Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 456, 2017 г.

В. А. Боровицкий

K-ЗАМКНУТОСТЬ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ НА ТОРЕ $\mathbb{T}^2$

§1. Введение

Пусть (X_1, X_2) – совместимая пара банаховых или квази-банаховых пространств (то есть они вложены в некоторое объемлющее топологическое векторное пространство), Y_1 и Y_2 – замкнутые подпространства соответственно в X_1 и X_2.

Определение. *Пара (Y_1, Y_2) называется K-замкнутой в паре (X_1, X_2), если существуют такие две абсолютные константы C_1, C_2, что для всех элементов $f \in Y_1 + Y_2$, $g \in X_1$, $h \in X_2$ таких, что $f = g + h$, найдутся такие элементы $g' \in Y_1$, $h' \in Y_2$, что $f = g' + h'$ и при этом $\|g'\|_{X_1} \leqslant C_1\|g\|_{X_1}$, $\|h'\|_{X_2} \leqslant C_2\|h\|_{X_2}$.*

Теоремы о K-замкнутости интересны сами по себе, так как в таком случае пара (Y_1, Y_2) наследует многие интерполяционные свойства пары (X_1, X_2), в частности верна формула $(Y_1, Y_2)_{\theta,q} = (X_1, X_2)_{\theta,q} \cap (Y_1 + Y_2)$ для интерполяции пространств вещественным методом (см. книгу [9]).

Напомним, что классические пространства Харди на n-мерном торе – это

$$H_p(\mathbb{T}^n) = \text{Clos Lin}\left\{z_1^{j_1} z_2^{j_2} \dots z_n^{j_n} | j_1, j_2, \dots, j_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\},$$

где $0 < p \leqslant \infty$, при $p < \infty$ замыкание берется в $L_p(\mathbb{T}^n)$-норме, а при $p = \infty$ в $*$-слабой топологии. Однако отправной точкой здесь на самом деле являются пространства $\mathbf{H}_p(\mathbb{D}^n)$ голоморфных функций в полидиске с нормой $\|f\|_{\mathbf{H}_p(\mathbb{D}^n)} = \sup\limits_{0<r<1} (\int\limits_{\mathbb{T}^n} |f(rz)|^p dz)^{\frac{1}{p}}$. Пространство $H_p(\mathbb{T}^n)$ состоит из радиальных пределов (в смысле сходимости п.в.) функций из $\mathbf{H}_p(\mathbb{D}^n)$ и только из них. Эти два пространства изометричны.

Ключевые слова: классы Харди, K-замкнутость, пространство BMO, условие Макенхаупта.

Обсудим теперь определение весовых пространств Харди. Зафиксируем некоторую функцию $w : \mathbb{T}^n \to (0, +\infty)$ – вес. Можно было бы попытаться определить весовые пространства $H_p(w)$ через радиальные пределы функций из $\mathbf{H}_p(w, \mathbb{D}^n)$, пространства голоморфных в полидиске функций с нормой $\|f\|_{\mathbf{H}_p(w,\mathbb{D}^n)} = \sup\limits_{0<r<1} (\int\limits_{\mathbb{T}^n} |f(rz)|^p w(z) dz)^{\frac{1}{p}}$. К сожалению, чтобы естественная изометрия между пространствами $\mathbf{H}_p(\mathbb{D}^n)$ и $H_p(\mathbb{T}^n)$, которая посылает функцию в ее радиальный предел, оставалась в весовом случае хотя бы изоморфизмом, нужно накладывать весьма обременительные условия Макенхаупта (про условия Макенхаупта см. книгу [8]) на вес w. Причины кроются в том, что ограниченность отображения, посылающего радиальный предел обратно в функцию на $\mathbb{D}^n$ – это, по сути, ограниченность оператора свертки с ядром Пуассона в весовом пространстве. Заметим еще, что определение через замыкание полиномов в нужной топологии, также использованное нами в классическом случае, корректно только в случае $w \in L_1(\mathbb{T}^n)$, что тоже бывает слишком ограничительно. Таким образом, на торе возникает множество различных определений весовых пространств Харди со сложными взаимосвязями.

Опишем определения, выбранные нами, останавливаясь лишь на одномерном и двумерном случаях, так как только они в дальнейшем будут обсуждаться, а также ограничим класс рассматриваемых весов до таких, что $\log w \in L_1$. В одномерном случае существует достаточно естественное определение классов $H_p(w)$ для w таких, что $\log w \in L_1$.

Определение. *Найдем внешнюю функцию и такую, что $|u| = w$ (про внешние функции см. [11]); тогда можем определить*

$$H_p(w) = \{f/u^{\frac{1}{p}} | f \in H_p(\mathbb{T})\} \quad \textit{с нормой} \quad \|g\|_{H_p(w)} = \|gu^{\frac{1}{p}}\|_{H_p(\mathbb{T})}.$$

В случае $n = 2$ будем рассматривать веса $w : \mathbb{T}^2 \to (0, \infty)$ вида $w(z_1, z_2) = a(z_1)u(z_1, z_2)b(z_2)$, где $u \in L_1(\mathbb{T}^2)$, а у функций a и b суммируемые логарифмы. Это – как раз те веса, которые встретятся в основных результатах заметки. При $0 < p < \infty$ мы будем использовать следующее определение.

Определение. *Пусть $p < \infty$, $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ – внешние функции, построенные по a и b, тогда*

$$H_p(w) = \left\{f/(\widetilde{a}\widetilde{b})^{\frac{1}{p}} | f \in H_p(u(\,\cdot\,,\,\cdot\,))\right\}$$

с нормой

$$\|g\|_{H_p(w)} = \|g(ab)^{\frac{1}{p}}\|_{H_p(u(\,\cdot\,,\,\cdot\,))},$$

где $H_p(u(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ *определяется как замыкание аналитических полиномов в* $L_p(u(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$*-норме.*

Поясним, что мы будем понимать под символом $L_\infty(w(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$.

Определение. *Для произвольного веса (с суммируемым логарифмом)* $w : \mathbb{T}^2 \to (0,\infty)$, *определяем*

$$L_\infty(w(\,\cdot\,,\,\cdot\,)) := \{f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C} |\operatorname{ess\,sup}\{f(z_1,z_2)/w(z_1,z_2)|(z_1,z_2) \in \mathbb{T}^2\} < \infty\}$$

с естественной нормой.

Остался неразобранным случай $H_p(w(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ с бесконечным показателем.

Определение. *Пространство* $H_\infty(w(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ *определяем как аннулятор пространства* $L_1^P(w)$, *которое, в свою очередь, определяется аналогично пространству* $H_1(w)$, *только с заменой аналитических многочленов на многочлены со спектром во множестве* $(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})\cup(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})$. *Отметим, что трюк с внешними функциями в данной ситуации также применим, так как включение спектра функции в множество* $(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})\cup(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})$ *инвариантно относительно домножения на аналитические функции.*

Замечание. Двойственность, которую мы только что использовали и будем продолжать использовать всегда в дальнейшем, это

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\mathbb{T}^2} f(z)\overline{g(z)}\,dz.$$

При таком определении двойственности и пространства $L_\infty(w(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ верно соотношение $L_1(w(\,\cdot\,,\,\cdot\,))^* = L_\infty(w(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$.

Мы собираемся сформулировать некоторые новые достаточные условия на веса для того, чтобы пара $(H_r(w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)), H_s(w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)))$ была K-замкнута в паре $(L_r(w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)), L_s(w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)))$.

К настоящему моменту полностью изучен безвесовой случай для $n = 1, 2$: пара $(H_r(\mathbb{T}^n), H_s(\mathbb{T}^n))$ K-замкнута в паре $(L_r(\mathbb{T}^n), L_s(\mathbb{T}^n))$ для любых $r, s \in (0,\infty]$. По поводу случая $n = 1$ см., например, обзор [5]. Случай $n = 2$ для конечных показателей r, s фактически рассмотрен в [2], для бесконечного показателя K-замкнутость доказана в [6]. В случае $n \geqslant 3$ доказана K-замкнутость для $r, s \in (0,\infty)$ (в той же статье [2]), а про случай, когда один из показателей бесконечен, ничего не известно.

Одномерный весовой случай также полностью изучен, см., например, обзор [5].

Теорема 1. *Пусть* $w_1, w_2 : \mathbb{T} \to (0, +\infty)$ – *веса, для которых*

$$\log w_1(\,\cdot\,) \in L_1(\mathbb{T}), \quad \log w_2(\,\cdot\,) \in L_1(\mathbb{T}).$$

Пусть $0 < r < p \leqslant \infty$. *Тогда пара* $(H_r(w_1(\,\cdot\,)), H_p(w_2(\,\cdot\,)))$ K*-замкнута в паре* $(L_r(w_1(\,\cdot\,)), L_p(w_2(\,\cdot\,)))$ *в том и только в том случае, если* $\log \frac{w_1^{1/r}(\,\cdot\,)}{w_2^{1/p}(\,\cdot\,)} \in BMO(\mathbb{T})$ (*при* $p = \infty$ *условие таково:* $\log w_1^{1/r}(\,\cdot\,) w_2(\,\cdot\,) \in BMO(\mathbb{T})$).

Для интерполяции пространств Харди двух переменных к настоящему времени была установлена лишь следующая теорема (она доказана в [4]).

Теорема 2. *Пусть* $1 < r < \infty$;

$$w_1(z_1, z_2) = a_1(z_1) b_1(z_2), w_2(z_1, z_2) = a_2(z_1) b_2(z_2),$$

где функции a_i, b_i *удовлетворяют условию*

$$\log a_1(\,\cdot\,), \log b_1(\,\cdot\,), \log a_2(\,\cdot\,), \log b_2(\,\cdot\,) \in BMO(\mathbb{T}).$$

Тогда пара $(H_r(w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)), H_\infty(w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)))$ K*-замкнута в паре*

$$(L_r(w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)), L_\infty(w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,))).$$

Отметим, что в оригинальной теореме вместо условия на принадлежность самих логарифмов весов пространству $BMO(\mathbb{T})$, фигурируют условия с логарифмами отношений весов, аналогичные условиям из теоремы 1. Таким образом, аналог одномерного условия оказывается достаточным, когда вес $w(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ разделяется в произведение двух функций одной переменной.

Наконец, техническое замечание. Нам будут встречаться, а на самом деле однажды уже встречались, обозначения вида X^Q, где X – какая-то квази-банахова решетка измеримых функций (про решетки измеримых функций см. книгу [10]), а Q – некоторый проектор. При этом Q не обязан действовать в пространстве X: если он все же действует в X, то, стандартным образом,

$$X^Q = \{f \in X | Qf = f\},$$

если же нет, то мы будем фиксировать за проектором Q некоторое линейное подпространство $D \subseteq X$ (в реальных случаях оно, чаще всего, будет плотным), на котором Q определен и принимает значения в X, а пространство X^Q определять как $\mathrm{Clos}\{f \in D | Qf = f\}$. Введем сразу важнейший для §2 оператор P. Это проектор, который действует на тригонометрические многочлены двух переменных, зануляя коэффициенты при степенях в множестве $(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \times (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$. Теперь, следуя вышеприведенной общей конструкции, можем определить решетку $L_s^P(u(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$, где $u \in L_1(\mathbb{T}^2)$, $s < \infty$ (в роли множества D, как и всегда для проектора P, будет выступать множество тригонометрических многочленов). Но все же таким образом мы не можем определить $L_s^P(w(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$, где w имеет вид $w(z_1, z_2) = a(z_1)u(z_1, z_2)b(z_2)$, $s < \infty$, функция u лежит в $L_1(\mathbb{T}^2)$, а у функций a и b суммируемые логарифмы. Случай $s = \infty$, исключенный здесь нами, получается из соображений двойственности, как это уже было сделано на несколько абзацев выше, в этом абзаце мы более не будем его обсуждать. Чтобы справиться с весами вида $w(z_1, z_2) = a(z_1)u(z_1, z_2)b(z_2)$, мы определяем пространство $L_s^P(w(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ как

$$L_s^P(w(\,\cdot\,,\,\cdot\,)) = \{\widetilde{a}^{-1/s}\widetilde{b}^{-1/s} f | f \in L_s^P(u(\,\cdot\,,\,\cdot\,))\}$$

с нормой

$$\|g\|_{L_s^P(w)} = \|g a^{1/s} b^{1/s}\|_{L_s^P(u)},$$

где, как и раньше, $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ – внешние функции с $|\widetilde{a}| = a, |\widetilde{b}| = b$. В чисто решеточных терминах это выглядит так: мы взяли решетку $X = L_s$, добавили к ней вес $u^{-1/s}$, получив $X(u^{-1/s})$, после этого взяли подпространство, "вырезанное" проектором P, заданным на многочленах, получили $(X(u^{-1/s}))^P$, после чего добавили к получившейся решетке дополнительный вес $(\widetilde{a}\widetilde{b})^{-1/s}$, получив $(X(u^{-1/s}))^P((\widetilde{a}\widetilde{b})^{-1/s})$.

§2. Обобщение теоремы 2 для весов вида $w(z_1, z_2) = a(z_1)u(z_1, z_2)b(z_2)$

Здесь мы сформулируем следующую теорему, дав набросок ее доказательства. Заметим сразу, что под "двумерными A_s" понимаются условия Макенхаупта по прямоугольникам.

Теорема 3. *При выполнении следующих условий*:

(1) u_1 *удовлетворяет двумерному* A_p,
(2) u_2 *удовлетворяет двумерному* A_1,

(3) $\log(a_i), \log(b_i) \in BMO$,

(4) $u_2^p u_1$ *удовлетворяет двумерному* A_∞,

имеет место K*-замкнутость пары*

$$(H_p(a_1(z_1)u_1(z_1,z_2)b_1(z_2)), H_\infty(a_2(z_1)u_2(z_1,z_2)b_2(z_2)))$$

в паре

$$(L_p(a_1(z_1)u_1(z_1,z_2)b_1(z_2)), L_\infty(a_2(z_1)u_2(z_1,z_2)b_2(z_2)))\,.$$

Хоть условие (4) и выглядит неестественным, наши методы не позволяют от него избавиться. Подобное обстоятельство также появлялось в статье [1] и не случайно, всему виной один и тот же метод, в [1] называемый "весовое разложение Кальдерона–Зигмунда".

Схема доказательства. Здесь мы попытаемся кратко изложить основные идеи доказательства теоремы: все многочисленные вычисления, которые составляют существенную часть доказательства, будут опущены (полное изложение см. в [12]).

Во-первых, заметим, что без ограничения общности можно считать, что $a_2 = 1, a_1 = a^{\frac{1}{1-q}}$, $b_2 = b, b_1 = b^{\frac{1}{1-q}}$, где a и b – какие-то функции: это достигается домножением на соответствующие внешние функции, подробнее см. [4], где этот прием используется с бо́льшим количеством комментариев.

Далее мы, из соображений двойственности (см. [9]), заменим задачу о K-замкнутости пары

$$\Big(H_p(a^{\frac{1}{1-q}}(z_1)w_1(z_1,z_2)b^{\frac{1}{1-q}}(z_2)), H_\infty(w_2(z_1,z_2)b(z_2))\Big)$$

в паре

$$\Big(L_p(a^{\frac{1}{1-q}}(z_1)w_1(z_1,z_2)b^{\frac{1}{1-q}}(z_2)), L_\infty(w_2(z_1,z_2)b(z_2))\Big)$$

эквивалентной ей задачей о K-замкнутости соответствующей пары "преданнуляторов" в соответствующей паре предсопряженных пространств. То есть нам надо будет установить K-замкнутость пары

$$\Big(L_1^P(w_2(z_1,z_2)b(z_2)), L_q^P(a(z_1)w_1^{1-q}(z_1,z_2)b(z_2))\Big)$$

в паре

$$\Big(L_1(w_2(z_1,z_2)b(z_2)), L_q(a(z_1)w_1^{1-q}(z_1,z_2)b(z_2))\Big),$$

где пространства $L_s^P(w)$ были определены во введении и верно соотношение $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Теперь мы хотим превратить веса w_1 и w_2 в один вес w. Это действительно удается сделать, немного испортив проектирующий оператор P.
Используя прием из [1] (стр. 192), получаем, что вопрос K-замкнутости пары

$$\Big(L_1^P(w_2(z_1,z_2)b(z_2)), L_q^P(a(z_1)w_1^{1-q}(z_1,z_2)b(z_2))\Big)$$

в паре

$$\Big(L_1(w_2(z_1,z_2)b(z_2)), L_q(a(z_1)w_1^{1-q}(z_1,z_2)b(z_2))\Big)$$

эквивалентен вопросу о K-замкнутости пары

$$\Big(L_1^{P^u}(w(z_1,z_2)b(z_2)), L_q^{P^u}(a(z_1)w(z_1,z_2)b(z_2))\Big)$$

в паре

$$\Big(L_1(w(z_1,z_2)b(z_2)), L_q(a(z_1)w(z_1,z_2)b(z_2))\Big),$$

при $w = w_1 w_2^p$, $u = w_1 w_2^{p-1}$, $P^u f = u^{-1}P(uf)$ (оператор P^u называется окаймленным). Тут нужно отметить, что используемые здесь пространства $L^{P^u}(w)$ определяются "чисто решеточным" образом, так что нам нет необходимости накладывать какие-то дополнительные условия на w и u, чтобы такая запись имела смысл. Уточним, что если вспомнить процесс, стоящий за определением пространств $L_s^P(w)$, то переход к окаймленному оператору будет совершен на втором шаге, перед добавлением "разделяющегося" веса, и можно считать, что за окаймленным оператором закреплено плотное множество $u^{-1}\cdot D$, где D – множество тригонометрических многочленов.

Далее доказательство продолжается в духе статьи [4] с незначительными техническими усложнениями. В итоге получается теорема, сформулированная ниже, из которой уже без всякого труда выводится более удобная теорема 3. Подробные вычисления см. в [12].

Теорема 4. *K-замкнутость пары*

$$\Big(L_1^{P^u}(w(z_1,z_2)b(z_2)), L_q^{P^u}(a(z_1)w(z_1,z_2)b(z_2))\Big)$$

имеет место, если

(0) $w_1(\cdot,\cdot), w_2(\cdot,\cdot) \in L_1(\mathbb{T}^2)$ *(техническое требование для корректности наших определений),*

(1) $w = w_1 w_2^p$ *удовлетворяет условию* A_∞ *по второй переменной равномерно (под равномерностью мы здесь понимаем существование константы в обратном неравенстве Гельдера, не зависящей от первой переменной),*
(2) w_2 *удовлетворяет условию* A_1 *по второй переменной равномерно,*
(3) $\log(a), \log(b) \in BMO$,
(4) $\log(w(\,\cdot\,, z_2))$ *лежит в пространстве BMO по первой переменной равномерно,*
(5) $w_1 \in A_p$ *равномерно по второй переменной.*

□

Добавим несколько комментариев. Условия 1) и 2) – требования весового разложения Кальдерона–Зигмунда (см. [1]). Кажется, что условие 4) дает возможность рассматривать вес a сразу же как часть веса w, но это не так, ведь для корректности определения пространства надо, чтобы $w \in L_1(\mathbb{T}^2)$, а вес a может испортить это свойство. Отметим также, что теорема работает лишь в предположении $p > 1$.

§3. Весовой случай конечных показателей

Удается доказать также следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть* $0 < r < 1 < p < \infty$. *Если веса* $w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, $w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *удовлетворяют условиям*

$$w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in A_\infty, \qquad w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in A_p,$$

то пара

$$(H_r(w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)), H_p(w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)))$$

K-замкнута в паре

$$(L_r(w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)), L_p(w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,))).$$

Замечание Для показателей $0 < r < p < 1$ условия меняются на $w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,), w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in A_\infty$.

Схема доказательства. Более или менее, рассуждения следуют одному из методов, описанных в [2]. Взяв $f = g + h$, где $f \in H_r(w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)) + H_p(w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$, $g \in L_r(w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$, $h \in L_p(w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$, можем, рассматривая $L_r(w_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ и $L_p(w_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ как квази-банаховы решетки измеримых функций и воспользовавшись общей теорией из [5], сделать функции g и h "аналитическими" по одной из переменных. То есть получим какое-то разложение $f = g' + h'$, где для каждого значения z_1 функции $g'(z_1, \cdot)$, $h'(z_1, \cdot)$ являются элементами пространств $H_r(w_1(z_1, \cdot))$ и $H_p(w_2(z_1, \cdot))$ соответственно (последние понимаются в смысле весовых пространств на $\mathbb{T}$ при каждом фиксированном значении z_1). Здесь мы воспользовались BMO-регулярностью решеток $L_r(w_1(z_1, \cdot))$ и $L_p(w_2(z_1, \cdot))$, которая следует из наложенных на веса условий Макенхаупта.

Второй раз тем же приемом для установления "аналитичности" по второй переменной воспользоваться напрямую не получится, потому что получившиеся подпространства пространств $L_r(w_1(\cdot, \cdot))$ и $L_p(w_2(\cdot, \cdot))$, состоящие из функций, "аналитических" по одной переменной, уже не будут квази-банаховыми решетками измеримых функций.

Далее мы находим общий безусловный базис для пространств $H_r(w_1(z_1, \cdot))$ и $H_p(w_2(z_1, \cdot))$, не зависящий от значения z_1. Существование такого базиса для вещественных пространств Харди фактически установлено в [3]. Утверждение из этой статьи возможно, хоть и не совсем тривиальным способом, перенести на случай рассматриваемых нами пространств Харди. Подробности мы здесь опускаем, их можно найти в [12].

Теперь, когда у нас есть общий безусловный базис, наши пространства "аналитических" по одной переменной функций могут быть записаны как решетки измеримых функций: как множество последовательностей вида $\{a_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ (такая последовательность будет соответствовать функции $u(z_1, z_2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(z_1)\chi_k(z_2)$, где $\{\chi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ – тот самый безусловный базис), взятое с определенной нормой.

После доказательства того, что получившиеся решетки BMO-регулярны, общая теория из [5] дает "аналитичность" по другой переменной. Все вычисления и дополнительные подробности см. в [12]. $\square$

§4. Все остальное

§2 и §3 не охватывают лишь случай, когда один из показателей бесконечен, а другой меньше или равен единице, в этом параграфе мы скажем о нем пару слов. Во-первых, можно доказать следующий результат для случая $r = 1, s = \infty$.

Теорема 6. *Если $w_1, w_2 \in A_1$ и $w_1 w_2 \in A_\infty$ (оба условия Макенхаупта двумерные), то пара*

$$\Big(H_1(w_1(z_1, z_2)), H_\infty(w_2(z_1, z_2))\Big)$$

K-замкнута в паре

$$\Big(L_1(w_1(z_1, z_2)), L_\infty(w_2(z_1, z_2))\Big).$$

Доказательство. Нам достаточно найти такие числа

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 1,$$

что K-замкнутость соответствующих пар подпространств Харди имеет место для пар

$$\Big(L_1(w_1), L_{\frac{1}{1-\theta_2}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_2}{\theta_2 - 1}})\Big),$$

$$\Big(L_{\frac{1}{1-\theta_1}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_1}{\theta_1 - 1}}), L_{\frac{1}{1-\theta_4}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_4}{\theta_4 - 1}})\Big),$$

$$\Big(L_{\frac{1}{1-\theta_3}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_3}{\theta_3 - 1}}), L_\infty(w_2)\Big)$$

(про интерполяцию взвешенных пространств Лебега см. [7]), остальное сделает теорема типа Вольфа для K-замкнутости из [6].

Выберем произвольные $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 1$. Действительно, из факторизационной теоремы Джонса (см. в [8]) следует, что $w_1 w_2^{\frac{\theta}{\theta - 1}} \in A_{\frac{1}{1-\theta}}$, что дает K-замкнутость для пары $\Big(L_{\frac{1}{1-\theta_1}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_1}{\theta_1 - 1}}), L_{\frac{1}{1-\theta_4}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_4}{\theta_4 - 1}})\Big)$, а в сумме с теоремой 5 дает K-замкнутость еще и для пары $\Big(L_1(w_1), L_{\frac{1}{1-\theta_2}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_2}{\theta_2 - 1}})\Big)$. Выполнено, по условию, что $w_2^{\frac{1}{1-\theta_3}} w_1 w_2^{\frac{\theta_3}{\theta_3 - 1}} = w_1 w_2 \in A_\infty$, кроме того, из факторизационной теоремы Джонса снова выводим, что $w_1 w_2^{\frac{\theta_3}{\theta_3 - 1}}$ удовлетворяет условию $A_{\frac{1}{1-\theta_3}}$, а значит, теорема 3 дает нам и K-замкнутость для пары

$$\Big(L_{\frac{1}{1-\theta_3}}(w_1 w_2^{\frac{\theta_3}{\theta_3 - 1}}), L_\infty(w_2)\Big).$$

Доказательство закончено. □

Пользуясь этим методом, можно формулировать и какие-то утверждения для общего случая $r < 1, s = \infty$. К сожалению, будут получаться крайне неудобные условия на веса. Для того, чтобы метод "склейки" давал красивые результаты для всех $r < 1$, нужно дальнейшее усиление теорем из §2 и §3.

Литература

1. Д. В. Руцкий, *Весовое разложение Кальдерона–Зигмунда и некоторые его приложения к интерполяции.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **242** (2014), 186–200.
2. Xu Quanhua, *Some properties of the quotient space* $(L^1(\mathbf{T}^d)/H^1(D^d))$. — Illinois J. Math. **37**, No. 3 (1993), 437–454.
3. J. García-Cuerva, K. Kazarian, *Calderón–Zygmund operators and unconditional bases of weighted Hardy spaces.* — Stud. Math. **109**, No. 3(1994), 255–276.
4. S. V. Kislyakov, *Interpolation involving bounded bianalytic functions.* — Operator Theory: Advances and Applications **113** (2000), 135–149.
5. S. V. Kislyakov, *Interpolation of* H_p *spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. Proceedings **13** (1999), 102–140.
6. С. В. Кисляков, Шу Куанхуа, *Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы.* — Алгебра и анализ **8**, No. 4 (1996), 75–109.
7. D. Freitag, *Real interpolation of weighted* L_p*-spaces.* — Math. Nachrichten **86**, No. 1 (1978), 15–18.
8. E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press (1993).
9. J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces.* Springer, Berlin–Heidelberg (1976).
10. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* Москва "Наука" (1984).
11. K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions.* Prentice Hall Inc. (1962).
12. В. А. Боровицкий, *K-замкнутость весовых пространств Харди на* $\mathbb{T}^2$. `https://arxiv.org/abs/1707.05239`

Borovitskiy V. A. K-closedness for weighted Hardy spaces on the torus $\mathbb{T}^2$.

Certain sufficient conditions are established for the couple of weighted Hardy spaces $(H_r(w_1(\cdot,\cdot)), H_s(w_2(\cdot,\cdot)))$ on the two-dimensional torus $\mathbb{T}^2$ to be K-closed in the couple $(L_r(w_1(\cdot,\cdot)), L_s(w_2(\cdot,\cdot)))$. For $0 < r < s < 1$ the condition $w_1, w_2 \in A_\infty$ suffices (A_∞ is the Muckenhoupt condition over rectangles). For $0 < r < 1 < s < \infty$ it suffices that $w_1 \in A_\infty, w_2 \in A_s$. For $1 < r < s = \infty$, we assume that the weights are of the form $w_i(z_1, z_2) = a_i(z_1)u_i(z_1, z_2)b_i(z_2)$, and then the following conditions suffice: $u_1 \in A_p$, $u_2 \in A_1$, $u_2^p u_1 \in A_\infty$, $\log a_i, \log b_i \in BMO$. The last statement generalizes the previously known result for the case of $u_i \equiv 1$,

$i = 1, 2$. Finally, for $r = 1, s = \infty$, the conditions $w_1, w_2 \in A_1, w_1 w_2 \in A_\infty$ suffice.

С.-Петербургский государственный университет
Университетская наб. 7/9
С.-Петербург 199034, Россия

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: viacheslav.borovitskiy@gmail.com

Поступило 5 июня 2017 г.