Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 456, 2017 г.

А. О. Багапш

О РАДИУСЕ ЗВЕЗДООБРАЗНОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

§1. Введение и основной результат

В работе рассматривается вопрос о значении радиуса звездообразности для гармонических отображений единичного круга (т.е. однолистных гармонических в единичном круге комплекснозначных функций) с нормировкой

$$f(0) = 0, \quad f_z(0) = 1; \tag{1}$$

здесь и далее нижние индексы z и $\overline{z}$ означают взятие соответствующих производных в смысле Коши–Римана.

Односвязная область $U \subset \mathbb{C}$ называется звездообразной относительно точки $a \in U$, если для любой точки $z \in U$ отрезок $[a, z]$, соединяющий ее с точкой a, содержится в U. В дальнейшем мы будем иметь дело только с областями, звездообразными относительно начала координат, и будем называть их просто звездообразными. Граница жордановой звездообразной области называется звездообразной кривой. Нетрудно видеть, что условие звездообразности аналитической жордановой кривой γ эквивалентно тому, что $\arg w$ не убывает при движении точки w по γ в положительном направлении.

Радиусом звездообразности для данного класса однолистных функций, определенных в окрестности начала координат, называется такое максимальное число $R > 0$ (если оно существует), что любой круг D_r радиуса $0 < r \leqslant R$ с центром в начале координат отображается всеми функциями данного класса на звездообразную область. Вопрос о радиусе звездообразности тесно связан с вопросом о радиусе выпуклости, который определяется аналогичным образом (образ круга D_r при соответствующих отображениях является выпуклой областью).

Ключевые слова: гармоническое отображение, радиус выпуклости, гармоническая функция Кёбе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 17-11-01064).

Так как любая выпуклая область является звездообразной, то значение радиуса выпуклости является нижней оценкой (возможно, неточной) радиуса звездообразности для одного и то же класса отображений.

В дальнейшем рассматривается класс $\mathcal{S}_H$ однолистных гармонических отображений f единичного круга $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ с условиями нормировки (1), сохраняющих ориентацию границ. Как известно (см. [1]), любое гармоническое отображение $f(z)$ представимо в виде $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, где $h(z)$ и $g(z)$ – голоморфные функции, называемые голоморфными компонентами гармонического отображения f. Для $f \in \mathcal{S}_H$ эти функции, голоморфные в круге $\mathbb{D}$, отвечают нормировке

$$h(0) = 0, \qquad h'(0) = 1, \qquad g(0) = 0; \tag{2}$$

таким образом, для функций из рассматриваемого класса справедливо представление

$$\mathcal{S}_H \ni f(z) = h(z) + \overline{g(z)}, \quad h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n. \tag{3}$$

Из условий однолистности и сохранения ориентации отображением f следует (см., например, [1]), что его якобиан J_f положителен всюду в $\mathbb{D}$, т.е.

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4}$$

Условие (4) является критерием локальной однолистности отображения f.

Введем еще класс $\mathcal{S}_H^0 := \{f \in \mathcal{S}_H \colon f_{\overline{z}}(0) = 0\}$. Отметим, что между классами $\mathcal{S}_H^0$ и $\mathcal{S}_H$ существует известная (см. [2]) связь: всякая функция $f \in \mathcal{S}_H$ может быть представлена в виде

$$f = F + \overline{b}_1 \overline{F}, \tag{5}$$

где $F \in \mathcal{S}_H^0$. В самом деле, для произвольной функции $f \in \mathcal{S}_H$ можно положить

$$F = \frac{f - b_1 \overline{f}}{1 - |b_1|^2},$$

причем функция F корректно определена, поскольку из (4) при $z = 0$ следует, что $|b_1| < 1$. Можно показать (см. [1]), что класс $\mathcal{S}_H^0$ является компактным семейством.

Хорошо изученным подклассом класса $\mathcal{S}_H$ является класс $\mathcal{S}$ конформных отображений f единичного круга $\mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям нормировки $f(0)=0$ и $f'(0)=1$ (см., например, [3]). Нам понадобится также подкласс $\mathcal{C}_H$ класса $\mathcal{S}_H$, состоящий из гармонических отображений единичного круга $\mathbb{D}$ на выпуклые области; кроме того, положим $\mathcal{C}_H^0 := \{f \in \mathcal{C}_H \colon f_{\overline{z}}(0)=0\}$.

Напомним, что область U называется выпуклой в горизонтальном направлении, если ее пересечение с любой горизонтальной прямой либо связно, либо пусто. Иными словами, любая прямая, параллельная вещественной оси, либо пересекает область по целому интервалу (возможно, неограниченному), либо вовсе не пересекает. Аналогичным образом определяется выпуклость в любом другом направлении. Область U является выпуклой тогда и только тогда, когда она выпукла во всех направлениях.

В работе [2] был доказан следующий критерий выпуклости образа круга при гармоническом отображении.

Теорема 1 (Clunie, Sheil-Small, 1984). *Пусть гармоническая функция $f = h + \overline{g}$ локально однолистна в круге D_R, $R > 0$. Тогда она однолистно отображает этот круг на выпуклую область в том и только в том случае, когда при любом $\beta \in [0, 2\pi)$ функция $\varphi_\beta(z) := h(z) + e^{i\beta}g(z)$ конформно отображает D_R на область, выпуклую в горизонтальном направлении.*

Пусть γ – простая замкнутая аналитическая кривая такая, что $0 \notin \gamma$. Скажем, что γ звездообразна в направлении β, если луч, выходящий из начала координат под углом β относительно положительного направления вещественной оси, пересекает γ не внешним образом не более чем в одной точке. Под пересечением кривой γ с прямой не внешним образом мы подразумеваем такое пересечение, при котором любая окрестность точки пересечения содержит точки γ, лежащие как в одной, так и в другой полуплоскости относительно данной прямой. Жорданову область U, ограниченную такой кривой, назовем звездообразной в заданном направлении β. Звездообразность в направлениях $\dfrac{\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{2}$ естественно назвать звездообразностью в вертикальном направлении.

Жорданова область U с аналитической границей звездообразна в том и только том случае, когда она звездообразна по всем направлениям $\beta \in [0, 2\pi)$.

Аналог теоремы 1 для звездообразных областей оказывается неверным для произвольного гармонического отображения f класса $\mathcal{S}_H$ (см., например, [1, п. 6.7]). Однако в случае, когда функция f принадлежит более узкому классу $\mathcal{C}_H$, в настоящей работе доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Функция $f = h + \overline{g} \in \mathcal{C}_H$ отображает круг D_r радиуса $r \in (0, 1)$ на звездообразную область в том и только в том случае, когда при любом $\beta \in [0, 2\pi)$ функция $\varphi_\beta(z) = h(z) + e^{i\beta}g(z)$ отображает окружность $T_r = \{|z| = r\}$ на кривую, звездообразную в вертикальном направлении.*

Из этого утверждения следует, что для класса $\mathcal{C}_H$ справедлива оценка

$$R_s(\mathcal{C}_H) \geqslant R_s(\mathcal{S}) = \operatorname{th}\frac{\pi}{4} \approx 0.65$$

радиуса звездообразности. Эта оценка является наилучшей из известных в настоящий момент. Другие оценки радиусов выпуклости и звездообразности для различных классов однолистных конформных и гармонических отображений можно найти в работах [4–10].

§2. Доказательства

Пусть $f = h + \overline{g}$ – гармоническая в $\mathbb{D}$ комплексная функция. Как показано в [1], выпуклость образа окружности $f(T_r)$ эквивалентна выполнению следующего аналитического условия:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial f(re^{i\theta})}{\partial\theta}\right\} \geqslant 0 \tag{6}$$

для всех $\theta \in [0, 2\pi)$. Это условие можно переписать в терминах голоморфных компонент h и g в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z^2h''(z) + \overline{z}^2\overline{g''(z)}}{zh'(z) - \overline{z}\overline{g'(z)}} + \frac{zh'(z) + \overline{z}\overline{g'(z)}}{zh'(z) - \overline{z}\overline{g'(z)}}\right\} \geqslant 0, \tag{7}$$

где $z = re^{i\theta}$. В частности, если f – голоморфная функция, то есть $g \equiv 0$, то неравенство (7) обращается в хорошо известное условие выпуклости (см. [3])

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geqslant 0. \tag{8}$$

Звездообразность образа $f(T_r)$ окружности T_r эквивалентна (см. [1]) аналитическому условию

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{f(re^{i\theta})\right\}\geqslant 0 \tag{9}$$

для всех $\theta\in[0,2\pi)$. Это условие в терминах голоморфных компонент h и g записывается в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zh'(z)-\overline{z}\overline{g'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}\right\}\geqslant 0 \quad \text{или} \quad \left|\arg\left\{\frac{zh'(z)-\overline{z}\overline{g'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}\right\}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

В том случае, когда f – голоморфная функция ($g\equiv 0$), получаем известные условия (см. [3])

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geqslant 0 \qquad \text{или} \qquad \left|\arg\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Классическая теорема Александера гласит, что образ области U при отображении голоморфной функцией f является выпуклым тогда и только тогда, когда ее образ при отображении функцией $zf'(z)$ является звездообразной областью. Этот результат обобщается на случай гармонических функций f (см. схожую формулировку в [1, стр. 108]).

Лемма 1. *Пусть $f=h+\overline{g}$ и $F=H+\overline{G}$ – две комплекснозначные гармонические функции, голоморфные компоненты которых связаны соотношениями*

$$zH'(z)=h(z), \qquad zG'(z)=-g(z). \tag{12}$$

Тогда образ $f(T_r)$ окружности T_r является звездообразной кривой в том и лишь в том случае, когда $F(T_r)$ – выпуклая кривая.

Доказательство. В самом деле, дифференцируя соотношения (12), находим

$$h'(z)=zH''(z)+H'(z), \qquad -g'(z)=zG''(z)+G'(z).$$

Подставляя это вместе с (12) в первую формулу из (10), получаем

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zh'(z)-\overline{z}\overline{g'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{z^2H''(z)+\overline{z}^2\overline{G''(z)}}{zH'(z)-\overline{z}\overline{G'(z)}}+\frac{zH'(z)+\overline{z}\overline{G'(z)}}{zH'(z)-\overline{z}\overline{G'(z)}}\right\}.$$

Неотрицательность левой части этого равенства эквивалентна звездообразности кривой $f(T_r)$ (см. формулу (10)), а неотрицательность правой – выпуклости кривой $F(T_r)$ (см. (7)). Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. Определим для функции f соответствующую ей функцию F согласно соотношениям (12) с дополнительными условиями нормировки $H(0) = G(0) = 0$. Так как $f \in \mathcal{C}_H$, то при $0 < |z| < 1$ имеет место неравенство $|h(z)| > |g(z)|$ (см. [2]). Но тогда для якобиана $J_F(z)$ функции F справедлива формула

$$J_F(z) = |H'(z)|^2 - |G'(z)|^2 = \frac{|h(z)|^2 - |g(z)|^2}{|z|^2} > 0,$$

что означает локальную однолистность отображения F. По лемме 1 звездообразность кривой $f(T_r)$ равносильна выпуклости кривой $F(T_r)$. Но так как функция F локально однолистна в $\mathbb{D}$, то, согласно теореме 1, область $F(D_r)$ и соответствующая кривая $F(T_r)$ являются выпуклыми в том и только в том случае, когда при любом выборе $\beta \in [0, 2\pi)$ голоморфная функция $\Phi_\beta(z) = H(z) - e^{i\beta}G(z)$ осуществляет конформное отображение круга D_r на выпуклую в горизонтальном направлении область.

Будем считать сначала, что кривая $\Phi_\beta(T_r)$ не содержит прямолинейных горизонтальных участков. Рассмотрим функцию $V(\theta) := \mathrm{Im}\, \{\Phi_\beta(re^{i\theta})\}$, не постоянную ни на каком промежутке и обладающую периодом 2π. Не нарушая общности, будем считать, что она возрастает в окрестности точек $\theta = \pm\pi$. Покажем, что выпуклость образа $\Phi_\beta(D_r)$ в горизонтальном направлении равносильна тому, что $V(\theta)$ имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ ровно по одной точке строгого локального максимума и минимума.

Пусть $\Phi_\beta(D_r)$ выпукла в горизонтальном направлении. Предположим, что функция $V(\theta)$ имеет две различные точки θ_1 и θ_2 строгого локального максимума и $V(\theta_1) \leqslant V(\theta_2)$. Тогда между ними имеется точка $\theta_{\min}$ такая, что $V(\theta_{\min}) < V(\theta_1)$. В окрестности точки θ_1 найдутся две различные точки θ_1' и θ_1'', где $\theta_1' < \theta_1'' < \theta_{\min}$, такие, что $V(\theta_{\min}) < V(\theta_1') = V(\theta_1'') < V(\theta_1) \leqslant V(\theta_2)$. Но тогда непрерывная на отрезке $[\theta_1'', \theta_2]$ функция $V(\theta)$ принимает на нем все свои промежуточные значения от $V(\theta_{\min})$ до $V(\theta_2)$, в том числе существует точка $\theta_2' > \theta_1''$ такая, что $V(\theta_2') = V(\theta_1') = V(\theta_1'')$, а это противоречит выпуклости кривой $F(T_r)$ в горизонтальном направлении. Для случая локального минимума рассуждения аналогичны.

Пусть теперь, обратно, известно, что функция $V(\theta)$ имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ по одной точке строгого локального максимума и минимума $\theta_{\max}$ и $\theta_{\min}$ соответственно. Так как $V(\theta)$ возрастает в окрестности точек $\pm\pi$, то $\theta_{\max} < \theta_{\min}$. На интервале $(-\pi, \pi)$ найдется точка θ_0, такая, что $V(\theta_0) = V(-\pi) = V(\pi)$, причем $\theta_{\max} < \theta_0 < \theta_{\min}$.

Покажем, что на отрезке $[-\pi, \theta_0]$ функция $V(\theta)$ принимает любое свое значение не более, чем два раза. В самом деле, если какое-либо значение принимается, например, в трех различных точках $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, то на отрезке $[\theta_1, \theta_3]$ имеется точка строгого локального минимума, что противоречит тому, что на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ есть только одна точка минимума. Аналогичные рассуждения применимы к отрезку $[\theta_0, \pi]$.

Так как множества значений, принимаемых функцией $V(\theta)$ на интервалах $(-\pi, \theta_0)$ и (θ_0, π), не пересекаются, то и на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ функция $V(\theta)$ принимает любое свое значение не более, чем два раза, что означает, что кривая $\Phi_\beta(D_r)$ выпукла в горизонтальном направлении.

Таким образом, существуют только два значения $\theta = \theta_{\min}$ и $\theta = \theta_{\max}$, при которых

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Im}\,\left\{\Phi_\beta(re^{i\theta})\right\} = 0$$

и при этом $V'(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Im}\,\left\{\Phi_\beta(re^{i\theta})\right\}$ меняет знак при переходе через точки $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$. Действительно, если найдется еще какое-либо значение θ', при котором $V'(\theta') = 0$, то при переходе через это значение функция $V'(\theta)$ не меняет знака, иначе θ' – точка экстремума.

Используя соотношения (12), получим для $z = re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Im}\,\{\Phi_\beta(z)\} &= \mathrm{Im}\left\{iz\Phi_\beta'(z)\right\} = \mathrm{Re}\,\left\{z\Phi_\beta'(z)\right\}\\ &= \mathrm{Re}\,\left\{z(H'(z) - e^{i\beta}G'(z))\right\} = \mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(z)\}\,.\end{aligned}$$

Из вышесказанного следует, что только при $\theta = \theta_{\min}$ и $\theta = \theta_{\max}$ будет

$$\mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(re^{i\theta})\} = 0,$$

причем величина $\mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(re^{i\theta})\}$ имеет разные знаки справа и слева от $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$. Для остальных точек θ, где $\mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(re^{i\theta})\} = 0$, величина $\mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(re^{i\theta})\}$ не меняет знак при переходе через них.

Это значит, что мнимая ось пересекает не внешним образом кривую $\varphi_\beta(T_r)$ ровно в двух точках $w_{\max} = \varphi_\beta(re^{i\theta_{\max}})$ и $w_{\min} = \varphi_\beta(re^{i\theta_{\min}})$; всем остальным точкам пересечения будут соответствовать значения θ, при переходе через которые $\mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(re^{i\theta})\}$ не меняет знак, то есть кривая $\varphi_\beta(T_r)$ пересекает мнимую ось в точке $\varphi_\beta(re^{i\theta})$ внешним образом. Таким образом, $\varphi_\beta(T_r)$ звездообразна в вертикальном направлении.

Если же кривая $\Phi_\beta(T_r)$ содержит прямолинейные горизонтальные участки, то им соответствуют прямолинейные вертикальные участки кривой $\varphi_\beta(T_r)$, что не нарушает звездообразности последней в вертикальном направлении. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Для класса $\mathcal{C}_H$ справедлива оценка*

$$R_s(\mathcal{C}_H) \geqslant \operatorname{th}\frac{\pi}{4} \approx 0.65$$

радиуса звездообразности.

Доказательство. Пусть сначала $f = h+\overline{g} \in \mathcal{C}_H^0$. Тогда, согласно теореме 1, при любом $\beta \in [0, 2\pi)$ функция $\varphi_\beta(z) = h(z) + e^{i\beta}g(z)$ конформна во всем единичном круге $\mathbb{D}$. Кроме того, из условий нормировки (2) для класса $\mathcal{S}_H$ и дополнительного условия $g'(0) = 0$, определяющего его подкласс $\mathcal{S}_H^0$, следует, что $\varphi_\beta \in \mathcal{S}$. Но для класса $\mathcal{S}$ конформных отображений, как известно (см. выше), радиус звездообразности равен

$$R_s(\mathcal{S}) = \operatorname{th}\frac{\pi}{4} \approx 0.65.$$

Поэтому при любом $r \leqslant R_s(\mathcal{S})$ область $\varphi_\beta(D_r)$ является звездообразной (во всех направлениях, в том числе и в вертикальном). Но тогда, согласно теореме 2, область $f(D_r)$ также звездообразна. Ввиду связи (5) между функциями классов $\mathcal{C}_H$ и $\mathcal{C}_H^0$, область $f(D_r)$ будет звездообразной и для произвольной функции $f \in \mathcal{C}_H$.

Следствие доказано. $\square$

Литература

1. P. Duren, *Harmonic mappings in the plane.* — Cambridge Tracts in Math., Cambridge Univ. Press **156** (2004).
2. J. G. Clunie, T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. **9** (1984), 3–25
3. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* — М.: Наука (1966).
4. T. Sheil-Small, *Constants for planar harmonic mappings.* — J. London Math. Soc., **42** (1990), 237–248.
5. A. W. Goodman, E. B. Saff, *On univalent functions convex in one direction.* — Proc. Amer. Math. Soc., **73** (1979), 183–187.
6. St. Ruscheweyh, L. Salinas, *On the preservation of direction-convexity and the Goodman-Saff conjecture.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I., **14** (1989), 63–73.

7. R. Nevanlinna, *Über die schlichten Abbildungen der Einheitskreises.* — Oversckt av Finska Vet. Soc. Forth. (A), Vol. 62 (1919-1920), pp. 1–14.
8. G. M. Grunsky, *Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung.* — Jahresber. deutsch. Math. Vereining, **43** (1934), 140–142.
9. D. Kalaj, S. Ponnusamy, M. Vuorinen, *Radius of close-to-convexity and fully starlikeness of harmonic mappings.* — Complex variables and elliptic equations, Vol. 59, No. 4 (2014), 539–552.
10. О. Р. Эйланголи, *Об оценке радиуса звездности в классах гармонических отображений.* — Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика, **17** (2010), 133–140.

Bagapsh A. O. On the radius of starlikeness for harmonic mappings.

In the paper we obtain a criterion of starlikeness for the image of the disk with center at the origin and radius $r \in (0, 1)$ under univalent harmonic mapping by a function that maps the unit disk onto a convex domain. This criterion is similar to the criterion of image convexity, and it is expressed in terms of starlikeness in one direction. As a corollary we obtain a new estimate for the radius of starlikeness of the class of univalent harmonic mappings that take the unit disk onto a convex domain.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана;
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: a.bagapsh@gmail.com

Поступило 30 мая 2017 г.