Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 456, 2017 г.

Г. Г. Амосов, А. С. Мокеев

О ПОСТРОЕНИИ АНТИКЛИК ДЛЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ГРАФОВ

§1. Введение

В [1] было введено понятие операторной системы $\mathcal{V}$, то есть линейного пространства, состоящего из операторов в гильбертовом пространстве H, для которого выполнены условия

$$I \in \mathcal{V},\ A \in \mathcal{V} \ \Rightarrow A^* \in \mathcal{V}.$$

В контексте квантовой теории информации операторные системы принято называть *некоммутативными операторными графами* [2, 3]. Мы будем смотреть на некоммутативные операторные графы в духе теории квантовых кодов, исправляющих ошибки [4, 5]. Графы, состоящие из коммутирующих операторов, входят в данную теорию в качестве частного случая. Мы будем полагать, что $\mathcal{V}$ порождается семейством унитарных операторов $U_j,\ 1 \leqslant j \leqslant k$, называемых ошибками, так что

$$\mathcal{V} = \mathrm{Lin}\{I, U_1, U_1^*, \dots, U_k, U_k^*\}.$$

Квантовым кодом называется любое подпространство $K \subset H$. Предполагается, что в единичных векторах $\psi \in H$ закодирована некоторая информация. Принимая во внимание, что минимальный объем информации представляет из себя бит, имеет смысл рассматривать размерности $\dim K \geqslant 2$. Размерность $\dim K$ называется *длиной кода.* Любой выбор ортонормированного базиса (f_j) в K фиксирует набор слов f_j, которыми можно кодировать классическую или квантовую информацию. Говорят, что код K является *квантовым кодом, исправляющим ошибки* из $\mathcal{V}$, если

$$\dim P_K \mathcal{V} P_K = 1, \tag{1}$$

Ключевые слова: некоммутативный операторный граф; квантовые коды, исправляющие ошибки.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00162).

где P_K является ортогональным проектором на подпространство K. Поскольку, по определению, $I \in \mathcal{V}$, из (1) вытекает, что

$$P_K V P_K = c_V P_K, \quad c_V \in \mathbb{C},$$

для любого $V \in \mathcal{V}$. Следовательно, для ортонормированного базиса (f_j) пространства K получаем

$$(f_j, V f_k) = \delta_{jk} c_V.$$

Таким образом, векторы $V f_j$ и f_k являются ортогональными, если $j \neq k$ и $V \in \mathcal{V}$. Тем самым, после воздействия ошибками из $\mathcal{V}$ на код K, мы получим новые слова, которые можно безошибочно различить. Это обстоятельство мотивирует название *код, исправляющий ошибки.* В классической теории графов набор из k вершин графа с n вершинами называется антикликой, если все эти вершины не соединены попарно рёбрами. По аналогии, проекторы P_K, обладающие свойством (1), были названы в [6] *квантовыми антикликами.* Отметим, что если некоммутативный операторный граф $\mathcal{V}$ представляет из себя максимальную коммутативную алгебру операторов в гильбертовом пространстве H, тогда для $\mathcal{V}$ не существует квантовых антиклик P_K [6].

Нашей целью является построение некоммутативных операторных графов $\mathcal{V}$, для которых существуют антиклики P_K. Данная задача имеет смысл только для пространств размерности $\dim H > 2$, поскольку $\dim K \geqslant 2$ по определению. Ранее такая задача решалась для абстрактных некоммутативных операторных графов $\mathcal{V}$. Оказалось [5], что в пространстве H с $\dim H = n$ заведомо существует антиклика $P_K, \dim K = k$, если выполнено условие

$$\dim \mathcal{V}(\dim \mathcal{V} + 1) \leqslant \frac{n}{k}. \tag{2}$$

Доказательство является неконструктивным и основывается на глубоких комбинаторных результатах [7, 8]. В частном случае, когда граф состоит из коммутирующих операторов, оценка (2) может быть заменена на менее обременительную [3]:

$$\dim \mathcal{V} \leqslant \frac{n-k}{k-1}. \tag{3}$$

В [4, 5] и последующих работах данной школы задача построения антиклик решалась для случая, когда ошибки порождаются матрицами

Паули. В отличии от предлагаемой работы, рассматривались коды для тензорного произведения из N копий двумерного пространства.

Состоянием квантовой системы, описываемой гильбертовым пространством H, называется положительный оператор с единичным следом. Множество всех состояний обозначается символом $\mathfrak{S}(H)$. Среди всех состояний важную роль играют чистые состояния – ортогональные проекторы на одномерные подпространства. Составные квантовые системы описываются состояниями из $\mathfrak{S}(H \otimes K)$ в тензорном произведении гильбертовых пространств H и K. В этом случае следует различать *разделимые состояния* $\rho \in \mathfrak{S}(H \otimes K)$, то есть такие, что они могут быть представлены в виде $\rho = \sum\limits_j \pi_j \rho_j \otimes \tilde{\rho}_j$, где $\rho_j \in \mathfrak{S}(H)$, $\tilde{\rho}_j \in \mathfrak{S}(K)$, $\pi_j \geqslant 0$ и $\sum\limits_j \pi_j = 1$, и *сцепленные состояния*, не обладающие этим свойством. Наличие сцепленных состояний является чисто квантовым эффектом и их использование при кодирование может давать выигрыш в некоторых важных случаях [9]. Главной целью предлагаемой работы является оценка преимущества, которое даёт использование сцепленных состояний для построения квантовых антиклик. Поскольку понятие сцепленности определяется в пространствах H, представляющих из себя тензорные произведения двух пространств, задача имеет смысл только для размерности $\dim H \geqslant 4$ (минимальная размерность соответствует тензорному произведению двух двумерных пространств).

В данной работе в гильбертовом пространстве H строятся некоммутативные операторные графы $\mathcal{V}$, для которых существуют квантовые антиклики P_K на подпространства $K \subset H$. Во втором разделе $\dim H = 4$, $\dim \mathcal{V} = 5$, $\dim K = 2$. В третьем разделе $\dim H = n^2$, $\dim \mathcal{V} = 2n(n-1)+1$, $\dim K = n$. При этом, во втором и третьем разделах подпространство K порождается единичными векторами, проекторы на которые являются разделимыми состояниями. В четвертом разделе показано, что использование сцепленных состояний позволяет увеличить размерность графа $\mathcal{V}$, для которого существует антиклика.

Технически интересен случай, когда размерность антиклики растет при увеличении размерности пространства состояний, это увеличивает количество информации, корректируемой кодированием, но также важно, чтобы размерность операторного графа была высокой, это дает возможность работать при более низком уровне надежности защиты от ошибок (декогеренции), которые являются главной сложностью при практической реализации квантово-информационных технологий [9]. Если принять размерность пространства $\dim H$ равной n^2 (тензорное произведение двух n-мерных пространств), а размерность желаемой антиклики, например, линейно зависящей от n, то оценка (2) даст оценку сверху для размерности операторного графа $O(\sqrt{n})$, а для коммутативных графов оценка (3) дает размерность $O(n)$. Построенный в четвертом разделе работы пример операторного графа имеет размерность $O(n^4)$ при тех же условиях на размерности пространства и антиклики.

§2. Коды, исправляющие ошибки в пространстве размерности 4

Согласно оценке (3), в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\dim\mathcal{H} = 4$, для любого коммутативного операторного графа $\mathcal{V}, \dim\mathcal{V} = 2$, существует антиклика P_K размерности $\dim K = 2$. Построение такой системы не представляет никакого труда. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ и $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – стандартные матрицы Паули. Пусть $\mathcal{V}$ порождается матрицей $I \otimes \sigma_x$. Тогда проектор P_K на подпространство $K = \left\{\mathbb{C}^2 \otimes \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{C}\right\}$, $\dim K = 2$, является антикликой для $\mathcal{V} = \mathrm{Lin}\{I \otimes I,\ I \otimes \sigma_x\}$

Ниже мы построим коммутативный операторный граф $\mathcal{V}, \dim\mathcal{V} = 3$, для которого существует антиклика P_K, $\dim K = 2$. Более того, мы покажем, что можно добавить ещё два элемента к $\mathcal{V}$, так что $\dim\mathcal{V} = 5$ и P_K останется антикликой для расширенного некоммутативного графа.

Рассмотрим матрицы $T = \sigma_x \otimes I,\ U = \sigma_y \otimes I,\ V = I \otimes \sigma_y$ и $W = I \otimes \sigma_z$, действующие как операторы в $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Определим векторы $f_\pm \in \mathcal{H}$ по формуле

$$f_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Предложение 1. *Имеют место равенства*

$$(f_\pm, x f_\pm) = 0, \quad (f_\pm, x f_\mp) = 0,$$

$x \in \{T, U, V, W\}$.

Доказательство. Докажем утверждение для $x = U$. Остальные три случая доказываются аналогично. Имеем:

$$(f_+, Uf_+) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$(f_-, Uf_-) = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$(f_+, Uf_-) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = 0.$$

□

Рассмотрим подпространство K, $\dim K = 2$, натянутое на векторы f_+ и f_-.

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\dim P_K \mathcal{V} P_K = 1.$$

Доказательство. Из предложения 1 следует, что $P_K x P_K = 0$, если $x \in \{U, V, W\}$. По определению операторной системы, в неё входят не только T, U, V и W, но и тождественный оператор I. Для него $P_K I P_K = P_K$. □

Замечание 1. Построенный нами некоммутативный операторный граф и квантовая антиклика соответствуют алгоритму П. Шора по исправлению ошибок [9]. Тем не менее, у П. Шора восстановление оказывается возможным с асимптоитчески убывающей ошибкой при увеличении длины кода. В нашей случае восстановление точное, но в каждом кубите допускается не более двух (например σ_x и σ_y) из трёх $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ возможных ошибок.

§3. Пространства размерности n^2

В этом пункте мы обобщим конструкцию на пространства $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, $n > 2$, то есть когда размерность пространства $\dim \mathcal{H}$ равна n^2. Обозначим через $(e_j)_{j=1}^n$ стандартный базис в пространстве $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим комплексную матрицу Адамара $H = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ с коэффициентами $a_{jk} = e^{\frac{2\pi i}{n}(j-1)(k-1)}$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$. Как известно [10], элементы

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} e_k, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим унитарные операторы X и Z, действующие в пространстве $\mathbb{C}^n$ по формуле

$$Xe_j = e^{\frac{2\pi i}{n}(j-1)}e_j, \quad Zf_j = e^{\frac{2\pi i}{n}(j-1)}f_j,$$

$1 \leqslant j \leqslant n$. Отметим, что

$$Xf_j = f_{j+1 \bmod n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{4}$$

и операторы $Y_{km} = X^k Z^m$, $0 \leqslant k, m \leqslant n-1$, называемые обобщенными матрицами Паули, удовлетворяют соотношениям Гейзенберга–Вейля вида

$$Y_{km}Y_{k'm'} = e^{\frac{2\pi i}{n}(mk'-km')}Y_{k'm'}Y_{km}, \quad 0 \leqslant m, k, m', k' \leqslant n-1. \tag{5}$$

Определим векторы $h_j \in \mathcal{H}$ по формуле

$$h_j = f_j \otimes f_j,$$

$1 \leqslant j \leqslant n$.

Введем унитарные операторы $U_k = XZ^k \otimes I$ и $V_k = I \otimes XZ^k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Предложение 2. *Имеет место равенство*

$$(h_j, U_k^s h_m) = (h_j, V_k^s h_m) = 0,$$

$1 \leqslant j, m \leqslant n,\ 1 \leqslant s \leqslant n-1,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1.$

Доказательство. Рассмотрим случай оператора U_k. Доказательство для V_k проводится аналогично. Справедливы равенства

$$(h_j, U_k^s h_k) = (f_j \otimes f_j, ((XZ^k)^s \otimes I)(f_k \otimes f_k)) = 0,$$

если $j \neq k$, и

$$(h_j, U_k^s h_j) = (f_j, (XZ^k)^s f_j).$$

Применяя соотношения (5), получаем, что $(XZ^k)^s = c_{ks}X^sZ^k$, где $|c_{ks}| = 1$. Таким образом,

$$(f_j, (XZ^k)^s f_j) = \overline{c_{ks}}e^{-\frac{2\pi i}{n}ksj}(f_j, f_{j+s \bmod n}) = 0,$$

поскольку $s \neq 0 \bmod n$ по условию. □

Рассмотрим некоммутативный операторный граф $\mathcal{V}$, порожденный унитарными операторами U_k^s, V_k^s, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Обозначим через P_K проектор на n-мерное подпространство K, натянутое на векторы h_j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Теорема 1. *Проектор P_K является квантовой антикликой для $\mathcal{V}$.*

Доказательство. Из предложения 2 немедленно вытекает соотношение $P_K U_k^s P_K = P_K V_k^s P_K = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Для фиксированного k элементы $(U_k^s)_{s=0}^{n-1}$ и $(V_k^s)_{s=0}^{n-1}$ образуют циклические группы. Таким образом,

$$\mathcal{V} = \mathrm{Lin}\left(U_k^s, V_k^s, (U_k^s)^*, (V_k^s)^*, 0 \leqslant k, s \leqslant n-1\right) \tag{6}$$

и P_K, действительно, является антикликой. □

Теорема 2. *Размерность* $\dim \mathcal{V}$ *равна* $2n(n-1)+1$.

Доказательство. Учитывая, что Z, X унитарны и порождают циклические группы порядка n, и пользуясь соотношениями (5), получаем

$$((XZ^k)^s)^* = cX^{-s}Z^{-ks} = cX^{n-s}Z^{-ks} = cX^jZ^m,$$
$$1 \leqslant j \leqslant n-1, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1,$$

$c \in \mathbb{C}$. Из этого следует, что

$$\mathrm{Lin}((U_k^s)^*, (V_k^s)^*, 0 \leqslant k, s \leqslant n-1) \subset \mathrm{Lin}(U_k^s, V_k^s, 0 \leqslant k, s \leqslant n-1).$$

Значит, можно сузить множество порождающих графа

$$\mathcal{V} = \mathrm{Lin}(U_k^s, V_k^s, \, 0 \leqslant k, s \leqslant n-1).$$

Из того, что операторы Гейзенберга–Вейля (то есть операторы, удовлетворяющие соотношениям (5)) – линейно-независимая система операторов, следует утверждение. □

§4. Использование сцепленных состояний для построения антиклик

В этом разделе мы покажем, что некоммутативный операторный граф из предыдущего раздела можно существенно расширить, так что для нового графа также будет существовать антиклика. Этого удастся добиться за счёт использования сцепленных состояний.

Зададим отображение $\tau : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{N}$ по формуле $\tau(j) = j+1$. Данное отображение помогает параметризовать векторы f_j элементами циклической группы $\mathbb{Z}_n$. Пусть размерность n есть $p \cdot y$, где $p, y \in \mathbb{N}$.

Тогда $\mathbb{Z}_p$ – циклическая подгруппа в $\mathbb{Z}_n$. Пусть $\chi : \mathbb{Z}_n \to \{0,1\}$ – индикатор множества $\mathbb{Z}_p$ как подмножества в $\mathbb{Z}_n$. Зададим следующий вектор по формуле:

$$q_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \chi(j) f_{\tau(j)} \otimes f_{\tau(j)}, \tag{7}$$

где суммирование ведется по индексу $j \in \mathbb{Z}_n$. Предположим, что

$$(h+1)(d+1) \geqslant y \geqslant (h+1)d$$

для двух фиксированных $h, d \in \mathbb{N}$. Тогда вектор (7) рекурсивно порождает следующий набор ортогональных векторов $(q_k)_{k=1}^d$:

$$q_{k+1} = (X^{h+1} \otimes X^{h+1}) q_k,$$

где $1 \leqslant k < d$. Обозначим $K_1 = \mathrm{Lin}(q_k)_{k=1}^d \subset K$ и пусть P_{K_1} – ортогональный проектор на K_1. Обозначим через $\left\lfloor \frac{m}{y} \right\rfloor$ остаток от деления на y. Еще зададим множество

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \left\lfloor \frac{m}{y} \right\rfloor \neq (d-j)(h+1), \left\lfloor \frac{m}{y} \right\rfloor \neq y + (j-d)(h+1), \text{ где } 1 \leqslant j \leqslant d\}.$$

Рассмотрим три множества операторов:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathrm{Lin}(X^m Z^k \otimes X^j Z^s, (X^m Z^k \otimes X^j Z^s)^*, \quad m \neq j),\\
\mathcal{B} &= \mathrm{Lin}(X^m Z^k \otimes X^m Z^s, (X^m Z^k \otimes X^m Z^s)^*, \ m \in A),\\
\mathcal{C} &= \mathrm{Lin}(X^m Z^k \otimes X^m Z^s, (X^m Z^k \otimes X^m Z^s)^*,\\
&\qquad k + s \not\equiv 0 \mod p, \ 0 \leqslant m \leqslant n-1).
\end{aligned}$$

Расширим операторный граф $\mathcal{V}$ (6) этими множествами:

$$\mathcal{V}_1 = \mathrm{Lin}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{V}).$$

Теорема 3. *Проектор P_{K_1} является квантовой антикликой для $\mathcal{V}_1$.*

Доказательство. Для операторов из множеств $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ нужно доказать утверждение, аналогичное предложению 2.

Любой оператор $V \in \mathcal{A}$ действует из K в $\mathrm{Lin}(f_k \otimes f_j, j \neq k)$, что влечет справедливость нужного утверждения.

Заметим, что

$$(X^m \otimes X^m) q_k = (X^{\lfloor \frac{m}{y} \rfloor} \otimes X^{\lfloor \frac{m}{y} \rfloor}) q_k.$$

Если $m \in A$, то, исходя из структуры множества A, векторы $(X^m \otimes X^m)q_k$ и q_j не могут совпасть, а значит они ортогональны, что доказывает нужное утверждение для $\mathcal{B}$.

Далее,

$$(Z^k \otimes Z^s q_j, q_l) = 0, \quad \text{при } j \neq l.$$

Теперь достаточно рассмотреть выражение вида

$$\begin{aligned}(Z^k \otimes Z^s q_j, q_j) &= (I \otimes Z^{s+k} q_j, q_j) \\ &= e^{\frac{2\pi i}{n}(h+1)(j-1)} e^{-\frac{2\pi i}{n}(h+1)(j-1)} (I \otimes Z^{s+k} q_1, q_1) = 0,\end{aligned}$$

первое равенство очевидно следует из структуры пространства K_1. Так как $k+s \not\equiv 0 \mod p$, то $I \otimes Z^{s+k} q_1$ и q_1, как уже отмечалось, элементы ортогонального базиса в подпространстве размерности p [10]. Добавив операторы X^m на каждой клетке, мы ничего существенно не изменим, ибо исходя из коммутационных соотношений, справедлива формула

$$X^m Z^k \otimes X^m Z^s = c(Z^k \otimes Z^s)(X^m \otimes X^m)$$

для некоторого $c \in \mathbb{C}$. То есть все можно рассматривать аналогично, для произвольных $1 \leqslant l, j \leqslant d$:

$$((Z^k \otimes Z^s)(X^m \otimes X^m) q_l, q_j) = g(I \otimes Z^{s+k} q_1, q_1) = 0,$$

где g или нуль, в случае $(X^m \otimes X^m) q_l \neq q_j$, или некоторый унимодулярный фактор. Доказательство ортогональности данных векторов завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 2. В ходе доказательства было установлено, что для графа $\mathrm{Lin}(\mathcal{A} \cup I)$ проектор P_K является антикликой.

Теорема 4. *Размерность графа можно вычислить по формуле*

$$\dim \mathcal{V}_1 = n^3(n-1) + (\#A^{\text{`}})n^2 + (n - \#A^{\text{`}}) \left(y \left(\frac{p(p+1)}{2} - 1 \right) + \frac{n(y-1)}{2} \right) + 1,$$

где $\#$ обозначает число элементов в $A^{\text{`}} = A \cap \{j : 1 \leqslant j < n\}$.

Доказательство. Из соображений, аналогичных рассуждениям в доказательстве теоремы 2, получаем

$$(X^{m_1} Z^{k_1} \otimes X^{j_1} Z^{s_1})^* = c X^{n-m_1} Z^{k'} \otimes X^{n-j_1} Z^{s'}, c \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, $(X^{m_1} Z^{k_1} \otimes X^{j_1} Z^{s_1})^* \in \mathrm{Lin}(X^m Z^k \otimes X^j Z^s,\ m \neq j)$. Это означает, что $\dim \mathcal{A} = n^3(n-1)$, поскольку индексы m и j входят таким же числом способов, что и размещения длины 2 в наборе из n

точек, то есть $n(n-1)$ способами, еще 2 степени свободы добавляет выбор индексов k и s.

Операторы Гейзенберга–Вейля образуют ортонормированный базис в пространстве всех операторов относительно скалярного произведения Гильберта–Шмидта $(A,B)=\mathrm{tr}\,(AB^*)$, из этого ясно, что для исследования вопроса переполненности системы образующих $\mathcal{V}_1$ нужно выяснить, нет ли среди них совпадающих пар.

Для $1\leqslant m_1\leqslant n-1,\ m_1\in A$, поделим m_1 с остатком на y:

$$m_1=ty+r,$$

тогда разложение числа $n-m_1$ примет вид

$$n-m_1=py-ty-r=(p-t-1)y+(y-r).$$

Значит, система неравенств

$$\begin{cases} \left\lfloor\frac{m_1}{y}\right\rfloor\neq(d-j)(h+1), & 0\leqslant j\leqslant d,\\ \left\lfloor\frac{m_1}{y}\right\rfloor\neq y+(j-d)(h+1), & 0\leqslant j\leqslant d\end{cases}$$

эквивалентна системе

$$\begin{cases} \left\lfloor\frac{n-m_1}{y}\right\rfloor\neq(d-j)(h+1), & 0\leqslant j\leqslant d,\\ \left\lfloor\frac{n-m_1}{y}\right\rfloor\neq y+(j-d)(h+1), & 0\leqslant j\leqslant d\end{cases}$$

Из этого получаем:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Lin}((X^{m_1}Z^{k_1}\otimes X^{m_1}Z^{s_1})^*)\\ &=\mathrm{Lin}(X^{n-m_1}Z^{k_2}\otimes X^{n-m_1}Z^{s_2})\subset\mathrm{Lin}(X^mZ^k\otimes X^mZ^s,\ m\in A).\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{B}$ имеет $(\#A^{`})n^2$ линейно-независимых образующих. Аналогично, $k+s\neq ph_0$, где $1\leqslant h_0\leqslant y$, тогда и только тогда, когда $k+s\neq p(y-h_0)$. Значит, для произвольных $k+s\neq ph_0$ верно включение

$$\mathrm{Lin}((Z^k\otimes Z^s)^*)\subset\mathrm{Lin}(Z^k\otimes Z^s,\ k+s\neq ph).$$

Количество способов выбрать оператор $Z^k\otimes Z^s$ так, что $k+s=r$, где $0<r<p$, равно $r+1$, значит число образующих $\mathcal{C}$, не содержащихся в $\mathcal{B}$, считается как двойная сумма с множителем

$$R_A\sum_{k=0}^{y-1}\sum_{j=1}^{p-1}(j+1+kp)=R_A\left(y\left(\frac{p(p+1)}{2}-1\right)+\frac{p(y-1)y}{2}\right),$$

где $R_A = (n - \#A^{`})$. Из данных рассуждений получаем

$$\dim \mathcal{V}_1 = n^3(n-1) + (\#A^{`})n^2 + (n - \#A^{`})\left(y\left(\frac{p(p+1)}{2} - 1\right) + \frac{n(y-1)}{2}\right) + 1,$$

еще одна образующая – тождественный оператор. □

Литература

1. M. D. Choi, E. G. Effros, *Injectivity and operator spaces.* — J. Funct. Anal. **24** (1977), 156–209.
2. R. Duan, S. Severini, A. Winter, *Zero-error communication via quantum channels, noncommutative graphs and a quantum Lovasz theta function.* — IEEE Trans. Inf. Theory **59** (2013) 1164–1174; `arXiv:1002.2514`.
3. N. Weaver, *Quantum relations.* — Mem. Amer. Math. Soc. **215** (2012), v-vi, 81–140.
4. E. Knill, R. Laflamme, *Theory of quantum error-correcting codes.* — Phys. Rev. A **55** (1997), 900–911.
5. E. Knill, R. Laflamme, L. Viola, *Theory of quantum error correction for general noise.* — Phys. Rev. Lett. **84** (2000), 2525–2528.
6. N. Weaver, *A "quantum" Ramsey theorem for operator systems.* — `arxiv:1601.01259` (2016).
7. H. Tverberg, *A generalization of Radon's theorem.* — J. London Math. Soc. **41** (1966), 123–128.
8. H. Tverberg, *A generalization of Radon's theorem,* II. — Bull. Austral. Math. Soc. **24** (1981), 321–325.
9. P. Shor, *Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory.* — Phys. Rev. A **52** (1995) R2493–R2496.
10. U. Haagerup, *Orthogonal maximal abelian *-subalgebras of the $n \times n$ matrices and cyclic n-roots.* — Operator Algebras and Quantum Field Theory (Rome), 1996 (Cambridge, MA: International Press), 296–322.

Amosov G. G., Mokeev A. S. Construction of anticliques for noncommutative operator graphs.

Anticliques are constructed for noncommutative operator graphs generated by generalized Pauli matrices. It is shown that the use of entangled states for construction of a subspace K enables one to considerably increase the dimension of a noncommutative operator graph for which the projection onto K is an anticlique.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `gramos@mi.ras.ru`

Поступило 4 июля 2017 г.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: `alexandrmokeev@yandex.ru`