложно выводится. Действительно, аналогично окончанию доказательства предыдущей леммы, покроем $Q^+\setminus Q$ кубами q_l с длинами рёбер порядка 2^{-n} (количество таких кубов будет порядка $l(Q)^{d-1}2^{n(d-1)}$). Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus Q}\Big(\int\limits_Q \min\{2^{nd},2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\}d\xi\Big)^2 dx$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus Q+}\Big(\int\limits_Q \min\{2^{nd},2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\}d\xi\Big)^2 dx$$

$$+\sum_l\int\limits_{q_l}\Big(\int\limits_Q \min\{2^{nd},2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\}d\xi\Big)^2 dx.$$

Первое слагаемое оценивается по неравенству (2). Каждый интеграл из суммы во втором слагаемом можно оценить согласно предыдущей лемме:

$$\int\limits_{q_l}\Big(\int\limits_Q \min\{2^{nd},2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\}d\xi\Big)^2 dx$$

$$\leqslant\int\limits_{q_l}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus q_l} \min\{2^{nd},2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\}d\xi\Big)^2 dx\lesssim 2^{-nd}.$$

Учитывая, что всего в сумме порядка $l(Q)^{d-1}2^{n(d-1)}$ слагаемых, получаем требуемую оценку.

Итак, осталось доказать неравенство (2). Опять будем считать, что $Q=[0,l(Q)]^d$. Как и в лемме 1, в силу симметрии, достаточно оценить такое выражение, где внешний интеграл берётся по множеству

$$\{x: x_1,\dots,x_k\in[-2^{-n},l(Q)+2^{-n}],x_{k+1},\dots,x_{k+m}\in(-\infty,-l(Q)),$$
$$x_{k+m+1},\dots,x_d\in[-l(Q),-2^{-n}]\},$$

а $k<d$ (здесь, однако, по техническим причинам, мы отдельно друг от друга рассматриваем координаты, большие и меньшие $-l(Q)$). Как и раньше, мы будем заменять $|x-\xi|$ на $|x_1-\xi_1|+\ldots+|x_d-\xi_d|$. Займёмся оценкой внутреннего интеграла. Интеграл

$$\int\limits_0^{l(Q)}(|x_1-\xi_1|+\ldots+|x_d-\xi_d|)^{-(d+1)}d\xi_1$$

можно посчитать явно и заключить, что он не превосходит (разумеется, с точностью до домножения на константу)

$$(|x_2 - \xi_2| + \ldots + |x_d - \xi_d|)^{-d}.$$

Интегрируя так k раз, получаем $(|x_{k+1} - \xi_{k+1}| + \ldots + |x_d - \xi_d|)^{-(d+1-k)}$. Теперь проинтегрируем по ξ_{k+1}. Для краткости вместо $|x_{k+2} - \xi_{k+2}| + \ldots + |x_d - \xi_d|$ будем писать S:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{l(Q)} (|x_{k+1} - \xi_{k+1}| + S)^{-(d+1-k)} d\xi_{k+1} \\
&\asymp \frac{1}{(|x_{k+1}| + S)^{d-k}} - \frac{1}{(|x_{k+1}| + l(Q) + S)^{d-k}} \\
&\leqslant \frac{(|x_{k+1}| + l(Q) + S)^{d-k} - (|x_{k+1}| + S)^{d-k}}{(|x_{k+1}| + S)^{2d-2k}} \\
&\asymp \frac{l(Q)(|x_{k+1}| + S)^{d-k-1} + l(Q)^2(|x_{k+1}| + S)^{d-k-2} + \ldots + l(Q)^{d-k}}{(|x_{k+1}| + S)^{2d-2k}}.
\end{aligned}$$

В числителе каждое слагаемое можно оценить величиной

$$l(Q)^{1/2}(|x_{k+1}| + S)^{d-k-1/2},$$

ведь $|x_{k+1}| \geqslant l(Q)$. Поэтому можно продолжить оценку:

$$\begin{aligned}
&\frac{l(Q)(|x_{k+1}| + S)^{d-k-1} + l(Q)^2(|x_{k+1}| + S)^{d-k-2} + \ldots + l(Q)^{d-k}}{(|x_{k+1}| + S)^{2d-2k}} \\
&\lesssim \frac{l(Q)^{1/2}(|x_{k+1}| + S)^{d-k-1/2}}{(|x_{k+1}| + S)^{2d-2k}} = \frac{l(Q)^{1/2}}{(|x_{k+1}| + S)^{d-k+1/2}}.
\end{aligned}$$

Таким же образом оценивая интегралы по $\xi_{k+2}, \ldots, \xi_{k+m}$, получаем

$$\frac{l(Q)^{m/2}}{(|x_{k+1}| + \ldots + |x_{k+m}| + |x_{k+m+1} - \xi_{k+m+1}| + \ldots + |x_d - \xi_d|)^{d+1-k-m/2}}.$$

Проинтегрируем это по ξ_{k+m+1}:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{l(Q)} \frac{l(Q)^{m/2} d\xi_{k+m+1}}{(|x_{k+1}| + \ldots + |x_{k+m}| + |x_{k+m+1} - \xi_{k+m+1}| + \ldots + |x_d - \xi_d|)^{d+1-k-m/2}} \\
&\lesssim \frac{l(Q)^{m/2}}{(|x_{k+1}| + \ldots + |x_{k+m}| + |x_{k+m+1}| + |x_{k+m+2} - \xi_{k+m+2}| + \ldots + |x_d - \xi_d|)^{d-k-m/2}}.
\end{aligned}$$

Проделав то же самое с $\xi_{k+m+2},\dots,\xi_d$, получим следующую оценку на внутренний интеграл в выражении (2):

$$\frac{l(Q)^{m/2}}{(|x_{k+1}|+\ldots+|x_d|)^{1+m/2}}.$$

Возводим это в квадрат и интегрируем. Поскольку это выражение не зависит от $x_1,\dots,x_k$, имеем:

$$\int\limits_{2^{-n}}^{l(Q)+2^{-n}}\cdots\int\limits_{2^{-n}}^{l(Q)+2^{-n}}\frac{l(Q)^m dx_1\ldots dx_k}{(|x_{k+1}|+\ldots+|x_d|)^{2+m}}\lesssim\frac{l(Q)^{m+k}}{(|x_{k+1}|+\ldots+|x_d|)^{2+m}}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $l(Q)\geqslant 2^{-n}$. Теперь разберём два случая.

1) $m\neq 0$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{-l(Q)}\cdots\int\limits_{-\infty}^{-l(Q)}\frac{l(Q)^{m+k}dx_{m+1}\ldots dx_{m+k}}{(|x_{k+1}|+\ldots+|x_d|)^{2+m}}$$
$$\asymp\frac{l(Q)^{m+k}}{(ml(Q)+|x_{m+k+1}|+\ldots+|x_d|)^2}\leqslant l(Q)^{m+k-2}.$$

Наконец, интегрируя по $x_{k+m+1},\dots x_d$, получаем:

$$l(Q)^{m+k-2}\int\limits_{-l(Q)}^{-2^{-n}}\cdots\int\limits_{-l(Q)}^{-2^{-n}}dx_{k+m+1}\ldots x_d=l(Q)^{d-2}\leqslant 2^n l(Q)^{d-1}.$$

2) $m=0$. В таком случае наше выражение имеет вид

$$\frac{l(Q)^k}{(|x_{k+1}|+\ldots+|x_d|)^2}.$$

Тогда

$$l(Q)^k\int\limits_{-l(Q)}^{-2^{-n}}\cdots\int\limits_{-l(Q)}^{-2^{-n}}\frac{dx_{k+1}\ldots dx_d}{(|x_{k+1}|+\ldots+|x_d|)^2}$$
$$\leqslant l(Q)^k\int\limits_{-l(Q)}^{-2^{-n}}\cdots\int\limits_{-l(Q)}^{-2^{-n}}\frac{dx_{k+2}\ldots dx_d}{2^{-n}+|x_{k+2}|+\ldots+|x_d|}$$

$$\leqslant l(Q)^{d-1}\frac{1}{2^{-n}} = 2^n l(Q)^{d-1}.$$

Таким образом, лемма доказана. □

§3. Доказательство основной теоремы

Приступим, наконец, к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 2. Будем использовать обозначение f_Q для $\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q f(x)dx$. Под нормой f в BMO будем подразумевать выражение $\sup_Q(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x) - f_Q|^2dx)^{1/2}$. Итак, необходимо доказать два неравенства: $\|f\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|f\|_D$ и $\|f\|_D \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}}$.
1. $\|f\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|f\|_D$. Сперва заметим, что для любой константы c верно неравенство:

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x) - f_Q|^2dx\Big)^{1/2} \lesssim \Big(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x) - c|^2dx\Big)^{1/2}. \qquad (3)$$

Чтобы это доказать, можно подынтегральное выражение в левой части представить в виде $|f-c+c-f_Q|^2$, воспользоваться неравенством треугольника и заметить, что $|c-f_Q|$ не больше, чем $\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |c-f(x)|dx$.

Обозначим $S_n := \mathcal{F}^{-1}[\psi_n]$, $P_n := S_{n-1}+S_n+S_{n+1}$. Тогда $\Delta_n f = S_n * f$. Подставим в (3) $c = \sum\limits_{2^{-n}\geqslant l(Q)} (f * S_n)(y)$ для некоторого $y \in Q$. Получаем, что

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x) - f_Q|^2dx\Big)^{1/2}\\ &\lesssim \frac{1}{|Q|^{1/2}}\Big(\int\limits_Q \Big|f(x) - \sum_{2^{-n}\geqslant l(Q)}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t)S_n(y-t)dt\Big|^2dx\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Записывая $f(x)$ как $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t)S_n(x-t)dt$, можно заметить, что правая часть не больше, чем

$$\frac{1}{|Q|^{1/2}}\Big(\int\limits_Q\Big|\sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t)S_n(x-t)dt\Big|^2\,dx\Big)^{1/2} \tag{4}$$

$$+\frac{1}{|Q|^{1/2}}\Big(\int\limits_Q\Big|\sum_{2^{-n}\geqslant l(Q)}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t)(S_n(x-t)-S_n(y-t))dt\Big|^2dx\Big)^{1/2}. \tag{5}$$

Оценим по отдельности величины (4) и (5). Сначала займёмся величиной (5). Для этого будем оценивать подынтегральное выражение, то есть докажем, что при всех $x, y \in Q$ справедливо неравенство

$$\Big|\sum_{2^{-n}\geqslant l(Q)}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t)S_n(x-t)\,dt-\sum_{2^{-n}\geqslant l(Q)}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t)S_n(y-t)\,dt\Big|\lesssim\|f\|_D. \tag{6}$$

Заметим, что $P_n * S_n = S_n$. В самом деле, если взять преобразования Фурье от обеих частей этого равенства, получим, что оно равносильно тому, что $\psi_n = \psi_n(\psi_{n-1}+\psi_n+\psi_{n+1})$. Но $\psi_{n-1}, \psi_n, \psi_{n+1}$ – это единственные три функции из $\{\psi_j\}$, не равные нулю на носителе функции ψ_n, и, так как сумма всех функций равна 1, $\psi_{n-1}+\psi_n+\psi_{n+1}=1$ на носителе функции ψ_n. Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} S_n(x-u)P_n(u-t)du=\int\limits_{\mathbb{R}^d} S_n(x-t-u)P_n(u)du=(P_n*S_n)(x-t)=S_n(x-t).$$

Используя это, заметим, что выражение в левой части формулы (6) не больше, чем

$$\sum_{2^{-n}\geqslant l(Q)}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t)\int\limits_{\mathbb{R}^d}(S_n(x-u)P_n(u-t)-S_n(y-u)P_n(u-t))du\,dt\Big|.$$

Пусть $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ – набор диадических кубов с длиной ребра $2^{-(n-1)}$. Тогда, если x и y лежат в Q, а u – в δ_k, то выполняется неравенство

$$|S_n(x-u)-S_n(y-u)|\lesssim l(Q)\max_{a\in Q,b\in\delta_k}|\nabla S_n(a-b)|.$$

Следовательно, интересующая нас величина не превосходит (с точностью до умножения на константу) величины

$$\sum_{2^{-n}\geqslant l(Q)}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int\limits_{\delta_k}|(f*P_n)(u)|du\cdot\max_{a\in Q,b\in\delta_k}|\nabla S_n(a-b)|\cdot l(Q). \tag{7}$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера и определением нормы $\|\cdot\|_D$, оценим интеграл по δ_k:

$$\int_{\delta_k} |(f * P_n)(u)|du = \int_{\delta_k} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(t)P_n(u-t)dt \Big| du$$
$$\leqslant |\delta_k|^{1/2} \Big(\int_{\delta_k} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(t)P_n(u-t)dt \Big|^2 \Big)^{1/2}$$
$$= |\delta_k| \Big(\frac{1}{|\delta_k|} \int_{\delta_k} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(t)(S_{n-1}(u-t) + S_n(u-t) + S_{n+1}(u-t))dt \Big|^2 du \Big)^{1/2}$$
$$\lesssim |\delta_k| \Big(\frac{1}{|\delta_k|} \int_{\delta_k} \sum_{2^{-m} \leqslant l(\delta_k)} |\Delta_m f(x)|^2 dx \Big)^{1/2} \leqslant \|f\|_D |\delta_k|.$$

Подставив это в формулу (7), получаем, что остаётся оценить сумму

$$l(Q)\|f\|_D \sum_{2^{-n} \geqslant l(Q)} 2^{-(n-1)d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \max_{a \in Q, b \in \delta_k} |\nabla S_n(a-b)|. \tag{8}$$

Для этого заметим, что из условий теоремы следуют две оценки на $\nabla S_n(r)$: $|\nabla S_n(r)| \lesssim |r|^{-(d+1)}$ и $|\nabla S_n(r)| \lesssim 2^{n(d+1)}$. Сперва поймём, что из этих оценок следует требуемое утверждение. В самом деле, будем считать, что кубы δ_k занумерованы “по порядку”, то есть для соседних кубов их индексы отличаются на 1 в одном разряде, и при этом что куб с индексом $k = (0, 0, \dots, 0)$ пересекает Q. Тогда всего Q пересекают не больше, чем 2^d из набора кубов $\{\delta_k\}$. Воспользовавшись для пересекающих Q кубов второй оценкой, а для не пересекающих – первой, а также тем, что при такой нумерации $|a-b| \asymp 2^{-n}|k|$ при $a \in Q$, $b \in \delta_k$ и δ_k, не пересекающих Q, получаем, что выражение (8) не превосходит (опять же, с точностью до умножения на константу) величины

$$l(Q)\|f\|_D \sum_{2^{-n} \geqslant l(Q)} 2^{-nd} \Big(2^{n(d+1)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} 2^{n(d+1)} |k|^{-(d+1)} \Big)$$
$$\lesssim l(Q)\|f_D\| \sum_{2^{-n} \geqslant l(Q)} 2^n.$$

Эта величина не превосходит $\|f\|_D$, значит, неравенство (6) доказано. Остаётся вывести две оценки на градиент функции S_n. Ясно, что достаточно оценивать $\partial_j S_n$ для любого j. Заметим, что $\|\partial_j S_n\|_\infty \leqslant$

$\|\mathcal{F}[\partial_j S_n]\|_1 = 2\pi\|x_j\psi_n(x)\|_1$. Ясно, что $|x_j|$ на носителе функции ψ_n не превосходит 2^{n+1}. При этом

$$\|\psi_n\|_1 = \int\limits_{2^{n-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{n+1}} |\psi_n(\xi)|d\xi \lesssim 2^{nd}.$$

Последнее неравенство получено из условия для $\alpha = 0$. Значит, вторая оценка получена.

Займёмся первой. Опять же, ясно, что достаточно доказать, что $|r_j^{d+1}\partial_i S_n(r)| \lesssim 1$. Для этого опять применим преобразование Фурье: $\|r_j^{d+1}\partial_i S_n(r)\|_\infty \leqslant \|\mathcal{F}[r_j^{d+1}\partial_i S_n(r)]\|_1 \asymp \|\partial_j^{d+1}(x_i\psi_n(x))\|_1$. Нужно разобрать два случая: $i = j$ и $i \neq j$. Если $i \neq j$, то вновь воспользуемся тем, что $|x_i| \leqslant 2^{n+1}$ на носителе функции ψ_n, а

$$\|\partial_j^{d+1}\psi_n\|_1 = \int\limits_{2^{n-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{n+1}} |\partial_j^{d+1}\psi_n(\xi)|d\xi \lesssim 2^{-n},$$

и, стало быть, нужная оценка доказана. Последнее неравентсво тут получено из условия при $|\alpha| = d+1$.

Если же $i = j$, то можно отдельно оценить $|x_i\partial_i^{d+1}\psi_n(x)|$ (это делается так же, как выше) и $|\partial_i^d\psi_n(x)|$. Эта функция тоже оценивается аналогично предыдущему (только теперь надо воспользоваться условием с $|\alpha| = d$). Таким образом, требуемые неравенства доказаны, и выражение (5) оценено.

Теперь займёмся выражением (4). Итак, нам осталось доказать, что

$$\Big(\int\limits_Q \Big|\sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t)S_n(x-t)dt\Big|^2 dx\Big)^{1/2} \lesssim |Q|^{1/2}\|f\|_D.$$

Пользуясь тем, что $S_n = P_n * S_n$, заметим, что левая часть равна следующему:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_Q \Big| \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{\mathbb{R}^d} S_n(x-u)P_n(u-t)du dt\Big|^2 dx \\
&= \int\limits_Q \Big| \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus Q} S_n(x-u)P_n(u-t)du \\
&+ \int\limits_Q S_n(x-u)P_n(u-t)du\Big) dt\Big|^2 dx \\
&\lesssim \int\limits_Q \Big| \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus Q} S_n(x-u)P_n(u-t)du\, dt\Big|^2 dx \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big| \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_Q S_n(x-u)P_n(u-t)du dt\Big|^2 dx.
\end{aligned}$$

Осталось доказать два неравенства:

$$\int\limits_Q \Big| \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus Q} S_n(x-u)P_n(u-t)du\, dt\Big|^2 dx \lesssim |Q|\|f\|_D^2, \tag{9}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big| \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_Q S_n(x-u)P_n(u-t)du\, dt\Big|^2 dx \lesssim |Q|\|f\|_D^2. \tag{10}$$

По неравенству треугольника в L^2, корень из левой части (9) не больше, чем величина

$$\sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} \Big(\int\limits_Q \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus Q} S_n(x-u)P_n(u-t)du\, dt\Big|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Для оценки этого выражения достаточно доказать, что при $l(Q) \geqslant 2^{-n}$ справедливо неравенство

$$\int\limits_Q \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus Q} S_n(x-u)P_n(u-t)du\, dt\Big|^2 dx \lesssim \|f\|_D^2 2^{-n} l(Q)^{d-1}.$$

Воспользовавшись доказанным ранее неравенством

$$\int\limits_{\delta_k} |f * P_n| \lesssim \|f\|_D |\delta_k|,$$

где δ_k – произвольный (в частности, диадический) куб с длиной ребра не менее, чем $2^{-(n-1)}$, напишем:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_Q \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus Q} S_n(x-u) P_n(u-t) du\, dt \Big|^2 dx \\
&= \int\limits_Q \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int\limits_{\delta_k \cap (\mathbb{R}^d \setminus Q)} S_n(x-u) P_n(u-t) du\, dt \Big|^2 dx \\
&= \int\limits_Q \Big| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int\limits_{\delta_k \cap (\mathbb{R}^d \setminus Q)} S_n(x-u) \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) P_n(u-t) dt\, du \Big|^2 dx \\
&\lesssim \|f\|_D^2 \int\limits_Q \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \max_{\xi \in \delta_k \cap (\mathbb{R}^d \setminus Q)} |S_n(x-\xi)| |\delta_k| \Big)^2 dx.
\end{aligned}$$

Аналогично полученным выше оценкам на градиент функции S_n, можно заметить, что $|S_n(x)| \lesssim 2^{nd}$ и $|S_n(x)| \lesssim 2^{-n}|x|^{-(d+1)}$. Учитывая это, продолжим оценку:

$$\begin{aligned}
&\|f\|_D^2 \int\limits_Q \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \max_{\xi \in \delta_k \cap (\mathbb{R}^d \setminus Q)} |S_n(x-\xi)| |\delta_k| \Big)^2 dx \\
&\lesssim \|f\|_D^2 \int_Q \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \max_{\xi \in \delta_k \cap (\mathbb{R}^d \setminus Q)} \min\{2^{nd}, 2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\} |\delta_k| \Big)^2 dx \\
&\asymp \|f\|_D^2 \int_Q \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus Q} \min\{2^{nd}, 2^{-n}|x-\xi|^{-(d+1)}\} d\xi \Big)^2 dx.
\end{aligned}$$

По первой лемме, это не превосходит $\|f\|_D^2 2^{-n} l(Q)^{d-1}$, и таким образом неравенство (9) доказано.

Для оценки левой части в (10) заметим, что следующие функции ортогональны в $L^2(\mathbb{R}^d)$ при $|n_1 - n_2| \geqslant 2$:

$$x \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{Q} S_{n_1}(x-u) P_{n_1}(u-t) du\, dt,$$

$$x \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{Q} S_{n_2}(x-u) P_{n_2}(u-t) du\, dt.$$

Это напрямую следует из того, что у функций ψ_{n_1} и ψ_{n_2}, являющихся обратными преобразованиями Фурье функций S_{n_1} и S_{n_2}, носители не пересекаются, а следовательно, они ортогональны в L^2. В силу этой ортогональности, достаточно оценить выражение

$$\sum_{2^{-n} \leqslant l(Q)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{Q} S_n(x-u) P_n(u-t) du\, dt \Big|^2 dx$$

$$= \sum_{2^{-n} \leqslant l(Q)} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus Q} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{Q} S_n(x-u) P_n(u-t) du\, dt \Big|^2 dx$$

$$+ \sum_{2^{-n} \leqslant l(Q)} \int\limits_{Q} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{Q} S_n(x-u) P_n(u-t) du\, dt \Big|^2 dx.$$

Первое слагаемое, аналогично тому, что мы делали выше, сводится к оценке интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus Q} \Big(\int\limits_{Q} \min\{2^{nd}, 2^{-nd}|x-\xi|^{-2d}\} d\xi \Big)^2 dx,$$

который по второй лемме тоже не больше, чем $2^{-n} l(Q)^{d-1}$.
Второе же слагаемое не больше, чем удвоенная сумма

$$\sum_{2^{-n} \leqslant l(Q)} \int\limits_{Q} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{\mathbb{R}^d} S_n(x-u) P_n(u-t) du dt \Big|^2 dx$$

$$+ \sum_{2^{-n} \leqslant l(Q)} \int\limits_{Q} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus Q} S_n(x-u) P_n(u-t) du\, dt \Big|^2 dx.$$

Здесь второе слагаемое мы уже оценивали выше, а первое, учитывая, что $P_n * S_n = S_n$, равно сумме

$$\sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} \int\limits_Q \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) S_n(x-t)\, dt \Big|^2 dx,$$

что не превосходит $\|f\|_D^2 |Q|$ по определению выражения $\|f\|_D$. Таким образом, первая часть доказательства теоремы завершена.

2. $\|f\|_D \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}}$. Для второй части доказательства теоремы зафиксируем куб Q и будем оценивать величину

$$\Big(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}.$$

Запишем f в виде $(f - f_Q)\chi_{2Q} + (f - f_Q)\chi_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q} + f_Q =: f_1 + f_2 + f_3$, где χ_A – характеристическая функция множества A, а $2Q$ – куб с тем же центром, что и Q, и длиной ребра в два раза больше. Отметим, что f_3 – постоянная функция, а значит $\Delta_n f_3 = 0$. Таким образом, интересующая нас величина, с точностью до умножения на константу, не больше, чем

$$\Big(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n f_1(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} + \Big(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n f_2(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}.$$

Первое выражение оценивается просто. В самом деле, оно не превосходит

$$\Big(\frac{1}{|Q|} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\Delta_n((f - f_Q)\chi_{2Q})|^2 dx\Big)^{1/2}$$
$$= \Big(\frac{1}{|Q|} \int\limits_{2Q} |f(x) - f_Q|^2\, dx\Big)^{1/2} \lesssim \Big(\frac{1}{|2Q|} \int |f(x) - f_{2Q}|^2\, dx\Big)^{1/2} + |f_{2Q} - f_Q|.$$

Оба слагаемых с точностью до константы не больше, чем $\|f\|_{\mathrm{BMO}}$ – первое по определению пространства BMO, а для второго это становится понятно, если сложить два неравенства: $\int\limits_Q |f(x) - f_Q|\, dx \leqslant$

$|Q|\|f\|_{\mathrm{BMO}}$ и $\int\limits_Q |f(x)-f_{2Q}|\,dx \leqslant \int\limits_{2Q} |f(x)-f_{2Q}|\,dx \lesssim |Q|\|f\|_{\mathrm{BMO}}$. Значит, осталось оценить величину

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)} |\Delta_n((f-f_Q)\chi_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q})(x)|^2 dx. \tag{11}$$

Пусть $x\in Q$. Тогда, учитывая, что $|S_n(t)|\lesssim \frac{1}{2^n|t|^{d+1}}$, получаем:

$$|\Delta_n((f-f_Q)\chi_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q})(x)| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q} (f(y)-f_Q)S_n(x-y)\,dy\Big|$$
$$\lesssim \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q} \frac{|f(y)-f_Q|}{2^n|x-y|^{d+1}}\,dy.$$

Это выражение распишем в виде суммы:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus 2Q} \frac{|f(y)-f_Q|}{2^n|x-y|^{d+1}}\,dy = \sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{2^kQ\setminus 2^{k-1}Q} \frac{|f(y)-f_Q|}{2^n|x-y|^{d+1}}\,dy$$
$$\lesssim \frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{2^kQ\setminus 2^{k-1}Q} \frac{|f(y)-f_Q|}{2^{k(d+1)}l(Q)^{d+1}}\,dy \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{2^kQ} \frac{|f(y)-f_Q|}{2^{k(d+1)}l(Q)^{d+1}}\,dy.$$

Заметим теперь, что $\int\limits_{2^kQ} |f(y)-f_Q|dy \lesssim k2^{kd}|Q|\|f\|_{\mathrm{BMO}}$. Чтобы это доказать, можно, как и раньше, сложить два неравенства:

$$\int\limits_{2^kQ} |f(x)-f_{2^kQ}|\,dx \leqslant 2^{kd}|Q|\|f\|_{\mathrm{BMO}}$$

и

$$\int\limits_{2^kQ} |f(x)-f_{2^{k+1}Q}|\,dx \leqslant \int\limits_{2^{k+1}Q} |f(x)-f_{2^{k+1}Q}|dx \leqslant 2^{(k+1)d}|Q|\|f\|_{\mathrm{BMO}},$$

и получить, что $|f_{2^{k+1}Q}-f_{2^kQ}|\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}}$. Складывая k таких неравенств, получим, что $|f_{2^kQ}-f_Q|\lesssim k\|f\|_{\mathrm{BMO}}$. Значит,

$$\int\limits_{2^kQ} |f(x)-f_Q|\,dx = \int\limits_{2^kQ} |f(x)-f_{2^kQ}+f_{2^kQ}-f_Q|\,dx$$
$$\lesssim 2^{kd}|Q|\|f\|_{\mathrm{BMO}} + k2^{kd}|Q|\|f\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim k2^{kd}|Q|\|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Используя это, продолжим оценку:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{\infty}\int\limits_{2^kQ}\frac{|f(y)-f_Q|}{2^{k(d+1)}l(Q)^{d+1}}\,dy \lesssim \frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k2^{kd}|Q|\|f\|_{\mathrm{BMO}}}{2^{k(d+1)}l(Q)^{d+1}}$$
$$= \frac{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}{2^n l(Q)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{2^k} \asymp \frac{\|f\|_{\mathrm{BMO}}}{2^n l(Q)}.$$

Таким образом, мы оценили каждое слагаемое в подынтегральном выражении (11), то есть само это выражение не больше, чем

$$\sum_{2^{-n}\leqslant l(Q)}\frac{\|f\|^2_{\mathrm{BMO}}}{2^{2n}l(Q)^2} \asymp \|f\|^2_{\mathrm{BMO}},$$

и требуемое неравенство доказано. □

Литература

1. L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis.* 3 edition. Springer, 2014.
2. L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis.* 3 edition. Springer, 2014.
3. Y. Han, D. Yang, *New characterization of* BMO($\mathbb{R}^n$) *space.* — Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **10** (2004), 95–103.
4. С. В. Бочкарев, *Ряды Валле–Пуссена в пространствах* BMO, L_1, *и* $H^1(D)$, *и мультипликативные неравенства.* — Теория функций и дифференциальные уравнения, Тр. МИАН **210**, Наука, М., 1995, 41-64.
5. С. В. Бочкарев, *Средние Валле Пуссена рядов Фурье для квадратичного спектра и спектров степенной плотности.* — УМН, **69** (2014), 125–162.

Vasilyev I., Tselishchev A. On an equivalent norm on BMO.

We extand the inequality proved by S. V. Bochkarev to a larger class of convolution operators, assuming that the Fourier transforms of the kernels of these operators satisfy certain conditions in the spirit of the Hörmander–Mikhlin multiplier theorem. Therefore, we give a new characterization of BMO.

С.-Петербургское Отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 17 июля 2017 г.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербургский государственный университет,
14 линия В.О., дом 29Б,
С.-Петербург 199178 Россия

E-mail: milavas@mail.ru

E-mail: celis-anton@yandex.ru