Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 455, 2017 г.

А. А. Осиновская

ОГРАНИЧЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НА ПОДСИСТЕМНЫЕ ПОДГРУППЫ ТИПА A_2

§1. Введение

Одна из основных проблем теории представлений алгебраических групп – это нахождение так называемых правил ветвления, т.е. описание композиционных факторов ограничений неприводимых представлений на подгруппы. Классические правила ветвления [5] были получены Г. Вейлем и Шуром и описывают ограничения представлений классической алгебраической группы ранга r на подгруппу ранга $r-1$ в характеристике 0. В положительной характеристике p нахождение таких правил в общем виде тесно связано с описанием характеров и размерностей неприводимых представлений. Люстиг выдвинул гипотезу, описывающую данные характеры. Андерсен, Янцен и Зёргель [1] доказали эту гипотезу для всех p, больших некоторого значения. Но из этого доказательства невозможно вывести границу.

В 2008 г. Фибиг [4] нашел явную верхнюю границу для исключительной характеристики. Однако, это число оказалось поистине огромным. И почти во всех явно определенных случаях неприводимые характеры остаются неизвестны.

Поэтому целесообразно развивать методы исследования представлений, которые не требуют знания их характеров, и искать асимптотические аналоги правил ветвления, рассматривая ограничения представлений на подгруппы, ранг которых достаточно мал по сравнению с рангом исходной группы. Естественно начинать с самых малых и самых простых подгрупп. Ограничения модулярных представлений алгебраических групп на подгруппы типа A_1 описаны нами ранее [7].

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$; G – простая односвязная алгебраическая группа типа A_r над K, $r \geqslant 3$,

---

Ключевые слова: специальные линейные группы, представления, ограничения на подгруппы, правила ветвления, композиционные факторы.

Работа выполнена в рамках государственных программ научных исследований “Конвергенция 1.1.01” и “Конвергенция-2020 1.1.01”.

т.е. $G = \mathrm{SL}_{r+1}(K)$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ – базис системы корней группы G относительно фиксированного максимального тора $T \subset G$ и подгруппы Бореля $B \supset T$; $\omega_1, \ldots, \omega_r$ – соответствующие фундаментальные веса и $\varphi(\omega)$ – неприводимое рациональное представление группы G со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$.

Подгруппа группы G называется подсистемной, если она порождается всеми корневыми подгруппами группы G, связанными с определенной подсистемой корней. Если $\beta_1, \ldots, \beta_s$ – базис такой подсистемы, обозначим эту подгруппу символом $G(\beta_1, \ldots, \beta_s)$. Положим

$$G(i_1, \ldots, i_s) = G(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}).$$

Далее $H \subset G$ – подсистемная подгруппа типа A_2. Все такие подгруппы сопряжены в G. Можно взять, например, $H = G(1, 2)$.

Множество весов подгруппы H может быть отождествлено со множеством пар целых чисел с помощью следующего отображения $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 \mapsto (x_1, x_2)$, а множество всех доминантных весов такой подгруппы – со множеством $\mathbb{N}^2$ пар неотрицательных целых чисел.

Для представления φ символ $\varphi|P$ обозначает ограничение представления φ на подгруппу $P \subset G$, а $\mathrm{Irr}(\varphi|P)$ – множество старших весов композиционных факторов такого ограничения (без учета их кратностей). Принимая во внимание вышеприведенное отождествление, мы можем записать $\mathrm{Irr}(\varphi(\omega)|H) \subset \mathbb{N}^2$.

Положим $a = a_1 + \ldots + a_r$ и

$$S(\omega) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant a - a_r,\ x_2 \leqslant a - a_1,\ x_1 + x_2 \leqslant a\}.$$

Вес ω называется p-ограниченным, если $a_i < p$ при $1 \leqslant i \leqslant r$.

Сначала сформулируем результат о комплексных группах и представлениях. Если Γ – это простая односвязная алгебраическая группа над K, обозначим символом $\Gamma_{\mathbb{C}}$ алгебраическую группу над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, имеющую тот же тип, что и Γ. Отождествим системы весов групп Γ и $\Gamma_{\mathbb{C}}$ стандартным образом. Для представления группы $\Gamma_{\mathbb{C}}$ индекс ${}_{\mathbb{C}}$ обозначает поле.

Таким образом, $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$, $\varphi(\omega)_{\mathbb{C}}$ – неприводимое комплексное представление со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$ и $H_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$ – подсистемная подгруппа типа A_2.

Теорема 1 ([8, теорема 1.1]). (i) *При* $r = 3$

$$\mathrm{Irr}(\varphi(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}) = \{(x_1, x_2) \in S(\omega) \mid a_2 \leqslant x_1 + x_2\}.$$

(ii) *При* $r > 3$
$$\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}) = S(\omega).$$

Теперь рассмотрим случай $p > 0$ и представления с локально малыми относительно характеристики старшими весами. Следующая теорема приведена в [8, теорема 1.6]. Однако там есть пробел в доказательстве, здесь мы его исправим.

Теорема 2. *Пусть* $r > 3$ *и* $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} < p - 2$ *при* $1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{r-1}{2}\right]$, i *нечетном, и* $a_{r-j-3} + a_{r-j-2} + a_{r-j-1} + a_{r-j} < p - 2$ *при* $0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{r-3}{2}\right]$, j *четном. Тогда*
$$\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H) = S(\omega).$$

Условие на коэффициенты в теореме 2 может быть ослаблено. Основной результат статьи – следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $r > 5$ *и* $a_i + a_{i+1} + 1 < p$ *для всех* $1 \leqslant i \leqslant r - 1$. *Тогда*
$$\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H) = S(\omega).$$

Заметим, что в теореме 3 условие $a_i + a_{i+1} + 1 < p$ существенно.

Пример. Пусть $\omega = a_i\omega_i + a_{i+1}\omega_{i+1}$, $1 < i < r - 1$ и $a_i + a_{i+1} + 1 = p$. Тогда
$$\begin{aligned}\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H) = \{&(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 = a\}\\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{r-1} \leqslant x_1 \leqslant a,\ x_2 = 0\}\\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid\ x_1 = 0,\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant a\}.\end{aligned}$$
В этом случае представление $\varphi(\omega)$ – это фактически симметрическая степень естественной реализации группы G (см. [13] и [8, лемма 3.11]).

Другой пример дает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $r \geqslant 3$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ *и* $a_1 + a_2 + 1 = p$. *Тогда*
$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 < a_1,\ a - a_1 - a_2 < x_2 \leqslant a - a_1\} \not\subset \operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H),$$
т.е. $\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H) \neq S(\omega)$.

Ограничение на ранг группы G также существенно.

Пример. Пусть $G = \mathrm{SL}_6(K)$, $\omega = a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4$ с $a_2 \geqslant a_4 > 0$ и $a_2 + a_3 + a_4 + 2 = p$. Тогда
$$\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H) = \{(x_1, x_2) \in S(\omega) \mid a_4 \leqslant x_1 + x_2\}$$
(см. [8, таблица 2]).

Однако справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть* $r \geqslant 3$. *Тогда* $\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H) \subset S(\omega)$.

Из предложения 1 следует, что для $r > 3$,

$$\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H) \subset \operatorname{Irr}(\varphi(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}).$$

При $r = 3$ это неверно.

Пример. Предположим, что $G = \mathrm{SL}_4(K)$, $a_2 + 1 = p$ и $a_1 + a_3 + 2 = p$. Тогда

$$\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H) = \operatorname{Irr}(\varphi(\omega)_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}) \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant p - 3\}$$

(см. [8, таблица 1]).

Случай $p = 2$ был изучен ранее.

Теорема 4 ([9, теорема 1]). *Пусть* $p = 2$, $G = A_r(K)$ *и* $a_i < 2$ *для всех* i. *Тогда*

$$\operatorname{Irr}(\varphi(\omega)|H) = \begin{cases} \{(x_1, x_2) \in S(\omega) \mid a_2 \leqslant x_1 + x_2\}, & r = 3, \\ S(\omega), & r > 3. \end{cases}$$

§2. Предварительные леммы

Обозначим символом $\mathbb{Z}$ множество всех целых чисел и символом $\mathbb{N}$ – множество всех неотрицательных целых чисел. Пусть S – подсистемная подгруппа группы G и V – рациональный G-модуль. Для группы G обозначим символом $L(\mu)$ неприводимый модуль со старшим весом μ, $\Delta(\mu)$ – модуль Вейля с таким старшим весом, $\operatorname{ch}(V)$ – формальный характер модуля V, $X(V)$ – множество весов модуля V и символом V^λ – весовое пространство веса $\lambda \in X(V)$. Как и для представлений, $V|S$ обозначает ограничение модуля V на подгруппу S, а $\operatorname{Irr}(V|S)$ – множество старших весов композиционных факторов такого ограничения. Для весового вектора $v \in V$ обозначим $\omega(v)$ и $\omega_S(v)$ его вес относительно G и S соответственно.

Зафиксируем максимальный тор T в группе G, состоящий из диагональных матриц, и подгруппу Бореля B, состоящую из верхних треугольных матриц. Пусть $x_\alpha(t)$ $(t \in K)$ – корневой элемент группы G и $\mathfrak{X}_\alpha$ – корневая подгруппа группы G, связанные с корнем α. Обозначим символом E единичную матрицу в группе G и символом $e_{i,j}$ матрицу $(r+1) \times (r+1)$ с 1 в положении ij и 0 во всех других местах. Упорядочим простые корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, так что $x_{\alpha_i}(t) = E + te_{i,i+1}$.

Тогда $x_{\alpha_i+\ldots+\alpha_j}(t) = E + te_{i,j+1}$ и $x_{-\alpha_i-\ldots-\alpha_j}(t) = E + te_{j+1,i}$, где $1 \leqslant i < j \leqslant r$.

Гипералгебра группы G строится следующим образом. Рассмотрим в $\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ (алгебре Ли группы $G_{\mathbb{C}}$) следующие элементы: $X_{\alpha_i+\ldots+\alpha_j} = e_{i,j+1}$ и $X_{-\alpha_i-\ldots-\alpha_j} = e_{j+1,i}$ с $1 \leqslant i < j \leqslant r$. Как в [11, теорема 2], обозначим символом $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$ подкольцо в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли $\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$, порожденное всеми $X_\alpha^m/m!$ для корней α группы G и $m \in \mathbb{N}$. Гипералгебра группы G – это тензорное произведение $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$. Элементы $X_{\alpha,m} = (X_\alpha^m/m!) \otimes 1_K$ порождают $\mathcal{U}$ как K-алгебру. Любой рациональный G-модуль V может быть превращен в $\mathcal{U}$-модуль с помощью

$$x_\alpha(t)v = \sum_{m=0}^{+\infty} t^m X_{\alpha,m} v \tag{1}$$

при $v \in V$. Будем писать $X_\alpha = X_{\alpha,1}$. Для корня $\alpha = \pm\alpha_i$ мы используем обозначения $X_{\pm i}$, $x_{\pm i}(t)$, $\mathcal{X}_{\pm i}$ и $X_{\pm i,k}$.

Вектор $v \in V$ называется примитивным относительно подгруппы S, если v – ненулевой весовой вектор и $\mathcal{X}_\alpha$ оставляет на месте v для каждого положительного корня α подгруппы S.

Обозначим через $M(\mu)$ неразложимый G-модуль, порожденный вектором старшего веса μ. Это фактормодуль модуля $\Delta(\mu)$ [6, часть II, лемма 2.13(b)]. Зафиксируем вектор старшего веса v^+ в $M(\mu)$.

Пусть $M = M(\omega)$ с $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$ и $1 \leqslant i, j \leqslant r$. Предположим, что $0 < a_j < p$ для некоторого j. Для целого числа d с $0 < d \leqslant a_j$ определим вектор $v(i,j,d)$ следующим образом. Положим $d_j = d$. Если $i < j$, пусть $d_k = a_k + d_{k+1}$ при $i \leqslant k < j$. Если $i > j$, положим $d_k = a_k + d_{k-1}$ при $i \geqslant k > j$. Теперь обозначим

$$v(i,j,d) = X_{-i,d_i} \ldots X_{-k,d_k} \ldots X_{-j,d} v^+.$$

При $i = j$ положим $v(i,j,d) = X_{-i,d} v^+$. Тогда $v(i,j,d)$ примитивен относительно $G(1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r)$ [12, лемма 2.46].

В дальнейшем мы будем употреблять и запись $v(i,j,0)$, подразумевая, что $v(i,i,0) = v^+$, $v(i,j,0) = v(i,j-1,a_{j-1})$ при $i < j$ и $v(i,j,0) = v(i,j+1,a_{j+1})$ при $i > j$.

Доказательство предложения 1. Для p-ограниченных старших весов это доказано в [8, предложение 1.2]. Если вес ω не является

p-ограниченным, то мы получаем искомое вложение, используя теорему Стейнберга о тензорном произведении [11, теорема 41]. $\square$

Лемма 2. *Пусть $r \geqslant 3$ и $a_i < p$ при $2 \leqslant i \leqslant r-1$. Тогда*

$$T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant a - a_r,\ x_2 \leqslant a - a_1,\ x_1 + x_2 = a\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$$

и для любого веса из T существует примитивный относительно H вектор такого веса.

Доказательство. Пусть сначала $r = 3$. Мы можем предполагать, что $H = G(2,3)$. Вектор $v_{d_2} = v(1,2,d_2)$ с $0 \leqslant d_2 \leqslant a_2$ примитивен относительно H и его вес для H равен $(a_1 + a_2 - d_2, d_2 + a_3)$. Поэтому для $r = 3$ лемма доказана.

Если $r > 3$, то при $2 \leqslant i \leqslant r-1$ положим $\Gamma_i = G(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_r) \cong A_3(K)$, $\lambda_i = (a_1 + \ldots + a_{i-1})\omega_1 + a_i\omega_2 + (a_{i+1} + \ldots + a_r)\omega_3$ и $H = H_i = G(\alpha_i, \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_r) \subset \Gamma_i$. Тогда $K\Gamma_i v^+ = M(\lambda_i)$ – подмодуль ограничения $M(\omega)|\Gamma_i$ и его старший вес удовлетворяет условию леммы. Ограничивая $M(\lambda_i)$ на H_i при $2 \leqslant i \leqslant r-1$ и $0 \leqslant d_i \leqslant a_i$, получаем векторы v_{i,d_i}, примитивные относительно H_i, для которых

$$\omega_{H_i}(v_{i,d_i}) = (a_1 + \ldots + a_i - d_i, d_i + a_{i+1} + \ldots + a_r).$$

Это завершает доказательство. $\square$

Лемма 3. *Пусть $r \geqslant 4$ и вес ω является p-ограниченным. Предположим, что $a_1 \geqslant a_r$. Тогда $S \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$, где*

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_1 \leqslant x_1 \leqslant a - a_r,\quad a_r \leqslant x_2 \leqslant a - a_1,\ a - a_r \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a\}.$$

Доказательство. Положим

$$\Gamma = G(1, 2, \ldots, r-1) \text{ и } \lambda = a_1\omega_1 + \ldots + a_{r-1}\omega_{r-1}.$$

Тогда $M = K\Gamma v^+ = M(\lambda)$ – подмодуль в ограничении $M(\omega)|\Gamma$. Используя доказательство леммы 2, получаем, что при $2 \leqslant i \leqslant r-2$ и $0 \leqslant d_i \leqslant a_i$ векторы $v_{i,d_i} \in M(\lambda)$, где v_{i,d_i} являются примитивными относительно подгруппы $H = H_i = G(\alpha_i, \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{r-1})$ и

$$\omega_{H_i}(v_{i,d_i}) = (a_1 + \ldots + a_i - d_i, d_i + a_{i+1} + \ldots + a_{r-1}).$$

Такие векторы также примитивны относительно $G(r)$ и

$$\omega_{G(r)}(v_{i,d_i}) = a_r.$$

Положим $w_{i,d_i,d_r} = X_{-r,d_r} v_{i,d_i}$, где $0 \leqslant d_r \leqslant a_r$. Эти векторы также примитивны относительно H_i и

$$\omega_{H_i}(w_{i,d_i,d_r}) = (a_1 + \ldots + a_i - d_i, d_i + a_{i+1} + \ldots + a_{r-1} + d_r).$$

Следовательно,

$$S_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_1 \leqslant x_1 \leqslant a - a_{r-1} - a_r,\ a - a_r \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

Аналогично,

$$S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_r \leqslant x_2 \leqslant a - a_1 - a_2,\ a - a_1 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

Теперь $S \subset S_1 \cup S_2 \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$. □

Лемма 4. *Пусть $r \geqslant 4$ и вес ω является p-ограниченным. Положим $m = \max_{1 \leqslant i \leqslant r-2}(a_i + a_{i+1} + a_{i+2})$. Тогда $S' \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$, где*

$$S' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_1 \leqslant x_1 \leqslant a - a_r,\ a_r \leqslant x_2 \leqslant a - a_1,\ m \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a\}.$$

Доказательство. Если $r = 4$, то утверждение следует из леммы 3. Предположим, что $r > 4$. При $1 \leqslant j \leqslant r-2$ обозначим $\Gamma_j = G(j, j+1, j+2)$, $\lambda_j = a_j\omega_1 + a_{j+1}\omega_2 + a_{j+2}\omega_3$ и $H = H_j = G(\alpha_j + \alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}) \subset \Gamma_j$. Тогда $M_j = K\Gamma_j v^+ = M(\lambda_j)$ – подмодуль в ограничении $M(\omega)|\Gamma_j$. Положим

$$v_k = X_{-(j+1),k} v^+,$$

где $0 \leqslant k \leqslant a_{j+1}$. Тогда векторы v_k примитивны относительно H_j и

$$\omega_{H_j}(v_k) = (a_j + a_{j+1} - k, a_{j+2} + k).$$

При $j > 1$ возьмем $1 \leqslant l \leqslant j-1$ и $0 \leqslant b_l \leqslant a_l$. При $j < r-2$ возьмем $j+3 \leqslant s \leqslant r$ и $0 \leqslant c_s \leqslant a_s$. Теперь, если $1 < j < r-2$, положим

$$w(k, l, b_l, s, c_s) = X_{-(j+3),a_{j+3}+\ldots+a_{s-1}+c_s} \cdots X_{-(s-1),a_{s-1}+c_s} X_{-s,c_s} X_{-(j-1),b_l+a_{l+1}+\ldots+a_{j-1}} \cdots X_{-(l+1),b_l+a_{l+1}} X_{-l,b_l} v_k.$$

Если $j = 1$, положим $l = b_l = 0$ и

$$w(k, 0, 0, s, c_s) = X_{-(j+3),a_{j+3}+\ldots+a_{s-1}+c_s} \cdots X_{-(s-1),a_{s-1}+c_s} X_{-s,c_s} v_k.$$

При $j = r-2$ положим $s = r+1$, $c_s = 0$, и

$$w(k, l, b_l, r+1, 0) = X_{-(j-1),b_l+a_{l+1}+\ldots+a_{j-1}} \cdots X_{-(l+1),b_l+a_{l+1}} X_{-l,b_l} v_k.$$

Во всех случаях, согласно [12, лемма 2.46] векторы $w(k,l,b_l,s,c_s)$ примитивны относительно H_j и

$$\begin{aligned}\omega_{H_j}(w(k,l,b_l,s,c_s)) =&(b_l + a_{l+1} + \ldots + a_{j-1} + a_j + a_{j+1} - k,\\ &a_{j+2} + k + a_{j+3} + \ldots + a_{s-1} + c_s).\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}S_j = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid\ & a_j \leqslant x_1 \leqslant a_1 + \ldots + a_{j+1},\\ & a_{j+2} \leqslant x_2 \leqslant a_{j+1} + \ldots + a_r,\\ & a_j + a_{j+1} + a_{j+2} \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).\end{aligned}$$

При j, $1 \leqslant j \leqslant r-2$, положим

$$\begin{aligned}A_j = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid\ & a_1 + \ldots + a_j \leqslant x_1 \leqslant a_1 + \ldots + a_{j+1},\\ & a_r \leqslant x_2 \leqslant a - a_1,\\ & m \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a\}.\end{aligned}$$

Тогда $S' = \cup_{j=1}^{r-2} A_j$. Зафиксируем некоторое j, $1 \leqslant j \leqslant r-2$. При $(x_1,x_2) \in A_j$ очевидно, что $x_1 \geqslant a_j$ и $x_1 + x_2 \geqslant m \geqslant a_j + a_{j+1} + a_{j+2}$. Неравенства $x_1 \geqslant a_1 + \ldots + a_j$ и $x_1 + x_2 \leqslant a$ влекут $x_2 \leqslant a_{j+1} + \ldots + a_r$. Если $a_{j+2} \leqslant a_r$, то $A_j \subset S_j \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$. Следовательно, для $a_r \geqslant \max(a_3,\ldots,a_{r-1})$ множество $S' \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$.

В противном случае рассмотрим j, $1 \leqslant j \leqslant r-3$, такое, что $a_{j+2} > a_r$. Заметим, что тогда $A_j \setminus S_j = B_j$, где

$$\begin{aligned}B_j = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid\ & a_1 + \ldots + a_j \leqslant x_1 \leqslant a_1 + \ldots + a_{j+1},\\ & a_r \leqslant x_2 < a_{j+2},\\ & m \leqslant x_1 + x_2\big\}.\end{aligned}$$

Возьмем k, такое, что $j+3 \leqslant k \leqslant r$ и $a_k + \ldots + a_r < a_{j+2}$, и определим

$$\begin{aligned}C_{j,k} = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid\ & a_1 + \ldots + a_j \leqslant x_1 \leqslant a_1 + \ldots + a_{j+1},\\ & a_k + \ldots + a_r \leqslant x_2 < \min(a_{j+2}, a_{k-1} + \ldots + a_r),\\ & m \leqslant x_1 + x_2\big\}.\end{aligned}$$

Тогда $B_j = \cup_{k=j+3}^{r} C_{j,k}$. Рассмотрим $C_{j,k} \cap S_{k-2}$. Очевидно, что для любого веса $(x_1,x_2) \in C_{j,k}$ выполняются неравенства $a_{k-2} + a_{k-1} + a_k \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a$. Из условий $a_k + \ldots + a_r \leqslant x_2 < \min(a_{j+2}, a_{k-1} + \ldots + a_r)$ вытекает, что $a_k \leqslant x_2 \leqslant a_{k-1} + \ldots + a_r$. Более того, поскольку $j + 1 < k-1$, очевидно, что $x_1 \leqslant a_1 + \ldots + a_{k-1}$. Следовательно $C_{j,k} \subset$

$S_{k-2} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$, если $a_{k-2} \leqslant a_1 + \ldots + a_j$. Теперь предположим, что $a_{k-2} > a_1 + \ldots + a_j$. Тогда $C_{j,k} \setminus S_{k-2} = D_{j,k}$, где

$$\begin{aligned} D_{j,k} = \bigl\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid\ & a_1 + \ldots + a_j \leqslant x_1 < a_{k-2},\ x_1 \leqslant a_1 + \ldots + a_{j+1}, \\ & a_k + \ldots + a_r \leqslant x_2 < \min(a_{j+2}, a_{k-1} + \ldots + a_r), \\ & m \leqslant x_1 + x_2\bigr\}. \end{aligned}$$

Чтобы завершить доказательство, рассуждаем с помощью индукции по r. Случай $r = 4$ доказан. Возьмем произвольное $r > 4$ и предположим, что лемма справедлива для $r-1$. Положим $\Gamma' = G(1, 2, \ldots, r-1)$, $\lambda' = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_{r-1}\omega_{r-1}$ и $H = H' = G(r-2, r-1) \subset \Gamma'$. Тогда $M' = K\Gamma' v^+ = M(\lambda')$ – подмодуль в ограничении $M(\omega)|\Gamma'$. По предположению индукции,

$$\begin{aligned} \Sigma' = \bigl\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid\ & a_1 \leqslant x_1 \leqslant a_1 + \ldots + a_{r-2}, \\ & a_{r-1} \leqslant x_2 \leqslant a_2 + \ldots + a_{r-1}, \\ & m' \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_1 + \ldots + a_{r-1}\bigr\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H), \end{aligned}$$

где $m' = \max_{1 \leqslant i \leqslant r-3}(a_i + a_{i+1} + a_{i+2}) \leqslant m$. При $(x_1, x_2) \in D_{j,k}$ имеем $a_1 \leqslant a_1 + \ldots + a_j \leqslant x_1 \leqslant \min(a_1 + \ldots + a_{j+1}, a_{k-2}) \leqslant a_1 + \ldots + a_{j+1} \leqslant a_1 + \ldots + a_{r-2}$, $x_2 < \min(a_{j+2}, a_{k-1} + \ldots + a_r) \leqslant a_{j+2} \leqslant a_2 + \ldots + a_{r-1}$ и $m' \leqslant m \leqslant x_1 + x_2 < \min(a_1 + \ldots + a_{j+1}, a_{k-2}) + \min(a_{j+2}, a_{k-1} + \ldots + a_r) \leqslant a_1 + \ldots + a_{j+2} \leqslant a_1 + \ldots + a_{r-1}$. Если $k < r$, то $a_{r-1} \leqslant a_k + \ldots + a_r \leqslant x_2$. Следовательно, $D_{j,k} \subset \Sigma'$ при $k \neq r$.

Аналогично, положим $\Gamma'' = G(2, \ldots, r)$, $\lambda'' = a_2\omega_2 + \ldots + a_r\omega_r$, $H = H'' = G(2, 3) \subset \Gamma''$ и $M'' = K\Gamma'' v^+ = M(\lambda'')$. Тогда

$$\begin{aligned} \Sigma'' = \bigl\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid\ & a_2 \leqslant x_1 \leqslant a_2 + \ldots + a_{r-1}, \\ & a_r \leqslant x_2 \leqslant a_3 + \ldots + a_r, \\ & m'' \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_2 + \ldots + a_r\bigr\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H), \end{aligned}$$

где $m'' = \max_{2 \leqslant i \leqslant r-2}(a_i + a_{i+1} + a_{i+2}) \leqslant m$. Возьмем произвольный вес $(x_1, x_2) \in D_{j,k}$, тогда $x_1 \leqslant \min(a_1 + \ldots + a_{j+1}, a_{k-2}) \leqslant a_{k-2} \leqslant a_2 + \ldots + a_{r-1}$, $a_r \leqslant a_k + \ldots + a_r \leqslant x_2 < \min(a_{j+2}, a_{k-1} + \ldots + a_r) \leqslant a_{k-1} + \ldots + a_r \leqslant a_3 + \ldots + a_r$ и $m'' \leqslant m \leqslant x_1 + x_2 \leqslant \min(a_1 + \ldots + a_{j+1}, a_{k-2}) + \min(a_{j+2}, a_{k-1} + \ldots + a_r) \leqslant a_{k-2} + a_{k-1} + \ldots + a_r \leqslant a_2 + \ldots + a_r$. Если $j > 1$, то $a_2 \leqslant a_1 + \ldots + a_j \leqslant x_1$. Отсюда вытекает, что $D_{j,k} \subset \Sigma''$ при $j \neq 1$. Значит, остается рассмотреть

$$\begin{aligned}D_{1,r} = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_1 \leqslant x_1 < a_{r-2},\ x_1 \leqslant a_1 + a_2,\\ a_r \leqslant x_2 < \min(a_3, a_{r-1} + a_r),\\ m \leqslant x_1 + x_2\big\}.\end{aligned}$$

Но в этом случае $x_1+x_2 < a_1+a_2+\min(a_3, a_{r-1}+a_r) \leqslant a_1+a_2+a_3 \leqslant m$, поэтому $D_{1,r} = \varnothing$, и лемма доказана. $\square$

В следующей лемме мы приводим некоторые факты о структуре модулей Вейля над группой типа A_2. Для алгебраической группы Γ и Γ-модуля M положим $m(\lambda) = \dim M^{\lambda}$.

Лемма 5. *Пусть* $\Gamma = A_2(K)$, $\mu = b_1\omega_1 + b_2\omega_2$ *– доминантный вес группы* Γ *и* $b_1 < p$. *Тогда существуют примитивные относительно* $\Gamma(1)$ *векторы* $v(k_1, k_2) \in \Delta(\mu)$, $0 \leqslant k_1 \leqslant b_1$, $0 \leqslant k_2 \leqslant b_2$, *с весами* $\omega(v(k_1, k_2)) = \mu - k_1\alpha_1 - (k_1 + k_2)\alpha_2$.

Доказательство. Для любого веса λ группы Γ имеем

$$m(\lambda) = \dim L(\mu)^{\lambda}_{\mathbb{C}},$$

поскольку характеры модулей $\Delta(\mu)$ и $L(\mu)_{\mathbb{C}}$ совпадают. Из [2, гл. VIII, §7, предложение 10] следует, что

$$X(L(\mu)_{\mathbb{C}}) = b_1X(L(\omega_1)_{\mathbb{C}}) + b_2X(L(\omega_2)_{\mathbb{C}})$$

(сумма b_1 копий множества $X(L(\omega_1)_{\mathbb{C}})$ и b_2 копий множества $X(L(\omega_2)_{\mathbb{C}})$. Согласно [2, гл. VIII, §13.1]

$$X(L(\omega_1)_{\mathbb{C}}) = \big\{\omega_1, \omega_1 - \alpha_1, \omega_1 - \alpha_1 - \alpha_2\big\}$$

и

$$X(L(\omega_2)_{\mathbb{C}}) = \big\{\omega_2, \omega_2 - \alpha_2, \omega_2 - \alpha_1 - \alpha_2\big\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}X(\Delta(\mu)) = X(L(\mu)_{\mathbb{C}}) = \big\{\mu - r_1\omega_1 - r_2\omega_2 \mid 0 \leqslant r_1, r_2 \leqslant b_1 + b_2,\\ -b_1 \leqslant r_2 - r_1 \leqslant b_2\big\}.\end{aligned}$$

Применяя формулу для кратностей весов [2, гл. VIII, §9.3], получаем, что для $\lambda \in X(\Delta(\mu))$

$$\begin{aligned}m(\lambda) = m(\lambda + \alpha_1) + m(\lambda + \alpha_2) - m(\lambda + 2\alpha_1 + \alpha_2)\\ - m(\lambda + \alpha_1 + 2\alpha_2) + m(\lambda + 2\alpha_1 + 2\alpha_2).\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$m(\lambda) = \begin{cases} \min(r_1, r_2) + 1, & \text{если } 0 \leqslant r_1 \leqslant b_1, \\ & 0 \leqslant r_2 \leqslant b_2; \\ \min(r_1, r_2) - \min(r_1 - b_1 - 1, r_2), & \text{если } r_1 > b_1, \\ & 0 \leqslant r_2 \leqslant b_2, r_1 - r_2 \leqslant b_1; \\ \min(r_1, r_2) - \min(r_1, r_2 - b_2 - 1), & \text{если } 0 \leqslant r_1 \leqslant b_1, \\ & r_2 > b_2, r_2 - r_1 \leqslant b_2; \\ \min(r_1, r_2) - \min(r_1 - b_1 - 1, r_2) & \\ - \min(r_1, r_2 - b_2 - 1) - 1, & \text{если } b_1 < r_1 \leqslant b_1 + b_2, \\ & b_2 < r_2 \leqslant b_1 + b_2. \end{cases}$$

Из последней формулы вытекает, что $m(\lambda) = m(\lambda + \alpha_1) + 1$ тогда и только тогда, когда $0 \leqslant r_1 \leqslant b_1$ и $0 \leqslant r_2 - r_1 \leqslant b_2$. Значит, $\mu - k_1\alpha_1 - (k_1 + k_2)\alpha_2 \in X(\Delta(\mu))$ при $0 \leqslant k_1 \leqslant b_1$, $0 \leqslant k_2 \leqslant b_2$ и существуют весовые векторы $v(k_1, k_2) \in \Delta(\mu)$ с этими весами, такие, что $X_1 v(k_1, k_2) = 0$. Используя формулу (1) для $x_1(t)$ и тот факт, что $b_1 < p$, получаем, что векторы $v(k_1, k_2)$ примитивны относительно $\Gamma(1)$. $\square$

Лемма 6. *Пусть $r \geqslant 3$ и $a_{r-1} + a_r + 1 < p$. Тогда $R \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$, где*

$$R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 = a - a_r,\ x_2 \leqslant a_r\},$$

и для любого веса из R существует примитивный относительно H вектор такого веса. Если $a_1 + a_2 + 1 < p$, то $R' \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$, где

$$R' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant a_1,\ x_2 = a - a_1\},$$

и также существуют примитивные относительно H векторы с такими весами.

Доказательство. Пусть сначала $r = 3$. Можно считать, что $H = G(1,2)$. Положим $\Gamma = G(2,3)$, $\mu = a_2\omega_1 + a_3\omega_2$ и $N = K\Gamma v^+ = M(\mu)$. Поскольку $a_2 + a_3 + 1 < p$, фильтрация из [6, часть II, предложение 8.19] влечет, что $N = \Delta(\mu)$. По лемме 5, существуют примитивные относительно $G(2)$ векторы $v_k \in N$, $0 \leqslant k \leqslant a_3$, с весами $\omega_\Gamma(v_k) = \mu - a_2\alpha_1 - (a_2 + k)\alpha_2$. Следовательно, $\omega(v_k) = \omega - a_2\alpha_2 - (a_2 + k)\alpha_3$, векторы v_k также примитивны относительно H и $\{\omega_H(v_k),\ 0 \leqslant k \leqslant a_3\} = R \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$.

Пусть теперь $r > 3$. Положим $\Pi = G(r-2, r-1, r)$, $\lambda = a_{r-2}\omega_1 + a_{r-1}\omega_2 + a_r\omega_3$, $L = K\Pi v^+ = M(\lambda)$ и предположим, что $H = G(r-2, r-1)$. Применяя результаты для $r = 3$, мы получаем векторы $w_k \in L$, $0 \leqslant k \leqslant a_r$, которые являются примитивными относительно H и имеют веса $\omega(w_k) = \omega - a_{r-1}\alpha_{r-1} - (a_{r-1} + k)\alpha_r$. Эти векторы также примитивны относительно $G(1, \ldots, r-3)$. Согласно [12, лемма 2.46], векторы

$$u_k = X_{-(r-3), a_1+\ldots+a_{r-3}} \ldots X_{-2, a_1+a_2} X_{-1, a_1} w_k$$

примитивны относительно H. Теперь

$$\{\omega_H(u_k),\ 0 \leqslant k \leqslant a_r\} = R \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

Доказательство для R' аналогично. $\square$

Условие $a_1 + a_2 + 1 < p$ или $a_{r-1} + a_r + 1 < p$ здесь является существенным, как показано в лемме 1.

Доказательство леммы 1. Можно записать вес ω в виде $\omega = \lambda + \mu$, где $\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ и $\mu = a_3\omega_3 + \ldots + a_r\omega_r$. Согласно [8, лемма 3.11], для $r = 3$

$$\begin{aligned} \operatorname{Irr}(L(\lambda)|H) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_2 \leqslant x_1 \leqslant a_1 + a_2,\ x_2 = 0\} \\ \cup\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_2 \leqslant a_2,\ x_1 + x_2 = a_1 + a_2\}. \end{aligned}$$

Если $r > 3$, то из этой же леммы вытекает, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Irr}(L(\lambda)|H) = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant a_1 + a_2,\ x_2 = 0\big\} \\ \cup\big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_2 \leqslant a_2,\ x_1 + x_2 = a_1 + a_2\big\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, предложение 1 влечет $\operatorname{Irr}(L(\mu)|H) \subset S(\omega)$. Поскольку $L(\omega)$ – композиционный фактор тензорного произведения $L(\lambda) \otimes L(\mu)$, получаем $\operatorname{Irr}(L(\omega)|H) \subset \operatorname{Irr}(L(\lambda)|H) \otimes \operatorname{Irr}(L(\mu)|H)$. Это завершает доказательство. $\square$

Из леммы 1 следует, что при $a_1 + a_2 + 1 = p$ имеем $R' \cap \operatorname{Irr}(L(\omega)|H) = \{(a_1, a - a_1)\}$.

Лемма 7. *Пусть $r \geqslant 4$, вес ω является p-ограниченным, $a_1 + a_2 + 1 < p$ и $a_{r-1} + a_r + 1 < p$. Тогда $Q \cup Q' \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$, где*

$$Q = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{r-2} + a_{r-1} \leqslant x_1 \leqslant a - a_r,\ x_2 \leqslant a_r\big\},$$

$$Q' = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant a_1,\ a_2 + a_3 \leqslant x_2 \leqslant a - a_1\big\},$$

и для любого веса из $Q \cup Q'$ существует примитивный относительно H вектор такого веса.

Доказательство. Определим векторы w_k, как в лемме 6. Положим

$$s_{k,l} = X_{-(r-3),c_l+a_{l+1}+\ldots+a_{r-3}} \ldots X_{-(l+1),c_l+a_{l+1}} X_{-l,c_l} w_k,$$

где $1 \leqslant l \leqslant r-3$ и $0 \leqslant c_l \leqslant a_l$. Из [12, лемма 2.46] следует, что они примитивны относительно H. Теперь

$$\{\omega_H(s_{k,l}) \mid 0 \leqslant k \leqslant a_r,\ 1 \leqslant l \leqslant r-3,\ 0 \leqslant c_l \leqslant a_l\} = Q \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

Аналогично рассуждаем для Q'. □

Лемма 8. *Пусть $r \geqslant 3$, вес ω является p-ограниченным, $a_1 + a_2 + 1 < p$, $a_{r-1} + a_r + 1 < p$ и $m = \max_{1 \leqslant i \leqslant r-2}(a_i + a_{i+1} + a_{i+2})$. Тогда $S(\omega) \setminus W \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$, где*

$$W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 < m - a_r, x_2 < m - a_1,\ x_1 + x_2 < m\}.$$

Доказательство. При $r = 3$ утверждение следует из лемм 2 и 6.

Пусть $r > 3$. Согласно лемме 4,

$$S' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_1 \leqslant x_1 \leqslant a - a_r,\ a_r \leqslant x_2 \leqslant a - a_1,\ m \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

По лемме 7, $Q \cup Q' \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$, где

$$Q = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{r-2} + a_{r-1} \leqslant x_1 \leqslant a - a_r,\ x_2 \leqslant a_r\big\},$$
$$Q' = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant a_1,\ a_2 + a_3 \leqslant x_2 \leqslant a - a_1\big\}.$$

Поскольку m – это максимум $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$, получаем $a_{r-2} + a_{r-1} \leqslant m - a_r$ и $a_2 + a_3 \leqslant m - a_1$. Лемма доказана. □

Лемма 9. *Пусть $r = 4$ и $a_i + a_{i+1} + 1 < p$ при $1 \leqslant i \leqslant 3$. Тогда*

$$U = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant a - a_4, x_2 \leqslant a - a_1,\ z(\omega) \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a\big\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H),$$

где

$$z(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_1 + a_2 + a_3 + 2 < p \text{ и } a_2 + a_3 + a_4 + 2 < p; \\ \min(a_2, a_3), & \text{если } a_1 + a_2 + a_3 + 2 \geqslant p \text{ и } a_2 + a_3 + a_4 + 2 \geqslant p; \\ a_2, & \text{если } a_1 + a_2 + a_3 + 2 < p \text{ и } a_2 + a_3 + a_4 + 2 \geqslant p; \\ a_3, & \text{если } a_1 + a_2 + a_3 + 2 \geqslant p \text{ и } a_2 + a_3 + a_4 + 2 < p. \end{cases}$$

Доказательство. Можно считать, что $H = G(2,3)$. Если $a_1+a_2+a_3+2 < p$ и $a_2+a_3+a_4+2 < p$, то согласно [8, лемме 7.1], $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) = S(\omega)$. По предложению 1, $\mathrm{Irr}(M(\omega)|H) \subset S(\omega)$, с другой стороны, очевидно, что $\mathrm{Irr}(L(\omega)|H) \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$. Следовательно, также $\mathrm{Irr}(M(\omega)|H) = S(\omega)$.

Предположим, что $a_1 + a_2 + a_3 + 2 \geqslant p$. Пусть $\Gamma_1 = G(1,2,3)$ и $\Gamma_2 = G(2,3,4)$. Существует $0 \leqslant k \leqslant a_1$, такое, что $k + a_2 + a_3 + 2 = p$. Согласно [6, часть II, 8.20] модуль $\Delta((k + a_2)\omega_1 + a_3\omega_2 + a_4\omega_3)$ неприводим. Из [10, теорема A] следует, что $\Delta((a_1+a_2)\omega_1+a_3\omega_2+a_4\omega_3)$ – это подмодуль в ограничении $M(\omega)|\Gamma_2$. Ограничивая этот модуль Вейля на H, получаем

$$\begin{aligned}\big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant a - a_4,\ x_2 \leqslant a_3 + a_4,\ a_3 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a\big\}\\ \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).\end{aligned} \tag{2}$$

Если также $a_2+a_3+a_4+2 \geqslant p$, то аналогично получаем, что $\Delta(a_1\omega_1+a_2\omega_2 + (a_3 + a_4)\omega_3)$ – подмодуль в $M(\omega)|\Gamma_1$ и

$$\begin{aligned}\big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant a_1 + a_2, x_2 \leqslant a - a_1,\ a_2 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a\big\}\\ \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).\end{aligned} \tag{3}$$

Мы можем считать, что $a_2 \geqslant a_3$. Если $a_2 \leqslant a_3+a_4+1$, то утверждение леммы следует из (2) и (3). Пусть $a_2 > a_3 + a_4 + 1$. Нам нужно найти элементы из $\mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$, для которых $x_2 > a_3 + a_4$ и $x_1 + x_2 < a_2$. Положим $\Gamma = G(1,2)$ и $N = K\Gamma v^+$. Поскольку $a_1+a_2+1 < p$, получаем $N = \Delta(a_1\omega_1 + a_2\omega_2)$. По лемме 5, существуют векторы $u(k) \in N$, $0 \leqslant k \leqslant a_2$, примитивные относительно $G(2)$ с весами $\omega - k\alpha_1 - k\alpha_2$. Эти векторы также примитивны относительно Γ_2 и $\omega_{\Gamma_2}(u(k)) = (a_2 - k)\omega_1 + (k+a_3)\omega_2 + a_4\omega_3$. Поскольку $a_2+a_3+1 < p$, получаем по лемме 6 недостающие композиционные факторы.

Теперь предположим, что $a_2 + a_3 + a_4 + 2 < p$. Векторы $v(d) = X_{-4,a_3+d}X_{-3,d}v^+$, $0 \leqslant d \leqslant a_3$, примитивны относительно Γ_1 согласно [12, лемма 2.46]. Значит, они порождают неразложимые Γ_1-модули. Положим

$$\lambda(d) = \omega_{\Gamma_1}(v(d)) = a_1\omega_1 + (a_2 + d)\omega_2 + (a_3 + a_4 - d)\omega_3.$$

Модули $L(\lambda(d))$ являются композиционными факторами ограничения $M(\omega)|\Gamma_1$. Поскольку $a_1 + a_2 + a_3 + 2 \geqslant p$ и $a_1 + a_2 + 1 < p$, можно выбрать d_0 так, что $a_1+a_2+d_0+2=p$. Согласно [8, теорема 1.3],

$$\begin{aligned}\operatorname{Irr}(L(\lambda(d_0))|H) = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant a_1+a_2+d_0,\\ x_2\leqslant a-a_1,\ a_2+d_0\leqslant x_1+x_2\leqslant a\}.\end{aligned}$$

Если $a_2+d_0\leqslant a_3+a_4+1$, получаем все недостающие факторы. Пусть $a_2+d_0>a_3+a_4+1$. Нам нужно найти элементы из $\operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$ с условиями $x_2>a_3+a_4$ и $x_1+x_2<a_2+d_0$. Рассуждаем, как для $a_2+a_3+a_4+2\geqslant p$, используя векторы $u(k)\in N$, $0\leqslant k\leqslant a_2$.

Случай $a_1+a_2+a_3+2<p$ и $a_2+a_3+a_4+2\geqslant p$ аналогичен предыдущему. Лемма доказана. □

Заметим, что если $G=A_4(K)$, $a_i+a_{i+1}+1<p$ для $1\leqslant i\leqslant 3$ и $a_1+a_2+a_3+2\geqslant p$ или $a_2+a_3+a_4+2\geqslant p$, то существуют представления, для которых $\operatorname{Irr}(L(\omega)|H)$ не совпадает с соответствующим множеством в характеристике 0.

Пример. Пусть $r=4$.

а) В [8, теорема 1.7] доказано, что для $\omega=a_2\omega_2+a_3\omega_3$ с $a_2a_3\neq 0$ и $a_2+a_3+2=p$

$$\operatorname{Irr}(L(\omega)|H)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2 \mid \min(a_2,a_3)\leqslant x_1+x_2\leqslant a_2+a_3\}.$$

б) Там же показано, что для $\omega=a_1\omega_1+a_2\omega_2+a_3\omega_3$ с $a_1a_3\neq 0$, $a_1+a_2\geqslant a_3$ и $a_1+a_2+a_3+2=p$

$$\operatorname{Irr}(L(\omega)|H)=\big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2 \mid x_2\leqslant a_2+a_3,\ a_3\leqslant x_1+x_2\leqslant a_1+a_2+a_3\big\}.$$

Лемма 10. *Пусть $r\geqslant 4$ и $a_i+a_{i+1}+1<p$ при $1\leqslant i\leqslant r-1$. Тогда*

$$Y=\big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2 \mid x_1\leqslant a-a_r,\, x_2\leqslant a-a_1,\ \max_{2\leqslant i\leqslant r-1} a_i\leqslant x_1+x_2\leqslant a\big\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

Доказательство. Для $r=4$ лемма доказана. Пусть $r>4$. Зафиксируем i, при котором достигается

$$m=\max_{1\leqslant i\leqslant r-2}(a_i+a_{i+1}+a_{i+2}).$$

По лемме 8, $S(\omega)\setminus W\subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$, где

$$W=\big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2 \mid x_1<m-a_r,\ x_2<m-a_1,\ x_1+x_2<m\big\}.$$

Мы можем предполагать, что $i<r-2$.

Пусть сначала $i = 1$. Положим $G_1 = G(1,2,3,4)$ и $M_1 = KG_1v^+ = M(a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4)$. Тогда применяя лемму 9 к модулю M_1, получаем

$$\{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant m, x_2 \leqslant m - a_1 + a_4,\ \max(a_2,a_3) \leqslant x_1 + x_2 \leqslant m + a_4\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H),$$

откуда вытекает утверждение леммы.

Теперь пусть $i > 1$. Положим $G_{i-1} = G(i-1,i,i+1,i+2)$, $M_{i-1} = KG_{i-1}v^+ = M(a_{i-1}\omega_1 + a_i\omega_2 + a_{i+1}\omega_3 + a_{i+2}\omega_4)$ и $G_i = G(i,i+1,i+2,i+3)$, $M_i = KG_iv^+ = M(a_i\omega_1 + a_{i+1}\omega_2 + a_{i+2}\omega_3 + a_{i+3}\omega_4)$. Из леммы 9 для M_{i-1} и M_i следует, что множества

$$U_1 = \bigl\{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant a_{i-1} + m - a_{i+2},\ x_2 \leqslant m,\ \max(a_i,a_{i+1}) \leqslant x_1 + x_2 \leqslant m + a_{i-1}\bigr\}$$

и

$$U_2 = \bigl\{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 \leqslant m,\ x_2 \leqslant m - a_i + a_{i+3},\ \max(a_{i+1},a_{i+2}) \leqslant x_1 + x_2 \leqslant m + a_{i+3}\bigr\}$$

лежат в $\operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$. Поскольку $(a_{i-1} + m - a_{i+2}) + (m - a_i + a_{i+3}) \geqslant m$, имеем

$$\bigl\{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1, x_2 \leqslant m,\ \max(a_i,a_{i+1},a_{i+2}) \leqslant x_1 + x_2 \leqslant m\bigr\} \subset U_1 \cup U_2 \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

Отсюда следует искомое. □

§3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 2. ([8, теорема 1.6], исправления).

При $r = 4$ или $r = 5$ утверждение следует из [8, лемма 7.1]. Пусть $r \geqslant 6$.

1) Пусть $S_1 = G(1,2,3,4)$, $H = G(3,4)$, $M_1 = KS_1v^+$ и $\mu_1 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4$. Напомним, что $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 3 \leqslant p$. При $0 \leqslant r \leqslant a_1$ и $0 \leqslant s \leqslant a_2 + a_3$ веса $\lambda(r) = r\omega_1 + (a_2 + a_3 + a_4)\omega_2$ и $\nu(s) = (a_1 + s)\omega_1 + (a_2 + a_3 + a_4 - s)\omega_2$ принадлежат $\operatorname{Irr}(M_1|H)$ согласно [8, лемма 7.1]. Нам нужно найти примитивные относительно H и $G(5,\dots,r)$ векторы v_r, $w_s \in M_1$ с такими весами. В доказательстве [8, теорема 1.6] они были найдены неявно с помощью полной приводимости ограничения $M_1|H$ (теорема Брандена, Клещева и Супруненко [3, теорема 6.2]). Однако, этот метод не объясняет, почему такие векторы имеют вес $a_5\omega_1 +$

$a_6\omega_2+\ldots+a_r\omega_{r-4}$ относительно $G(5,\ldots,r)$. Здесь мы построим такие векторы явно.

а) Положим

$$v = X_{-1,a_1+a_2+a_3}X_{-2,a_2+a_3}X_{-3,a_3}v^+.$$

Согласно [12, лемма 2.46] он примитивен относительно $G(2,3,4)$ и

$$\omega_{G(2,3,4)}(v) = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + (a_3+a_4)\omega_3.$$

Пусть $M = KG(2,3)v$. Из фильтрации [6, часть II, предложение 8.19] следует, что $M = \Delta(\mu)$, где $\mu = a_1\omega_1' + a_2\omega_2'$. Значит,

$$\mathrm{ch}(M) = \mathrm{ch}(L(\mu)_{\mathbb{C}}).$$

Применяя лемму 5, получаем, что для $\lambda = \mu - (r+a_2)\alpha_1' - a_2\alpha_2'$ с $0 \leqslant r \leqslant a_1$ существуют весовые векторы $v_r \in M^\lambda$, которые примитивны относительно $G(3)$. Они также примитивны относительно $H = G(3,4)$ и

$$\omega_H(v_r) = r\omega_1 + (a_2+a_3+a_4)\omega_2 = \lambda(r).$$

б) При $0 \leqslant d \leqslant a_3$ положим

$$w(d) = X_{-1,a_1+a_2+d}X_{-2,a_2+d}X_{-3,d}v^+.$$

Тогда из [12, лемма 2.46] вытекает, что они примитивны относительно $G(2,3,4)$ и

$$\omega_{G(2,3,4)}(w(d)) = a_1\omega_1 + (a_2+a_3-d)\omega_2 + (a_4+d)\omega_3.$$

Для $0 \leqslant k \leqslant a_2+a_3-d$ определим

$$w(d,k) = X_{-2,a_1+k}X_{-3,k}w(d).$$

Векторы $w(d,k)$ примитивны относительно H и

$$\omega_H(w(d,k)) = (a_1+a_2+a_3-d-k)\omega_1 + (a_4+d+k)\omega_3.$$

Таким образом, $w(d,0)$ с $0 \leqslant d \leqslant a_3$ и $w(a_3,k)$ с $0 \leqslant k \leqslant a_2$ дают все веса $\nu(s)$.

Следовательно, мы получили примитивные относительно H векторы v_r, $w_s \in M_1$, которые порождают H-модули со старшими весами, равными $\lambda(r)$ и $\nu(s)$ соответственно, и $\omega_{G(j)}(v_r) = \omega_{G(j)}(w_s) = a_j$ при $5 \leqslant j \leqslant r$. Теперь мы можем воспользоваться рассуждениями из доказательства [8, теорема 1.6].

2) Положим $S_i = G(i,i+1,i+2,i+3)$ для $2 < i \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$, i нечетного, $H = G(\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2},\alpha_{i+3})$ и $M_i = KS_iv^+$. Тогда M_i – это неприводимый S_i-модуль со старшим весом $\mu_i = a_i\omega_1+a_{i+1}\omega_2+a_{i+2}\omega_3+a_{i+3}\omega_4$

и $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + 3 \leqslant p$. При $0 \leqslant r \leqslant a_{i+3}$ и $0 \leqslant s \leqslant a_{i+1} + a_{i+2}$ веса $\lambda_i(r) = (a_i + a_{i+1} + a_{i+2})\omega_1 + r\omega_2$ и $\nu_i(s) = (a_i + s)\omega_1 + (a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} - s)\omega_2$ принадлежат $\mathrm{Irr}(M_i|H)$ согласно [8, лемма 7.1]. Как и выше, нам необходимо описать явно соответствующие примитивные векторы $v_{i,r}$ и $w_{i,s} \in M_i$.

а) Положим $M = KG(i+2, i+3)v^+$. Согласно [6, часть II, предложение 8.19], $M = \Delta(\mu)$ для $\mu = a_{i+2}\omega_1' + a_{i+3}\omega_2'$ и $\mathrm{ch}(M) = \mathrm{ch}(L(\mu)_{\mathbb{C}})$. По лемме 5 для весов $\lambda = \mu - k\alpha_1' - k\alpha_2'$ с $0 \leqslant k \leqslant a_{i+3}$ существуют весовые векторы $v(k) \in M^\lambda$, примитивные относительно $G(i+3)$. Положим $v(k,1) = X_{-(i+1),k}v(k)$. Тогда

$$\omega(v(k,1)) = \omega - k(\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \alpha_{i+3}),$$

$$\omega_H(v(k,1)) = (a_i + a_{i+1} + a_{i+2})\omega_1 + (a_{i+3} - k)\omega_3,$$

и мы получаем примитивные векторы с весами $\lambda_i(r)$.

б) Теперь пусть

$$w(k) = X_{-(i+1),a_{i+1}+k}X_{-(i+2),k}v^+$$

при $0 \leqslant k \leqslant a_{i+2}$. Тогда такие векторы примитивны относительно H и

$$\begin{aligned}\omega_{S_i}(w(k)) &= (a_i + a_{i+1} + k)\omega_1 \\ &\quad + (-a_{i+1} - k)\omega_2 + (a_{i+1} + a_{i+2} - k)\omega_3 + (a_{i+3} + k)\omega_3, \\ \omega_H(w(k)) &= (a_i + a_{i+1} + a_{i+2} - k)\omega_1 + (a_{i+3} + k)\omega_3.\end{aligned}$$

Положим

$$w(a_{i+2}, d) = X_{-(i+2),d}w(a_{i+2}),$$

где $0 \leqslant d \leqslant a_{i+1}$. Эти векторы также примитивны относительно H и

$$\begin{aligned}\omega(w(a_{i+2}, d)) &= \omega - (a_{i+1} + a_{i+2})\alpha_{i+1} - (a_{i+2} + d)\alpha_{i+2}, \\ \omega_H(w(a_{i+2}, d)) &= (a_i + a_{i+1} - d)\omega_1 + (a_{i+2} + a_{i+3} + d)\omega_3.\end{aligned}$$

Следовательно, $w(k)$ при $0 \leqslant k \leqslant a_{i+2}$ и $w(a_{i+2}, d)$ при $0 \leqslant d \leqslant a_{i+1}$ дают все веса $\nu_i(s)$.

Таким образом, существуют векторы $v_{i,r}$, $w_{i,s} \in M_i$, которые примитивны относительно подгрупп H, $G(1, \ldots, i-1)$ и $G(i+5, \ldots, r)$ и порождают H-модули со старшими весами $\lambda_i(r)$ и $\nu_i(s)$. Для таких векторов $\omega_{G(1,\ldots,i-1)}(v_{i,r}) = \omega_{G(1,\ldots,i-1)}(w_{i,s}) = a_1\omega_1 + \ldots + a_{i-1}\omega_{i-1}$ и $\omega_{G(i+4,\ldots,r)}(w_{i,s}) = a_{i+4}\omega_1 + \ldots + a_r\omega_{r-i-3}$. Теперь продолжаем доказательство, как в [8, теорема 1.6]. $\square$

Чтобы завершить доказательство теоремы 3 нам нужно найти “малые” композиционные факторы.

Лемма 11. *Пусть* $r = 5$, $a_i + a_{i+1} + 1 < p$ *при* $1 \leqslant i \leqslant 4$ *и* $a_3 + a_4 + a_5 + 2 \geqslant p$. *Тогда*

$$Z = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant \max_{2 \leqslant i \leqslant 4} a_i\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

Более того, при $a_1 + a_2 + a_3 + 2 \geqslant p$

$$Z' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant p - 2\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$$

и при $a_1 + a_2 + a_3 + 2 < p$

$$Z'' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant a_1 + a_2 + a_3\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

Доказательство. Мы можем считать, что $H = G(2,3)$. Обозначим $\Gamma_1 = G(1,2,3)$ и $\Gamma_2 = G(2,3,4)$. Существует $0 \leqslant k \leqslant a_5$, такое, что $a_3 + a_4 + k + 2 = p$. Положим $\nu = a_2\omega_1 + a_3\omega_2 + (a_4 + k)\omega_3$. Согласно [6, часть II, 8.20] $L(\nu) = \Delta(\nu)$. Поэтому $K\Gamma_2(X_{-5,k}v^+) = \Delta(\nu)$.

Чтобы найти композиционные факторы для $\Delta(\nu)|H$, мы можем использовать описание ограничения неприводимого модуля $L(\nu)_\mathbb{C}$ на соответствующую подгруппу $H_\mathbb{C}$. В самом деле, из равенства $\mathrm{ch}(\Delta(\nu)) = \mathrm{ch}(L(\nu)_\mathbb{C})$ следует, что если $H_\mathbb{C}$-модуль $L(\eta)_\mathbb{C}$ является композиционным фактором ограничения $L(\nu)_\mathbb{C}|H_\mathbb{C}$, то H-модуль $L(\eta)$ – композиционный фактор ограничения $\Delta(\nu)|H$.

Чтобы сформулировать правила ветвления для $L(\nu)_\mathbb{C}|H_\mathbb{C}$, нам нужно ввести некоторые обозначения. Обозначим символами ε_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, веса стандартных $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$-модулей. Если мы записываем веса групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ в терминах сигнатур ε_i, то $(b_1, \ldots, b_n)$ означает $\sum_{i=1}^{n} b_i\varepsilon_i$. Заметим, что $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 0$ для группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Хорошо известно, что $\omega_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Расширим модуль $L(\nu)_\mathbb{C}$ до $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$-модуля $M_\mathbb{C}$. Его старший вес записывается в терминах сигнатур как $(a_2{+}a_3{+}a_4{+}k, a_3{+}a_4{+}k, a_4{+}k, 0)$. Из классических правил ветвления для представлений специальных линейных групп [5, 8.1.1] вытекает, что

$$M_\mathbb{C}|\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \cong \oplus_b L(b)_\mathbb{C},$$

где суммирование производится по всем тройкам $b = (b_1, b_2, b_3)$, для которых

$$a_2 + a_3 + a_4 + k \geqslant b_1 \geqslant a_3 + a_4 + k \geqslant b_2 \geqslant a_4 + k \geqslant b_3 \geqslant 0. \qquad (4)$$

При $0 \leqslant j \leqslant a_3$ зафиксируем вес $b(j)$ в (4) с $b_1 = a_3 + a_4 + k$, $b_2 = a_3 - j + a_4 + k$ и $b_3 = 0$. Мы хотим найти вес $\tau(j) = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in X(M_{\mathbb{C}})$, такой, что его ограничение на $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ совпадает с $b(j)$ (мы увидим, что $\tau(j)$ определяется однозначно). Поскольку $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ и $\xi = \nu - \sum\limits_{i=1}^{3} x_i\alpha_i$ для любого веса $\xi = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in X(M_{\mathbb{C}})$, получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{4} c_i = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 3k$. Имеем $t_1 = b_1 = a_3 + a_4 + k$, $t_2 = b_2 = a_3 - j + a_4 + k$ и $t_3 = b_3 = 0$. Следовательно, $t_4 = a_2 + j + a_4 + k$ и $\tau(j) = \nu - a_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - j(\alpha_2 + \alpha_3) - (a_4 + k)\alpha_3$.

По теореме Брандена, Клещева и Супруненко [3, теорема 6.2] модуль $\Delta(\nu)$ вполне приводим. Значит, существует вектор $v(j) \in \Delta(\nu)$ веса $\tau(j)$, примитивный относительно H. Этот вектор также примитивен относительно Γ_1,

$$\omega(v(j)) = \omega - a_2(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - j(\alpha_3 + \alpha_4) - (a_4 + k)\alpha_4 - k\alpha_5$$

и

$$\mu(j) = \omega_{\Gamma_1}(v) = (a_1 + a_2)\omega_1 + j\omega_2 + (a_3 - j + a_4 + k)\omega_3.$$

Если $a_1 + a_2 + a_3 + 2 \geqslant p$, зафиксируем j_0, такое, что $a_1 + a_2 + j_0 + 2 = p$. В противном случае, положим $j_0 = a_3$.

Теперь при $0 \leqslant j \leqslant j_0$ из [8, теорема 1.3] вытекает, что

$$\mathrm{Irr}(M(\mu(j))|H) = \mathrm{Irr}(L(\mu(j))_{\mathbb{C}}|H_{\mathbb{C}}).$$

Следовательно, при $a_1 + a_2 + a_3 + 2 \geqslant p$

$$Z' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant p - 2\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$$

и при $a_1 + a_2 + a_3 + 2 < p$

$$Z'' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant a_1 + a_2 + a_3\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

Теперь рассмотрим различные случаи, чтобы доказать, что $Z \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$. Положим $G_1 = G(1, 2, 3, 4)$, $\lambda_1 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4$, $M_1 = KG_1v^+ = M(\lambda_1)$, $G_2 = G(2, 3, 4, 5)$, $\lambda_2 = a_2\omega_1 + a_3\omega_2 + a_4\omega_3 + a_5\omega_4$ и $M_2 = KG_2v^+ = M(\lambda_2)$.

1) Пусть $a_1 + a_2 + a_3 + 2 < p$ и $a_2 + a_3 + a_4 + 2 < p$. Применяя лемму 9 к модулю M_1, имеем

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant a_2 + a_3\} \subset \mathrm{Irr}(M_1|H) \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

С другой стороны, из этой же леммы вытекает, что

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_3 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_3 + a_4\} \subset \mathrm{Irr}(M_2|H) \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

Поэтому $Z \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$.

2) Предположим, что $a_1 + a_2 + a_3 + 2 \geqslant p$ и $a_2 + a_3 + a_4 + 2 \geqslant p$. Рассуждая, как в пункте 1, получаем, что

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \min(a_2, a_3) \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_2 + a_3\} \\ \subset \operatorname{Irr}(M_1|H) \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$$

и

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \min(a_3, a_4) \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_3 + a_4\} \\ \subset \operatorname{Irr}(M_2|H) \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

Значит,

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \min(a_2, a_3, a_4)) \leqslant x_1 + x_2 \leqslant \max(a_2, a_3, a_4)\} \\ \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

Объединяя это вложение с $Z' \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$, получаем искомое.

3) Пусть $a_1 + a_2 + a_3 + 2 \geqslant p$ и $a_2 + a_3 + a_4 + 2 < p$. Тогда

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_3 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_2 + a_3\} \subset \operatorname{Irr}(M_1|H) \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$$

и

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_3 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_3 + a_4\} \subset \operatorname{Irr}(M_2|H) \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

Следовательно,

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_3 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant \max(a_2, a_3, a_4)\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

Утверждение леммы в этом случае вытекает из того факта, что $Z' \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$.

4) Наконец, пусть $a_1 + a_2 + a_3 + 2 < p$ и $a_2 + a_3 + a_4 + 2 \geqslant p$. Как и выше,

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_2 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_2 + a_3\} \subset \operatorname{Irr}(M_1|H) \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$$

и

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \min(a_3, a_4) \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_3 + a_4\} \\ \subset \operatorname{Irr}(M_2|H) \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

Объединяя $Z'' \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$ с предыдущими вложениями, получаем искомое. $\square$

Лемма 12. *Пусть* $r > 5$ *и* $a_i + a_{i+1} + 1 < p$ *при* $1 \leqslant i \leqslant r-1$. *Тогда*

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant \max_{2 \leqslant i \leqslant r-1} a_i\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

Доказательство. Применим индукцию по r.

1) Сначала считаем, что $r = 6$. При $i \in \{1, 2\}$ положим $G_i = G(i, i+1, i+2, i+3, i+4)$ и $M_i = KG_i v^+ = M(a_i\omega_1 + a_{i+1}\omega_2 + a_{i+2}\omega_3 + a_{i+3}\omega_4 + a_{i+4}\omega_5)$. При $j \in \{1, 2, 3\}$ положим $\Gamma_j = G(j, j+1, j+2, j+3)$ и $V_j = K\Gamma_j v^+ = M(a_j\omega_1 + a_{j+1}\omega_2 + a_{j+2}\omega_3 + a_{j+3}\omega_4)$.

Если все $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + 2 < p$, то утверждение следует из леммы 9 для V_j.

Теперь предположим, что существует i, для которого $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + 2 \geqslant p$. Зафиксируем минимальное такое i.

а) Пусть сначала $i = 1$. Из леммы 11 для M_1 вытекает, что

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant \max_{2 \leqslant i \leqslant 4} a_i\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H),$$

при $a_3 + a_4 + a_5 + 2 \geqslant p$

$$Z' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant p - 2\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$$

и при $a_3 + a_4 + a_5 + 2 < p$

$$Z'' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant a_3 + a_4 + a_5\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

Поскольку $a_5 \leqslant p - 2$, из этих вложений следует, что $B \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H)$.

б) Предположим, что $i = 2$. Если $a_4 + a_5 + a_6 + 2 \geqslant p$, рассуждаем, как в пункте а). Следовательно, можно считать, что $a_4 + a_5 + a_6 + 2 < p$.

Из леммы 11 для M_2 следует, что

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant \max_{3 \leqslant i \leqslant 5} a_i\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

Пусть сначала $a_3 + a_4 + a_5 + 2 \geqslant p$. Тогда можно применить лемму 11 к модулю M_1 и получить

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant \max_{2 \leqslant i \leqslant 4} a_i\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H),$$

откуда вытекает искомое.

Теперь предположим, что $a_3 + a_4 + a_5 + 2 < p$. Если $a_2 \leqslant \max_{3 \leqslant i \leqslant 5}$, то утверждение доказано. Пусть $a_2 > \max_{3 \leqslant i \leqslant 5}$. Поскольку $a_2 + a_3 + a_4 > a_3 + a_4 + a_5$, применяя лемму 9 к модулю V_2, получаем

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid a_4 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_3 + a_4 + a_5\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

Значит,

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant a_3 + a_4 + a_5\} \subset \mathrm{Irr}(M(\omega)|H).$$

Если $a_2 \leqslant a_3 + a_4 + a_5$, то $B \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$. Будем считать, что $a_2 > a_3 + a_4 + a_5$. Для k, $0 \leqslant k \leqslant a_4$, положим $v = X_{-5,k+a_5}X_{-4,k}v^+$. Согласно [12, лемма 2.46] вектор v примитивен относительно подгруппы Γ_1. Его вес для Γ_1 равен

$$\lambda(k) = l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + l_3\omega_3 + l_4\omega_4 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + (a_3+k)\omega_3 + (a_4+a_5-k)\omega_4.$$

Следовательно, $K\Gamma_1 v = M(\lambda(k))$. Выберем k, такое, что $a_2 + a_3 + k = p - 2$. Это можно сделать, поскольку $a_2 + a_3 < p - 1$ и $a_2 + a_3 + a_4 + 2 \geqslant p$. Тогда модуль $M(\lambda(k))$ удовлетворяет условиям леммы 9. Действительно, $l_1 + l_2 = a_1 + a_2 < p-1$, $l_2 + l_3 = a_2 + a_3 + k = p-2 < p-1$ и $l_3 + l_4 = a_3 + a_4 + a_5 < p - 2$. Имеем

$$l_1 + l_2 + l_3 = a_1 + a_2 + a_3 + k \ \geqslant a_2 + a_3 + k = p - 2,$$
$$l_2 + l_3 + l_4 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geqslant a_2 + a_3 + a_4 \geqslant p - 2.$$

Теперь из леммы 9 следует, что

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid \min(a_2, a_3 + k) \leqslant x_1 + x_2 \leqslant a_2 + a_3 + k = p - 2\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

в) Случаи $i = 3$ и $i = 4$ симметричны таковым для $i = 2$ и $i = 1$. Рассуждая, как в пунктах а) и б), получаем, что $B \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$ во всех случаях.

2) Пусть теперь $r > 6$. Для $i \in \{1, 2\}$ положим $G_i = G(i, \ldots, i + r - 2)$ и $M_i = KG_iv^+ = M(a_i\omega_1 + \ldots + a_{i+r-2}\omega_{r-1})$. По предположению индукции лемма справедлива для M_1 и M_2, т.е.

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant \max_{2\leqslant i\leqslant r-2} a_i\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$$

и

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant \max_{3\leqslant i\leqslant r-1} a_i\} \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H).$$

Отсюда вытекает, что $B \subset \operatorname{Irr}(M(\omega)|H)$. Лемма доказана. □

Теперь теорема 3 следует из лемм 10 и 12.

Литература

1. H. H. Andersen, J. C. Jantzen, W. Soergel, *Representations of quantum groups at a pth root of unity and of semisimple groups in characteristic p: independence of p.* — Astérisque **220** (1994), 1–321.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Гл.* VII–VIII, Мир, М. 1978.

3. J. Brundan, A. Kleshchev, I. Suprunenko, *Semisimple restrictions from* $\mathrm{GL}(n)$ *to* $\mathrm{GL}(n-1)$. — J. reine angew. Math. **500** (1998), 83–112.
4. P. Fiebig, *An upper bound on the exceptional characteristics for Lusztig's character formula.* — J. reine angew. Math. **673** (2012) 1–31 (Preprint, `arXiv: 0811.1674` (2008).
5. R. Goodman, N. R. Wallach, *Symmetry, representations, and invariants.* Graduate texts in mathematics **255**, Springer, Dordrecht 2009.
6. J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups.* Second edition, Amer. Math. Soc., Providence 2003.
7. A. A. Osinovskaya, *Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root* A_1*-subgroups.* — Commun. Algebra **31** (2003), 2357–2379.
8. A. A. Osinovskaya, *On the restrictions of modular irreducible representations of algebraic groups of type* A_n *to naturally embedded subgroups of type* A_2. — J. Group Theory **8** (2005), 43–92.
9. А. А. Осиновская, *Ограничения модулей над классическими группами на подгруппы типа* A_2 *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2010), 227–241.
10. V. Shchigolev, *Weyl submodules in restrictions of simple modules.* — J. Algebra **321** (2009), 1453–1462.
11. R. Steinberg, *Lectures on Chevalley Groups*, New Haven 1968.
12. I. D. Suprunenko, *The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic.* — Memoirs of the AMS **200**, No. 939 (2009), 1–154.
13. А. Е. Залесский, И. Д. Супруненко, *Усеченные симметрические степени естественных реализаций групп* $\mathrm{SL}_m(P)$ *и* $\mathrm{Sp}_m(P)$ *и их ограничения на подгруппы.* — Сибир. матем. ж. **31**, No. 4 (1990), 33–46.

Osinovskaya A. A. The restrictions of representations of the special linear group to subsystem subgroups of type A_2.

The restrictions of irreducible representations of the special linear group over an algebraically closed field of positive characteristic p to subsystem subgroups of type A_2 are studied. The composition factors for such restrictions are described in the case where the highest weights of the representations are locally small.

Институт математики НАН Беларуси,
220072, ул. Сурганова 11,
Минск, Беларусь
E-mail: `anna@im.bas-net.by`

Поступило 31 января 2017 г.