Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 455, 2017 г.

А. Л. Смирнов

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$

Введение

Данная работа связана с программой геометризации арифметики, где в качестве образца рассматривается алгебраическая геометрия над конечным полем. В настоящее время имеется по меньшей мере два систематических подхода к построению арифметической геометрии: подход Ш. Харана [1] и подход Н. Дурова [2]. Видимо, ни один из существующих подходов не отвечает всем пожеланиям. Тем не менее в каждой из теорий появились обобщенные кольца и схемы, изучение которых интересно как само по себе, так и для прояснения общей ситуации. Данная работа связана с подходом Дурова.

Рассмотрим сначала геометрический аналог интересующих нас арифметических проблем. Пусть X – алгебраическая кривая над некоторым полем F и $K = F(X)$ – поле рациональных функций на X. Нас интересуют бирациональные модели поля K, то есть алгебраические кривые V/F с фиксированным изоморфизмом $F(V) = K$. Ситуация с такими моделями достаточно ясна. А именно, среди моделей K имеется одна особенно приятная – полная и гладкая. Все другие модели могут быть получены из полной и гладкой с помощью вырезания и стягивания конечных подсхем (см., например, [3]).

Процедура вырезания полностью применима и в чисто арифметическом случае, то есть для спектров колец целых в числовых полях. Что касается процедуры стягивания, то ее применимость весьма ограничена. А именно, можно стягивать только равнохарактеристические подсхемы, да и то не все. При этом будут получаться спектры немаксимальных порядков числовых полей. Но нельзя, например, создать касп у $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ или склеить точки разных характеристик.

Ключевые слова: обобщенное кольцо, обобщенная схема, арифметическая кривая, особенность, касп, нодальная точка, бирациональный, модель, поле из одного элемента, гомотопическая группа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант РФФИ-16-01-00750).

Ситуация со стягиванием изменилась после введения обобщенных колец и схем. Примеры возникающих при этом обобщенных колец указаны в [4] и названы конгруэнц-кольцами. В данной работе мы продолжаем изучение обобщенных бирациональных моделей числовых полей. В §1 приведены сведения об обобщенных кольцах. В частности, введено понятие конгруэнц-подкольца и сформулирована теорема Евдокимова. Основные результаты работы являются усилением этой теоремы и приведены в §2. А именно, теоремы 2.2.2 и 2.2.3. Эти теоремы в последующих работах планируется применить для классификации бирациональных моделей $\mathbb{Q}$. В §3 приведено несколько нерешенных задач. Предложен подход к вычислению гомотопических групп с помощью обобщенных подколец $\mathbb{Z}$.

Данная работа частично выполнена во время пребывания автора в Математическом Институте Макса Планка в Бонне в 2016 году. Автор благодарит Институт и его сотрудников за гостеприимство.

§1. Конгруэнц-подкольца

Обычно ниже мы используем термин “кольцо” вместо термина “обобщенное кольцо” [2]. Как обычно, $R(n)$ – множество n-арных операций R. При этом $R(n) = R^n$ для классического кольца R. Все кольца предполагаются коммутативными.

1.1. Классический случай. Здесь приведены некоторые сведения о классических особенностях. Они предназначены служить образцом при изучении обобщенного случая. Особенности алгебраических кривых достаточно подробно рассмотрены в [3].

1.1.1. Стягивание подсхем в классическом случае. Опишем некоторый способ стягивания классических подсхем. Этот способ ниже будет применен к обобщенному случаю. Ограничимся аффинными схемами. Пусть $U = \operatorname{Spec} A$, I – идеал в A и $Z = \operatorname{Spec} A/I$ – замкнутая подсхема U. Предположим, что задано подкольцо $E \subset A/I$ и $W = \operatorname{Spec} E$. Рассмотрим диаграмму схем

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "p"'] & U \arrow[d, dashed] \\ W \arrow[r, dashed] & V \end{tikzcd}.$$

Здесь j – замкнутое вложение, соответствующее проекции $A \to A/I$, а p – проекция, соответствующая вложению $E \subset A/I$. Схема W рассматривается как результат факторизации схемы Z, а V рассматривается как результат стягивания схемы U вдоль p. В качестве V возьмем копредел части этой диаграммы, состоящей из стрелок j и p. Существование такого копредела легко увидеть из существования предела в двойственной категории колец.

$$\begin{tikzcd}
A/I & A \arrow[l, "q"'] \\
E \arrow[u, hook, "i"] & A_{q,i} \arrow[l, dashed] \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd} .$$

Здесь $A_{q,i}$ – просто прообраз $q^{-1}(iE) \subset A$.

Если мы рассматриваем не просто схемы, а схемы над некоторым кольцом F, то все данные должны быть определены над F. Тогда и $A_{q,i}$ наследует структуру F-алгебры.

1.1.2. Пример. Пусть $A = \mathbb{R}[x]$, $I = ((1+x)(1-x))$, $E = \mathbb{R}$. В этом случае

$$A_{q,i} = \{f \in \mathbb{R}[x] | f(1) = f(-1)\} = \mathbb{R}[u,v]/(u^2 - v^2 + u^3).$$

Здесь $u = x^2 - 1$, $v = x - x^3$. Таким образом, точки $x = 1$ и $x = -1$ стягиваются в простую двойную точку $(u = 0, v = 0)$ с касательным конусом из двух прямых.

1.1.3. Пример. Пусть $A = \mathbb{R}[x]$, $I = (x^2)$, $E = \mathbb{R}$. В этом случае

$$A_{q,i} = \{f \in \mathbb{R}[x] | f'(0) = 0\} = \mathbb{R}[u,v]/(v^2 - u^3).$$

Здесь $u = x^2$, $v = x^3$. Таким образом, подсхема $\mathbf{A}^1$, заданная уравнением $x^2 = 0$, стягивается в касп $(u = 0, v = 0)$ с неприведенным касательным конусом.

1.1.4. Пример. Пусть $A = \mathbb{R}[x,y]/(xy-1)$, $I = (x^2+1)$, $E = \mathbb{R}$. В этом случае

$$\begin{aligned} A_{q,i} &= \{f \in \mathbb{R}[x, x^{-1}] | f(i) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}[u,v,w]/(uv - 1, 2 + u + v - w^2) \\ &= \mathbb{R}[s,t,w]/(s + t - st, s + t - w^2) = \mathbb{R}[t,w]/(t^2 + w^2 - tw^2). \end{aligned}$$

Здесь $u = x^2$, $v = y^2$, $w = x + y$, $s = u + 1$, $t = v + 1$. Таким образом, схемная точка степени 2, состоящая из двух геометрических точек $x = i$ и $x = -i$, переходит при стягивании в простую двойную точку

$(t = 0, w = 0)$ с неращепимым над базовым полем $\mathbb{R}$ касательным конусом.

1.1.5. Особенности кривых. В 1.1.1 представлена процедура создания особенностей. Отметим и кратко обсудим несколько вопросов, которые возникают при изучении особых кривых. В классике эти вопросы обычно не вызывают серьезных затруднений, но в обобщенном случае мы оказываемся в зоне неизвестности и каждый шаг может привести к значительным трудностям.

(1) Естественным образом особые кривые возникают при изучении кривых, вложенных, например, в $\mathbf{A}^2$. Желательно уметь переходить от описания искусственно созданной особенности к естественно возникшей особенности и наоборот.

(2) Желательно иметь набор численных инвариантов локальной особенности, таких, например, как кратность и кондуктор (см. [3, гл. IV, §2]). А именно,

$$\delta_Q = \dim_k \mathcal{O}_Q/\mathcal{O}'_Q \quad \text{и} \quad n_Q = \dim_k \operatorname{Ann}(\mathcal{O}_Q/\mathcal{O}'_Q).$$

Здесь $\mathcal{O}'_Q$ – кольцо функций локальной особенности, $\mathcal{O}'_Q$-Mod – категория $\mathcal{O}'_Q$-модулей, а $\mathcal{O}_Q$ – кольцо функций ростка кривой, полученного разрешением локальной особенности.

(3) Среди бирациональных моделей K имеется одна особенно приятная, а именно – полная и гладкая. Будем считать, что именно такова кривая X. Все модели V поля K могут быть получены с помощью “домиков” вида

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \\ V & \end{tikzcd},$$

где i – открытое вложение, а p – конечный морфизм степени один. Альтернативно, все модели V поля K могут быть получены с помощью “домиков” вида

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "q"] \\ V \arrow[r, hook, "j"'] & Y \end{tikzcd},$$

где j – открытое вложение, а q – конечный морфизм степени один.

(4) Помимо процедуры создания особенностей имеется и процедура разрешения особенностей. В случае кривых имеются даже две такие процедуры: нормализация и более конструктивная процедура раздутия.

1.2. Обобщенный случай. Понятие обобщенного конгруэнц-кольца введено в [4]. Ниже мы слегка обобщим его по аналогии с классическим случаем (см. 1.1.1).

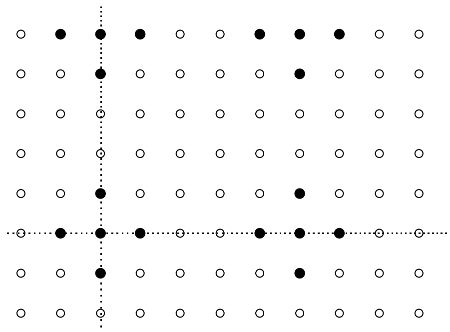
Определение 1.2.1. *Рассмотрим классическое кольцо A, идеал $I \subset A$ и обобщенное подкольцо $E \subset A/I$. Конгруэнц-кольцо $A_{q,i}$, по определению, – предел диаграммы*

$$\begin{tikzcd} A/I & A \arrow[l, "q"'] \\ E \arrow[u, hook, "i"] & A_{q,i} \arrow[l, dashed] \arrow[u, dashed] \end{tikzcd},$$

где q – проекция, а i – вложение. Иными словами, $A_{q,i}$ – прообраз $q^{-1}(iE) \subset A$.

Если мы рассматриваем не просто кольца, а алгебры над некоторым кольцом L, то и $A_{q,i}$ наследует структуру L-алгебры.

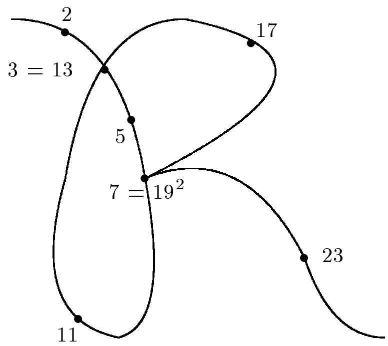
1.2.2. Пример. Пусть $A = \mathbb{Z}$, $I = (5)$, $E = \mathrm{F}$. Среди бинарных операций $\mathbb{Z}$, т. е. $\mathbb{Z}(2) = \mathbb{Z}^2$, на картинке



элементы $A_{q,i}(2)$ закрашены черным цветом.

§2. Неклассические бирациональные модели

Мы собираемся изучать неклассические бирациональные модели полей алгебраических чисел. Среди таких моделей имеются, например, сингулярные модели для $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Один из примеров такой модели представлен рисунком



Здесь склееены простые 3 и 13, а также имеется касп в простом числе 19. Более того, этот касп склеен с простым числом 7. В классической теории нет ничего подобного, так как все классические схемы "живут" над $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Изображенная же на картинке обобщенная схема "живет" ниже $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

Положим
$$\mathrm{F} = \mathbb{F}_{1^2}. \tag{1}$$
Здесь $\mathbb{F}_{1^2}(n)$ состоит из всех $a = (a_1, \dots, a_n)$, где $a_i \in \{-1, 0, +1\}$ и почти все $a_i = 0$, самое большее с одним исключением. Иными словами, для каждого a должен найтись индекс j такой, что $a_i = 0$ при $i \neq j$.

Мы рассматриваем любое классическое кольцо A как F-алгебру с помощью гомоморфизма, переводящего (-1) в (-1).

2.1. Сингулярные модели $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$**.** Сначала напомним понятие конечности в обобщенном контексте.

Определение 2.1.1. *Пусть $\rho : A \to B$ – морфизм обобщенных колец. Кольцо B называется конечным над A, если функтор ограничения* *скаляров* $\rho_* : B\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$ *переводит конечнопорожденные модули в конечнопорожденные.*

Некоторые общие свойства конечных алгебр обсуждаются в [4, 2.1].

Будем говорить, что $\operatorname{Spec} R$ – конечный фактор $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, если $R \subset \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}$ конечно над R. Будем говорить, что $\operatorname{Spec} R$ представляет сингулярную модель $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, если $\operatorname{Spec} R$ – конечный фактор $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ и локализация R по всем ненулевым элементам $R(1)$ совпадает с $\mathbb{Q}$.

Следующая теорема описывает строение конечных факторов $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, определенных над $\mathrm{F} = \mathbb{F}_{1^2} \subset \mathbb{Q}$ (например, $\operatorname{Spec}\mathbb{N}$ не такой).

Теорема 2.1.2. *Предположим, что* $\mathrm{F} \subset R \subset \mathbb{Z}$. *Тогда*

(1) *Если* $\operatorname{Spec} R$ *– конечный фактор* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, *то* $\operatorname{Spec} R$ *– сингулярная модель* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$*;*

(2) $\operatorname{Spec} R$ *– сингулярная модель* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ *тогда и только тогда, когда* $R \supset R_N$ *(см.* [4]*) для некоторого* N.

Это утверждение было сформулировано в [4] в качестве гипотезы. Эта гипотеза была сведена с помощью приема Н. Дурова к утверждению теоремы 2.1.3. Таким образом, весьма существенную роль в доказательстве теоремы 2.1.2 играет следующая теорема С. Евдокимова.

Теорема 2.1.3 ([5])**.** *Пусть* W *– некоторая* F*-подалгебра* $\mathbb{Z}$, $(a,b) \in W(2)$ *и* $\gcd(a,b) = 1$. *Тогда* $(1,N) \in W(2)$, *где* $N = ab$.

2.2. Однородные представления. Для классификации бирациональных моделей $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$, которую мы планируем провести в последующих работах, потребуется однородное усиление теоремы Евдокимова.

2.2.1. Однородные комбинации степени d. Пусть $(x,y) \mapsto x*y$ – свободная бинарная коммутативная операция. Имеется естественный гомоморфизм

$$\mathrm{F}[*] \to \mathbb{Q}[A,B], \quad * \mapsto (A,B).$$

Положим $\deg(*) = 1$, $\deg A = \deg B = 1$. Тогда вышеуказанный гомоморфизм становится гомоморфизмом градуированных колец.

Пусть $a, b \in \mathbb{Q}$. Говорим, что существует однородное представление $c \in \mathbb{Q}$ степени d с помощью бинарной операции $(a,b) \in \mathbb{Q}(2)$, если для некоторого n существует операция $f \in \mathrm{F}[*]_d(n)$, так что $c = f(x_1,\ldots,x_n)$, где $x_i \in \mathrm{F}(1)$. Множество всех таких c обозначим X_d.

Иными словами, X_d состоит из целых чисел, представимых полным бинарным деревом высоты d, на листьях которого расположены элементы F(1). Для вычисления числа, представленного таким деревом, идем от листьев к корню и ко входам x, y вершины применяем операцию $ax + by$, а ее результат подаем на выход из вершины.

Приведем рекурсивное описание X_d. Для этого рекурсивно определим множества $X_0, X_1, \dots \subset \mathbb{Z}$. Положим

$$X_0 = \mathrm{F}(1) = \{-1, 0, +1\}.$$

Для $d = 1, 2, \dots$, по определению,

$$X_d = \{au + bv \in \mathbb{Z}(1) | u, v \in X_{d-1}\}.$$

Легко видеть, что X_d инвариантно относительно умножения на (–1).

Нам потребуется также понятие однородной представимости бинарной операции. Говорим, что существует однородное представление $(c_1, c_2) \in \mathbb{Q}(2)$ степени d с помощью бинарной операции $(a, b) \in \mathbb{Q}(2)$, если для некоторого n существует операция $f \in \mathrm{F}[*]_d(n)$, так что $c = f(x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in \mathrm{F}(2)$.

Зафиксируем $a, b \in \mathbb{Z}$. Ниже будем предполагать, что

$$\gcd(a, b) = 1. \tag{2}$$

Пусть

$$N = ab. \tag{3}$$

Следующая теорема – основной качественный результат данной работы.

Теорема 2.2.2. *Существует $d > 0$ такое, что $1 \in X_d$.*

Теорема 2.2.2 будет выведена ниже из теоремы 2.2.3. Доказательство этой теремы, наряду с леммой 2.2.5, представляют собой конструктивную версию теоремы 2.2.2.

Теорема 2.2.3. *Предположим, что для $d \in \{1, 2, \dots\}$ выполнены условия*

$$a^d + b^d \equiv 1 \pmod N, \tag{4}$$

$$d \text{ – четно}, \tag{5}$$

$$d \geqslant N. \tag{6}$$

Тогда $1 \in X_d$.

2.2.4. Доказательство теоремы 2.2.2. Выберем и зафиксируем $e > 0$ и $f > 0$, такие, что $a^e \equiv 1 \pmod b$ and $b^f \equiv 1 \pmod a$. Для всякого кратного e и f выполнено (4). Среди таких кратных много чисел, для которых выполнены (5) и (6). На этом вывод теоремы 2.2.2 из теоремы 2.2.3 завершен.

Ключевой шаг в доказательстве теоремы 2.2.3 – ее частный случай, сформулированный и доказанный в следующей лемме.

Лемма 2.2.5. *Предположим, что для* $d \in \{1, 2, \dots\}$ *выполнены условия* (4), (5) *и* (6) *теоремы* 2.2.3 *и, кроме того,*

$$|a| \leqslant 2|b| \quad \text{и} \quad |b| \leqslant 2|a|. \tag{7}$$

Тогда $1 \in X_d$.

Доказательство. В описании X_d (см. 2.2.1) можно заменить (a) на $(-a)$ (и аналогично для b). Поэтому без потери общности считаем, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Кроме того, из (2) и (7) вытекает, что ни a, ни b не равны 0. Итак, ниже

$$a > 0, \qquad b > 0. \tag{8}$$

Нам потребуется слегка более точная нижняя оценка на a и b. А именно, если $a = 1$ или $b = 1$, то лемма очевидна. Поэтому без потери общности считаем, что

$$\min(a, b) \geqslant 2, \quad \max(a, b) \geqslant 3, \quad N \geqslant 6. \tag{9}$$

Рекурсивно определим последовательность целых $q_0, q_1, \dots, q_{d/2}$ (в обозначении уже использована четность d – см. (5)). А именно, пусть

$$q_0 = 1.$$

Предположим, что $0 \leqslant i < d/2$ и q_i уже определено. Выберем $u_i, v_i \in \mathbb{Z}$ так, что

$$0 \leqslant u_i < b, \qquad q_i \equiv u_i a^{d-2i} \pmod b, \tag{10}$$

$$0 \leqslant v_i < a, \qquad q_i \equiv v_i b^{d-2i} \pmod a. \tag{11}$$

и положим

$$q_{i+1} = \left| \frac{q_i - u_i a^{d-2i} - v_i b^{d-2i}}{N} \right|. \tag{12}$$

Например, из (4) вытекает, что $u_0 = 1$, $v_0 = 1$. Поэтому $q_1 = \bigl|(1 - a^d - b^d)/N\bigr|$.

Из (2), (10) и (11) вытекает, что $q_i \in \mathbb{Z}$. В частности,

$$q_{d/2} \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Утверждается, что

$$q_{d/2} \leqslant \binom{d}{d/2}. \tag{14}$$

Отсюда вытекает заключение леммы 2.2.5. Действительно, из (12) последовательно находим: $1 = a^d + b^d \pm q_1 N = a^d + b^d \pm N(u_1 a^{d-2} + v_1 b^{d-2} \pm N q_2)$ и т. д. Поэтому

$$1 = \sum_{i=0}^{d} w_i a^{d-i} b^i, \tag{15}$$

где $w_i = \pm u_i$ при $1 \leqslant i < d/2$, $w_{d/2} = \pm q_{d/2}$ и $w_i = \pm v_i$ при $d/2 < i \leqslant d$. В частности, все $w_i \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $|u_i| \leqslant N$ и $|v_i| \leqslant N$ (см. (10), (11)). Поэтому $|u_i| \leqslant d$ и $|v_i| \leqslant d$ (см. (6)). Следовательно,

$$|u_i| \leqslant \binom{d}{i}, \qquad |v_i| \leqslant \binom{d}{d-i}. \tag{16}$$

Учитывая (14) и (16), заключаем, что

$$|w_i| \leqslant \binom{d}{i}. \tag{17}$$

Биномиальный коэффициент в (17) равен числу листков бинарного дерева высоты d, соответствующих моному $a^i b^{d-i}$. На них расположим $|w_i|$ элементов $\operatorname{sign}(w_i)$, а на незаполненных листках поместим нули. Такое дерево вычисляет элемент $t \in X_d$ (см. 2.2.1). Из (15) вытекает, что $t = 1$. Поэтому $1 \in X_d$.

Осталось доказать (14). Для этого докажем по индукции, что

$$q_i \leqslant \frac{2^i}{4}[a^{d-2i-1} + b^{d-2i-1}]. \tag{18}$$

База индукции $i = 0$. В этом случае (18) сводится к тому, что

$$4 \leqslant [a^{d-1} + b^{d-1}]. \tag{19}$$

Это вытекает из (9) и того, что $d \geqslant N$ (см. (6)).

Рассмотрим индукционный переход $i \to i+1$. Так как, по определению,

$$q_{i+1} = \left| \frac{q_i}{N} - \frac{u_i a^{d-2i} + v_i b^{d-2i}}{N} \right|$$

и $|x-y| \leqslant \max(x,y)$ для $x, y > 0$, то достаточно из индукционного предположения вывести неравенства

$$\frac{q_i}{N} \leqslant \frac{2^{i+1}}{4}[a^{d-2(i+1)-1} + b^{d-2(i+1)-1}] \tag{20}$$

и

$$\frac{u_i a^{d-2i} + v_i b^{d-2i}}{N} \leqslant \frac{2^{i+1}}{4}[a^{d-2(i+1)-1} + b^{d-2(i+1)-1}]. \tag{21}$$

Для проверки (20) достаточно ввиду индукционного предположения показать, что

$$2^i[a^{d-2i-1} + b^{d-2i-1}] \leqslant 2^{i+1}[a^{d-2i-3} + b^{d-2i-3}]N.$$

Упрощая, получаем

$$a^{d-2i-1} + b^{d-2i-1} \leqslant 2ab \cdot a^{d-2i-3} + 2ab \cdot b^{d-2i-3}.$$

Для этого достаточно проверить неравенства

$$a^{d-2i-1} \leqslant 2ab \cdot a^{d-2i-3} \quad \text{и} \quad b^{d-2i-1} \leqslant 2ab \cdot b^{d-2i-3}.$$

Или $a \leqslant 2b$ и $b \leqslant 2a$. Это верно по предположению (7).

Для проверки (18) осталось проверить (21), то есть проверить неравенство

$$u_i a^{d-2i} + v_i b^{d-2i} \leqslant \frac{2^{i+1}}{4}[ba^{d-2i} + ab^{d-2i}]. \tag{22}$$

Это верно при $i \geqslant 1$, так как $u_i < b$, $v_i < a$. Это верно и при $i = 0$, так как $u_0 = v_0 = 1$.

Для завершения доказательства леммы 2.2.5 осталось из (18) вывести (14). Применим (18) к $n = d/2$. Получим

$$q_n \leqslant \frac{2^n}{4}[a^{-1} + b^{-1}] \leqslant \frac{2^n}{2\min(a,b)}. \tag{23}$$

Из формулы Стирлинга вытекает неравенство

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}\sqrt[6]{e}}. \tag{24}$$

Действительно, формула Стирлинга утверждает, что

$$\Gamma(s) = s^{s-\frac{1}{2}} \cdot e^{-s} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{\theta}{12s}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Нас интересует оценка снизу для биномиального коэффициента

$$\binom{2n}{n}, \quad \text{где} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пользуясь формулой Стирлинга, получаем

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n\Gamma(2n)}{n^2\Gamma(n)^2} = \frac{2n}{n^2} \frac{(2n)^{2n-\frac{1}{2}} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{\theta}{24n}}}{\left(n^{n-\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{\eta}{12n}}\right)^2}$$
$$= \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{\theta - 4\eta}{24n}} \geqslant \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}\,\sqrt[6]{e}}.$$

Ввиду (24) для завершения доказательства леммы 2.2.5 осталось понять, что

$$2\min(a, b) \cdot 2^n \geqslant \sqrt{\pi n}\,\sqrt[6]{e}.$$

Это так при $a, b \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$. □

2.2.6. Вывод теоремы 2.2.3 из леммы 2.2.5. Для вывода используем процедуру сближения a и b. Для пары взаимно простых положительных целых (a, b) введем высоту

$$ht(a, b) = \max(a/b, b/a).$$

Из определения ясно, что всегда $ht(a, b) \geqslant 1$. Если

$$ht(a, b) \leqslant 2,$$

то пару назовем подходящей. Для подходящей пары теорема 2.2.3 совпадает с доказанной леммой 2.2.5 и, следовательно, верна. Если пара (a, b) не подходящая, то построим по ней новую пару (a', b') со следующими свойствами:

(1) новая пара (a', b') допускает однородное представление с помощью исходной пары (a, b) (см. (2.2.1));

(2) $ht(a', b') \leqslant \max(2, ht(a, b)/2)$.

Этого достаточно для доказательства теоремы 2.2.3. Действительно, из первого свойства вытекает, что любое число, которое можно однородным образом представить с помощью пары (a', b'), можно однородным образом представить и с помощью пары (a, b). Из второго свойства вытекает, что достаточно конечного числа модификаций.

Предположим, что пара (a, b) не подходящая. Без ограничения общности считаем, что

$$2a < b. \tag{25}$$

Положим $a' = a^2 + 2ab$, $b' = b^2$. Ясно, что a' и b' взаимно просты. Вот однородное представление операции для новой пары с помощью исходной:

$$a'x + b'y = a(ax + bx) + b(ax + by)$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \bullet & & \\
 & \bullet \arrow[ur, "a"] & & \bullet \arrow[ul, "b"'] & \\
x \arrow[ur, "a"] & & xx \arrow[ul, "b"'] \arrow[ur, "a"] & & y \arrow[ul, "b"']
\end{tikzcd}.$$

Вот оценка высоты:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a^2 + 2ab}{b^2} \leqslant \frac{ab/2 + 2ab}{b^2} = \frac{5}{2}\frac{a}{b} < \frac{5}{4} \leqslant 2 \leqslant \max(2, ht(a,b)/2),$$

$$\frac{b'}{a'} = \left(\frac{a^2 + 2ab}{b^2}\right)^{-1} \leqslant \left(\frac{2ab}{b^2}\right)^{-1} = \frac{b}{2a} = \frac{ht(a,b)}{2} \leqslant \max(2, ht(a,b)/2).$$

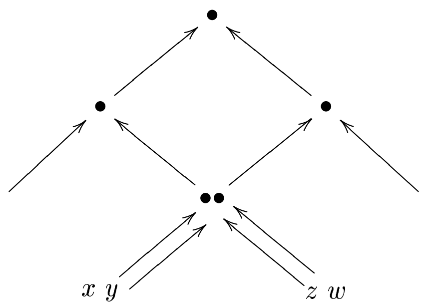
В первом неравенстве использовано то, что $a < b/2$. Это вытекает из (25) и того, что пара (a, b) – не подходящая. Таким образом, теорема 2.2.3 доказана.

§3. Заключение

Кратко обсудим некоторые проблемы и возможности, связанные с сингулярными моделями $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

Начнем с некоторой задачи перечисления деревьев. Эта задача происходит из проблемы вычислимости для обобщенной аффинной плоскости $\mathbf{A}^2_{\mathbb{F}} = \operatorname{Spec}\mathbb{F}[*]$, где $*$ – свободная коммутативная бинарная переменная, а $\mathbb{F}$ – начальный объект в категории обобщенных колец (в [2] это кольцо обозначено $\mathbb{F}_0$). По определению, имеется естественный эпиморфизм $\mathbb{F}\langle\circ\rangle \to \mathbb{F}[*]$, $\circ \mapsto *$, где $\circ$ – свободная некоммутативная бинарная переменная. Таким образом, множество $\mathbb{F}\langle\circ\rangle(n)$ представлено множеством (классов изоморфизма) пар (T, m), где T – бинарное дерево с упорядоченным множеством листьев $F(T)$, а $m : F(T) \to$

$\{x_1, \dots, x_n\}$ – маркировка. По определению множество $\mathbb{F}[*](n)$ является фактор-множеством $\mathbb{F}\langle\circ\rangle(n)/\sim$, где $\sim$ – отношение эквивалентности, порожденное соотношением коммутирования операции $*$ с собой: $(x*y)*(z*w) = (x*z)*(y*w)$. Требуется найти алгоритм для распознавания этого отношения эквивалентности. Отметим, что естественный гомоморфизм $\mathbb{F}[*] \to \mathbb{Z}[A, B]$, $* \mapsto (A, B)$ не решает эту проблему, так как не является вложением. Это видно на картинке



(26)

Действительно, можно переставить x и y, не меняя выхода в $\mathbb{Z}[A, B]$ (при этом z и w могут быть переставлены независимо). Однако автокоммутативность для $*$ позволяет переставлять только целиком пары (x, z) и (y, w). Решение этой задачи позволит, в частности, изучать особые арифметические кривые на аффинной плоскости и соответствующей проективной плоскости. Пока же для изучения доступны лишь кривые на более грубой модели $\mathbf{P}^2$ (см. [6]).

Следующий круг вопросов связан с геометрической формулировкой теории полей классов по образцу [3]. Начать можно с вычисления групп Пикара новых особых моделей. Разумеется, должна появиться особая версия теоремы Римана–Роха и обобщение всего этого на числовые поля. Отметим, что среди особых бирациональных моделей таких полей есть и классические схемы.

Несложно определить гомологии топологических пространств с коэффициентами в обобщенном кольце R. А именно,

$$H_n(X, R) = \pi_n(R(\operatorname{Sing} X)),$$

где Sing – симплициальное множество сингулярных симплексов X. Тогда $H_n(X, \mathbb{Z})$ – обычные гомологии, а $H_n(X, \mathbb{F}_1)$ – гомотопические группы X. Рассмотренные особые модели $\mathbb{Z}$ занимают промежуточное положение между $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{F}_1$. Интересно было бы вычислить, хотя бы частично, гомологии с коэффициентами в конгруэнц-кольце $Q_N = \mathbb{Z}_{q,i}$ (см. 1.2.1), где q – проекция $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, а $E = \mathbb{F}_1$. Если ответ окажется нетривиальным, то можно попробовать перейти к пределу по N и учесть, что $\bigcap Q_N = \mathbb{F}_1$. Конечно, прежде всего стоило бы вычислить $H_n(S^m, Q_N)$ при $n > m$ для небольших m (например, для $m = 2$).

Мы начали изучение неклассических бирациональных моделей с $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$. Можно было бы изучать подобные вопросы для обобщенных колец $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ (или даже $\mathbb{Z}_{>0}$ и $\mathbb{Q}_{>0}$). В этом случае пришлось бы взять $\mathrm{F} = \mathbb{F}_1$ или $\mathbb{F}_0$. Отметим близость возникающих при этом вопросов к вопросам, рассматриваемым в [7–9]. Более того, некоторые из таких вопросов могут оказаться алгоритмически неразрешимыми [10]. Весьма детальный обзор работ по этой тематике содержится в [11].

Литература

1. Sh. Haran, *Non-additive geometry.* — Compositio Math. **143** (2007) 618–688.
2. N. Durov, *New approach to Arakelov geometry.* `arXiv: 0704.2030 v1 [math AG]` 16 Apr 2007.
3. J.-P. Serre, *Algebraic Groups and Class Fields*, Springer-Verlag, 1988.
4. А. Л. Смирнов, *Обобщенные подкольца арифметических колец.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 211–241.
5. С. А. Евдокимов, *Доказательство конгруэнц-гипотезы для обобщенных колец.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **443** (2016), 91–94.
6. А. Л. Смирнов, *Бинарное проективное пространство.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 208–224.
7. D.A. Klarner, R. Rado, *Arithmetic properties of certaine recurcively defined sets.* — Pacific J. Math. **53**, No 2 (1974), 445–463.
8. J. Lagarias, *The $3x+1$ problem and its generalizations.* — Amer. Math. Monthly **92**, No. 1 (1985), 3–23.
9. S. Burckel, *Functional equations associated with congruential functions.* — Theor. Comput. Sci. **123** (1994), 397–406.
10. J. H. Conway, *Unpredictable iterations.* — Proc. Number Theory 1972, 49–52.
11. J. Lagarias, *The $3x+1$ Problem: an Annotated Bibliography* (1963–1999) (sorted by author), `arXiv:math/0309224 v13 [math.NT]` 11 Jan 2011.

Smirnov A. L. Nonclassical birational models for Spec $\mathbb{Q}$.

We study generalized subrings of the ring of integers which give birational models for the field of rationals. A homogeneous strengthening of

Evdokimov's theorem is proved. An approach to calculation of homotopy groups by means of generalized rings is proposed.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН
E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 11 января 2017 г.