Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 455, 2017 г.

Э. Дж. Кинг, М.А. Скопина

О БИОРТОГОНАЛЬНЫХ p-АДИЧЕСКИХ БАЗИСАХ ВСПЛЕСКОВ

Памяти С. А. Евдокимова посвящаем

§1. Введение

Система всплесков – это набор функций, состоящий из сдвигов и растяжений конечного числа функций (называемых всплеск-функциями). Система Хаара, появившаяся более ста лет назад, является модельным примером ортогонального базиса всплесков на прямой. Активное изучение всплесков началось в конце прошлого века в связи с появлением теории кратномасштабного анализа в работах С. Малла [9] и Й. Мейера [10]. На базе этой теории были разработаны методы построения ортогональных и биортогональных базисов фреймов. Наряду с изучением всплесков на прямой, возник интерес к базисам всплесков в других структурах, таких как группы Кантора/Виленкина, локальные поля положительной характеристики, поле p-адических чисел, кольцо аделей, появились многочисленные работы, см. [1–8, 11–14, 17, 20, 23] и др.

Первый p-адический базис всплесков, являющийся аналогом классического базиса Хаара, был построен С. В. Козыревым [11]. Позже появились различные базисы и фреймы p-адических всплесков, в частности, построенные по схеме кратномасштабного анализа, но среди них не было ортогональных базисов, кроме тех, которые ассоциированы с тем же кратномасштабным анализом, что и базис Хаара. В то же время на группах Кантора/Виленкина, а также на полях положительной характеристики, аналогичный метод привел к многочисленным ортогональным базисам всплесков, существенно отличающимся от базиса Хаара. Это было несколько неожиданно, поскольку группы Кантора/Виленкина имеют много сходства с группой p-адических

Ключевые слова: p-адический кратномасштабный анализ, масштабирующая функция, базис Рисса, p-адические всплески.

Работа поддержана грантами РФФИ No. 15-01-05796-а, СПбГУ No. 9.38.198.2015 и Volkswagen Foundation.

чисел: элементы имеют одинаковые канонические представления, топология определяется одной и той же неархимедовой метрикой. Объяснение этому явлению было дано в работе [1], где авторы доказали, что в p-адическом анализе метод работает только для кратномасштабного анализа Хаара. В работе [7] авторы установили, что любой ортогональный p-адический базис всплесков, состоящий из тест-функций (т.е. финитных функций с финитным преобразованием Фурье), является некой простой модификацией базиса Хаара. Именно, набор всплеск-функций каждого такого базиса может быть получен из набора всплеск-функций базиса Хаара в результате последовательного применения (конечное число раз) одной из двух следующих операций: умножением вектора всплеск-функций на унитарную матрицу и заменой вектора всплеск-функций на другой вектор (другой размерности), порождающий тот же базис.

Отметим, что почти все известные сегодня p-адические базисы и фреймы всплесков состоят из тест-функций. Единственное исключение – ортогональные базисы всплесков, построенные С.А. Евдокимовым в [6], которые состоят из не финитных функций (но с финитным преобразованием Фурье). Однако эти базисы тоже ассоциированы с кратномасштабным анализом Хаара.

В вещественном анализе разработан метод построения биортогональных систем всплесков, базирующийся на паре двойственных кратномасштабных анализов. Эта конструкция позволяет избежать ряда трудностей, возникающих при построении ортогональных систем на базе одного анализа. В настоящей работе мы показываем, что и биортогональные p-адические базисы всплесков, состоящие из тест-функций, но существенно отличающиеся от базиса Хаара, не удастся построить по такой схеме. Доказывается, что подходящих пар двойственных кратномасштабных анализов не существует.

§2. Обозначения и базовые факты

Мы будем использовать обозначения, терминологию и результаты книги [23].

Как обычно, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – кольцо целых, поле вещественных, рациональных и комплексных чисел, соответственно. Поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ – это пополнение поля $\mathbb{Q}$ относительно p-адической нормы

$|\cdot|_p$, определенной равенством:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\gamma}, & \text{если } \ x = p^{\gamma}\frac{m}{n} \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}$ и m, n – целые числа, не делящиеся на p.

Любое p-адическое число $x \neq 0$ имеет единственное представление вида

$$x = \sum_{j=\gamma}^{\infty} x_j p^j, \tag{1}$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}$, $x_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $x_\gamma \neq 0$.

Дробной частью p-адического числа x называем число $\{x\}_p = \sum\limits_{j=\gamma}^{-1} x_j p^j$. Кольцо p-адических целых $\mathbb{Z}_p$ и p-адический интервал I_p определяются равенствами

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \{x\}_p = 0\}, \quad I_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \{x\}_p = x\},$$

Отметим, что сдвиги множества $\mathbb{Z}_p$ на элементы интервала I_p попарно дизъюнктны, и их объединение равно $\mathbb{Q}_p$.

Аддитивными характерами χ_p поля $\mathbb{Q}_p$ являются функции

$$\chi_p(x) = e^{2\pi i \{x\}_p}, \quad x \in \mathbb{Q}_p.$$

Поле $\mathbb{Q}_p$ локально компактно. Обозначим через dx нормализованную меру Хаара на $\mathbb{Q}_p$. По определению эта мера неотрицательна, инвариантна относительно сдвигов, и удовлетворяет условию $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$. Кроме того,

$$d(ax) = |a|_p \, dx, \quad a \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}.$$

Как обычно, $L^2(\mathbb{Q}_p)$ обозначает гильбертово пространство комплекснозначных функций, суммируемых с квадратом модуля на $\mathbb{Q}_p$ относительно меры dx.

Тест-функцией называется финитная локально постоянная функция, заданная на $\mathbb{Q}_p$. Пространство тест-функций будем обозначать через $\mathcal{D}$, и отметим, что $\mathcal{D}$ – линейное пространство, которое можно считать аналогом пространства Шварца в вещественном анализе.

Преобразование Фурье функции $f \in \mathcal{D}$ определяется равенством

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x) f(x) \, dx, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

Стандартным способом преобразование Фурье распространяется на пространство $L^2(\mathbb{Q}_p)$ и доказывается равенство Планшереля:

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi, \quad f,g \in L^2(\mathbb{Q}_p).$$

Обозначим через $B_N(a)$ шар радиуса p^N с центром в точке a. Каждая функция $f \in \mathcal{D}$ является p^M-периодической для некоторого $M \in \mathbb{Z}$. Через $\mathcal{D}_N^M$ мы обозначим множество p^M-периодических функций, у которых носитель содержится в шаре $B_N(0)$. Применив преобразование Фурье к равенству $\varphi(x-p^M) = \varphi(x)$, получим, что $\chi_p(p^M\xi)\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ для всех ξ тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset B_M(0)$. Таким образом, множество $\mathcal{D}_N^M$ состоит из всех локально постоянных функций f, таких что $\operatorname{supp} f \subset B_N(0)$, $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset B_M(0)$, а также из всех функций f, у которых преобразование Фурье p^N-периодично и $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset B_M(0)$.

Нам понадобится понятие базиса Рисса. Последовательность элементов $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ гильбертова пространства H называется базисом Рисса, если это базис в H и существуют положительные постоянные A, B, такие что для любого $c \in \ell_2$ выполняется неравенство

$$A\|c\|_{\ell_2} \leqslant \|\sum_{n=1}^\infty c_n f_n\|_H^2 \leqslant B\|c\|_{\ell_2}.$$

Отметим (см. например, [18, гл. 1]), что любой базис Рисса является безусловным, и разложение любого $f \in H$ по базису Рисса $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ имеет вид

$$f = \sum_{n=1}^\infty c_n f_n, \quad \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 < \infty.$$

§3. Определения и вспомогательные утверждения

Понятие p-адического кратномасштабного анализа встречается в литературе в разных вариантах. Мы будем понимать его в следующем смысле.

Определение 1 ([1]). *Совокупность замкнутых пространств $V_j \subset L^2(\mathbb{Q}_p)$, $j \in \mathbb{Z}$, называется* кратномасштабным анализом (*далее КМА*) *в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, если выполнены следующие условия* (*аксиомам*)

(a) $V_j \subset V_{j+1}$ *для всех* $j \in \mathbb{Z}$;

(b) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ *плотно в* $L^2(\mathbb{Q}_p)$;
(c) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;
(d) $f(\cdot) \in V_j \Longleftrightarrow f(p^{-1}\cdot) \in V_{j+1}$ *для всех* $j \in \mathbb{Z}$;
(e) *существует функция* $\varphi \in V_0$, *такая что*

$$V_0 := \overline{\operatorname{span}\{\varphi(\cdot - a) : \ a \in I_p\}}.$$

Функцию φ из аксиомы (e) называется *масштабирующей*, и говорят, что φ порождает данный КМА. Масштабирующая функция φ называется ортогональной, если $\{\varphi(\cdot - a), a \in I_p\}$ – ортонормированный базис пространства V_0.

Следующее утверждение дает характеризацию тест-функций φ, порождающих КМА.

Теорема 2 ([1]). *Пусть* $\varphi \in \mathcal{D}_N^M$, $M, N \geqslant 0$, $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. *Для того, чтобы функция* φ *порождала КМА, необходимо и достаточно выполнение двух условий;*
(1) φ *является решением функционального уравнения* (*масштабирующего уравнения*)

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{p^{N+1}-1} h_k \varphi\Big(\frac{x}{p} - \frac{k}{p^{N+1}}\Big), \quad \forall x \in \mathbb{Q}_p;$$

(2) *существует не более чем* p^N *целых* l, *таких что* $0 \leqslant l < p^{M+N}$ *и* $\widehat{\varphi}\left(\frac{l}{p^M}\right) \neq 0$.

Очевидно, что функция $\varphi^H = \mathbb{1}_{B_0(0)}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Эта функция принадлежит пространству $\mathcal{D}_0^0$ и является ортогональной масштабирующей функцией, а КМА, порожденный этой функцией, называют КМА Хаара. Функция φ^H – не единственная ортогональная масштабирующая тест-функция, порождающая КМА Хаара, описание всех таких функций дано в [16], и все такие функции принадлежат пространству $\mathcal{D}_N^0$. Легко строятся масштабирующие функции, порождающие КМА, отличные от КМА Хаара. Для случая $p = 2$, $N = 2$, $M = 1$, пример масштабирующей функции $\varphi \in \mathcal{D}_N^M$, являющейся решением масштабирующего уравнения и такой, что $\widehat{\varphi}\left(\frac{1}{2}\right) = \widehat{\varphi}\left(\frac{3}{2}\right) = \widehat{\varphi}\left(\frac{5}{2}\right) = \widehat{\varphi}(1) = 0$, $\widehat{\varphi}(0) = 1$, приведен в [1]. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и не принадлежит пространству $\mathcal{D}_N^0$, однако она не является ортогональной. Более того, в той же работе [1] доказано, что не существует ортогональных масштабирующих тест-функций $\varphi \notin \mathcal{D}_N^0$.

Следуя идеям теории построения вещественных всплесков, определим понятие пары двойственных КМА.

Определение 3. *КМА* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, *порожденные соответственно масштабирующими функциями* φ, $\widetilde{\varphi}$, *будем называть двойственными, если системы* $\{\varphi(\cdot - a), a \in I_p\}$ *и* $\{\widetilde{\varphi}(\cdot - a), a \in I_p\}$ *являются биортонормированными и образуют базисы Рисса соответственно в* V_0 *и* $\widetilde{V}_0$.

С использованием аналогичного определения двойственных КМА на прямой, а также на группах Кантора/Виленкина и на локальных полях положительной характеристики, удается строить биортогональные базисы всплесков, существенно отличающиеся от базиса Хаара (см., например, [18, §1.3]).

Прежде чем перейти к основному результату работы, дадим три вспомогательных утверждения.

Лемма 4. *Пусть функция* $\varphi \in \mathcal{D}_N^M$, $M, N \in \mathbb{Z}$, *порождает КМА* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. *Если* $\{\varphi(\cdot - a), a \in I_p\}$ *– базис Рисса в* V_0, *то* $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$.

Доказательство. Известно (см., например, [18, Теорема 1.2.1]), что каждый базис Рисса является фреймом, т.е.

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{a\in I_p} |\langle f, \varphi(\cdot - a)\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2, \quad \forall f \in V_0,$$

где A и B – постоянные из определения базиса Рисса. С помощью замены переменной нетрудно показать, что для любого $j \in \mathbb{Z}$

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{a\in I_p} |\langle f, \varphi_{ja}\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2, \quad \forall f \in V_j,$$

где $\varphi_{ja}(x) = p^{j/2}\varphi(p^{-j}x - a)$. Отсюда, очевидно, также следует

$$\sum_{a\in I_p} |\langle f, \varphi_{ja}\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{Q}_p).$$

По аксиоме (b) определения 1 для каждого $f \in L^2(\mathbb{Q}_p)$ существует $j_0 \in \mathbb{Z}$ и функция $g \in V_{j_0}$, такая, что

$$\|f - g\| \leqslant \min\left\{\frac{\|f\|}{2}, \frac{\|f\|}{4}\sqrt{\frac{A}{B}}\right\},$$

что влечет

$$\sqrt{\sum_{a\in I_p} |\langle f,\varphi_{j_0 a}\rangle|^2} \geqslant \sqrt{\sum_{a\in I_p} |\langle g,\varphi_{j_0 a}\rangle|^2} - \sqrt{\sum_{a\in I_p} |\langle f-g,\varphi_{j_0 a}\rangle|^2} \geqslant$$
$$\sqrt{A}\|g\| - \sqrt{B}\|f-g\| \geqslant \sqrt{A}(\|f\| - \|f-g\|) - \sqrt{B}\|f-g\| \geqslant$$
$$\frac{\sqrt{A}}{2}\|f\| - \frac{\sqrt{A}}{4}\|f\| = \frac{\sqrt{A}}{4}\|f\|. \qquad (2)$$

Предположим, что $\widehat{\varphi}(0)=0$. Тогда $\widehat{\varphi}(x)=0$ для любого $x\in B_N(0)$. Если $\widehat{f}=\mathbb{1}_{B_N(0)}$, то, используя теорему Планшереля, имеем

$$\langle f,\varphi_{ja}\rangle = p^{-j/2}\int_{\mathbb{Q}_p} \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\chi_p(p^j a\xi)\,d\xi$$
$$= p^{-j/2}\int_{B_N(0)} \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\chi_p(p^j ja\xi)\,d\xi = 0$$

для любого $a\in I_p$ и любого $j\in\mathbb{Z}$, что противоречит (2). Следовательно, $\widehat{\varphi}(0)\neq 0$. □

Лемма 5. *Пусть N, M – неотрицательные целые, $L\subset\{0,1,\dots,p^{N+M}\}$. Если $\sharp\, L = p^N$, то система*

$$\sum_{l\in L}\chi_p\left(\frac{lk}{p^{M+N}}\right)x_l = p^N\delta_{0k}, \quad k=0,1,\dots,p^N-1, \qquad (3)$$

имеет единственное решение $x_l\neq 0, l\in L$, а система

$$\sum_{l\in L}\chi_p\left(\frac{lk}{p^{M+N}}\right)x_l = 0, \quad k=0,1,\dots,p^N-1,$$

имеет единственное решение $x_l=0, l\in L$. А если $\sharp\, L<p^N$, то система (3) не совместна.

Доказательство этого утверждения легко следует из свойств определителя Вандермонда.

Лемма 6 (см. [1])**.** *Пусть $c_0,,\dots,c_{n-1}$ – попарно различные элементы единичного круга $\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$, x_j, $j=0,1,\dots,n-1$, вещественные числа, удовлетворяющие равенствам*

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j^k x_j = \delta_{k0}, \quad k=0,1,\dots,n-1. \qquad (4)$$

Тогда $x_j = 1/n$ *для всех* j, *и, с точностью до нумерации,*

$$c_j = c_0 e^{2\pi i j/n}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{5}$$

§4. Основной результат

Теорема 7. *Пусть пара двойственных КМА порождена масштабирующими функциями* $\varphi, \widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}_N^M$, $M, N \geqslant 0$. *Тогда каждый из КМА является КМА Хаара.*

Доказательство. Докажем сначала, что $M = 0$. Предположим, что $M > 0$ и $\varphi \notin \mathcal{D}_N^{M-1}$.

Системы $\{\varphi(\cdot - a), a \in I_p\}$, $\{\widetilde{\varphi}(\cdot - a), a \in I_p\}$ являются биортонормированными, т.е.

$$\langle \varphi(\cdot - a), \widetilde{\varphi} \rangle = \delta_{0a}, \quad \langle \varphi, \widetilde{\varphi}(\cdot - a) \rangle = \delta_{0a} \quad \forall a \in I_p.$$

В частности, для $a = k/p^N$, $k = 0, 1, \ldots, p^N - 1$, используя теорему Планшереля, имеем

$$\begin{aligned}\delta_{0k} = \langle \varphi(\cdot - k/p^N), \widetilde{\varphi} \rangle &= \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x - k/p^N) \overline{\widetilde{\varphi}(x)}\, dx \\ &= \int\limits_{B_M(0)} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)} \chi_p \left(\frac{k\xi}{p^N} \right) d\xi.\end{aligned}$$

Для каждого $\xi \in B_M(0)$ существует единственное $l = 0, 1, \ldots, p^{M+N}-1$, такое, что $|\xi - l/p^M|_p \leqslant p^{-N}$. Отсюда, ввиду p^N-периодичности функций $\widehat{\varphi}, \widehat{\widetilde{\varphi}}$, следует

$$\begin{aligned}&\int\limits_{B_M(0)} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)} \chi_p \left(\frac{k\xi}{p^N} \right) d\xi = \sum_{k=0}^{p^{M+N}-1} \int\limits_{B_{-N}(l/p^M)} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)} \chi_p \left(\frac{k\xi}{p^N} \right) d\xi \\ &= \sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} \widehat{\varphi}\left(\frac{l}{p^M} \right) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{l}{p^M} \right)} \int\limits_{B_{-N}(l/p^M)} \chi_p \left(\frac{k\xi}{p^N} \right) d\xi \\ &= \sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} \widehat{\varphi}\left(\frac{l}{p^M} \right) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{l}{p^M} \right)} \chi_p \left(\frac{lk}{p^{M+N}} \right) \int\limits_{B_{-N}(0)} \chi_p \left(\frac{k\xi}{p^N} \right) d\xi\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p^N} \sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} \widehat{\varphi}\left(\frac{l}{p^M}\right) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{l}{p^M}\right)} \chi_p\left(\frac{lk}{p^{M+N}}\right).$$

Аналогично

$$\delta_{0k} = \overline{\langle \varphi, \widetilde{\varphi}(\cdot - k/p^M) \rangle} = \frac{1}{p^N} \sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} \overline{\widehat{\varphi}\left(\frac{l}{p^M}\right)} \widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{l}{p^M}\right) \chi_p\left(\frac{lk}{p^{M+N}}\right).$$

Из полученных равенств следует

$$\sum_{l \in L} \chi_p\left(\frac{lk}{p^{M+N}}\right) \operatorname{Re}\left(\widehat{\varphi}\left(\frac{l}{p^M}\right) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{l}{p^M}\right)}\right) = p^N \delta_{0k}, \quad k = 0, 1, \dots, p^N - 1,$$

$$\sum_{l \in L} \chi_p\left(\frac{lk}{p^{M+N}}\right) \operatorname{Im}\left(\widehat{\varphi}\left(\frac{l}{p^M}\right) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(\frac{l}{p^M}\right)}\right) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p^N - 1,$$

где

$$L = \left\{ l = 0, 1, \dots, p^{N+M} : \ x_l := \widehat{\varphi}\left(\frac{l}{p^M}\right) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}}\left(\frac{l}{p^M}\right) \neq 0 \right\}.$$

По лемме 5 числа x_l, $l \in L$, вещественные и $\sharp L \geqslant p^N$. С другой стороны, по теореме 2, с учетом леммы 4, $\sharp L \leqslant p^N$, что влечет $\sharp L = p^N$, и $\widehat{\varphi}\left(\frac{l}{p^M}\right) = 0$ для любого $l \in \{0, 1, \dots, p^{M+N} - 1\} \setminus L$. По лемме 6,

$$L = \{ l_j = l_0 + jp^M, \quad j = 0, 1, \dots, p^N - 1 \},$$

и принимая во внимание, что $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, а также учитывая p^N-периодичность функции $\widehat{\varphi}$, мы заключаем, что $\widehat{\varphi}\left(\frac{l}{p^M}\right) = 0$ для всех $l \in \mathbb{Z}$ не делящихся на p^M. Но это означает, что $\operatorname{supp} \widehat{\varphi} \subset B_{M-1}(0)$, что противоречит нашему предположению $\varphi \notin \mathcal{D}_N^{M-1}$. Следовательно, $M = 0$.

Пусть $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ – КМА, порожденный функцией φ. Покажем, что $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ совпадает с КМА Хаара $\{V_j^H\}_{j \in \mathbb{Z}}$, порожденным ортогональной масштабирующей функцией $\varphi^H = \mathbb{1}_{B_0(0)}$. Очевидно, достаточно проверить, что $V_0 = V_0^H$. Пусть $f \in V_0$. Функции $\{\varphi(\cdot - a) : a \in I_p\}$ образуют базис в V_0. Поскольку $\varphi \in \mathcal{D}_N^0$, для любого $a \in I_p$ носитель преобразования Фурье функции $\varphi(\cdot - a)$ содержится в B_0 а значит, $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset B_0(0)$, т.е. $\widehat{f} \in L^2(B_0(0))$. Из теоремы Петера–Вейля следует, что характеры $\chi_p(a\xi)$, $a \in I_p$, образуют ортонормированный базис в $L^2(B_0(0)) = L^2(\mathbb{Z}_p)$ (см., например, [19]). Таким образом, $\widehat{f}(\xi) =$

$\varphi^H(\xi) \sum\limits_{a\in I_p} \alpha_a \chi_p(a\xi)$, $\sum\limits_{a\in I_p} |\alpha_a|^2 < \infty$. Применив обратное преобразование Фурье, получим $f(x) = \sum\limits_{a\in I_p} \alpha_a \varphi^H(x-a)$, что влечет $f \in V_0^H$, и значит $V_0 \subset V_0^H$.

Для доказательства включения $V_0^H \subset V_0$ достаточно проверить, что $\varphi^H(\cdot - b) \in V_0$ для любого $b \in I_p$. Из рассуждений, приведенных в первой части доказательства, следует, что $\widehat{\varphi}(l) \neq 0$ для всех $l = 0, 1, \dots, p^N - 1$, а значит, ввиду p^N-периодичности $\widehat{\varphi}$, и для любого $l \in \mathbb{Z}_p$. Из непрерывности $|\widehat{\varphi}|$ и компактности B_0 следует ограниченность функции $|\widehat{\varphi}|^{-1}$ на $B_0(0)$, но тогда и функция $\chi_p(b\xi)(\widehat{\varphi})^{-1}(\xi)$ принадлежит $L^2(B_N(0))$, что влечет

$$\chi_p(b\xi)(\widehat{\varphi}(\xi))^{-1} = \varphi^H(\xi) \sum_{a\in I_p} \beta_a \chi_p(a\xi), \quad \sum_{a\in I_p} |\beta_a|^2 < \infty.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\chi_p(b\xi)\varphi^H(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) \sum_{a\in I_p} \beta_a \chi_p(a\xi).$$

Применив обратное преобразование Фурье, получим

$$\varphi^H(x-b) = \sum_{a\in I_p} \beta_a \varphi(x-a), \quad \sum_{a\in I_p} |\beta_a|^2 < \infty,$$

т.е. $\varphi^H(\cdot - b) \in V_0$, что и требовалось доказать. □

§5. Биортогональные системы всплесков

Из результата предыдущего параграфа ясно, что метод построения биортогональных систем всплесков на базе пары двойственных КМА, может использоваться в p-адическом анализе только в случае, когда каждый из КМА является КМА Хаара. Опишем построение таких систем всплесков. Ограничимся случаем $p = 2$.

Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – КМА в $L^2(\mathbb{Q}_2)$. Для каждого j определим пространство

$$W_j = V_{j+1} \ominus V_j,$$

которое называют *пространством всплесков*. Поскольку, ввиду теоремы 7, нам подходит только КМА Хаара, будем писать W_j^H. Принимая во внимание аксиомы определения 1, для любого $j \in \mathbb{Z}$ имеем

$$f \in W_j^H \quad \Leftrightarrow \quad f(2^{-1}\cdot) \in W_{j+1}^H$$

и

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j^H = L^2(\mathbb{Q}_2).$$

Положим

$$\psi^H(x) = \varphi^H\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi^H\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{Q}_2.$$

Тогда $\{\psi^H(\cdot - a), a \in I_2\}$ – ортонормированный базис в W_0^H, а система функций

$$\left\{2^{j/2}\psi^H\left(2^{-j}\cdot - a\right), a \in I_2, j \in \mathbb{Z}\right\}$$

образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{Q}_2)$ (см. [14] и [11]).

Теперь построим пример биортогональных систем всплесков, порожденных тем же КМА Хаара, но не являющихся ортогональными. Нам для этого надо найти функции $\psi, \tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{Q}_2)$, такие, что для всех $a, b \in I_2$

$$\langle\psi(\cdot - a), \varphi^H(\cdot - b)\rangle = 0, \tag{6}$$

$$\langle\tilde{\psi}(\cdot - a), \varphi^H(\cdot - b)\rangle = 0, \tag{7}$$

$$\langle\psi(\cdot - a), \tilde{\psi}(\cdot - b)\rangle = \delta_{a,b}, \tag{8}$$

но ни одна из этих систем не является ортонормированной. Построим ψ and $\tilde{\psi}$, обобщив конструкцию ортогональных p-адических базисов, данную в [14, §4]. Из свойств функции φ^H следует

$$\psi^H(x \pm 1) = -\psi^H(x), \quad \forall x \in \mathbb{Q}_2. \tag{9}$$

Нам надо найти такие $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{C}$, что функции

$$\psi = \alpha_0\psi^H + \alpha_1\psi^H\left(\cdot - \tfrac{1}{2}\right), \tag{10}$$

$$\tilde{\psi} = \beta_0\psi^H + \beta_1\psi^H\left(\cdot - \tfrac{1}{2}\right) \tag{11}$$

порождают биортогонормированные системы. По построению имеем $\psi, \tilde{\psi} \in W_0^H$. Таким образом, (6), (7) очевидно выполнены. Заметим также, что для любых $a, b \in I_2$, $a \neq b$, либо $a-b$, либо $b-a$ принадлежит I_2. В сочетании с (9) это означает, что вместо (8) нам надо проверить, что для всех $a \in I_2$

$$\langle\psi, \tilde{\psi}(\cdot - a)\rangle = \delta_{a,0} \tag{12}$$

и

$$\langle\psi(\cdot - a), \tilde{\psi}\rangle = \delta_{a,0}. \tag{13}$$

Вычисления дают

$$\begin{aligned}
\langle \psi, \tilde{\psi}(\cdot - a)\rangle = \int \Bigg[&\alpha_0\overline{\beta_0}\psi^H(x)\overline{\psi^H(x-a)} + \alpha_0\overline{\beta_1}\psi^H(x)\overline{\psi^H\left(x-a-\frac{1}{2}\right)} \\
+ \alpha_1\overline{\beta_0}\psi^H\left(x-\frac{1}{2}\right)\overline{\psi^H(x-a)} &+ \alpha_1\overline{\beta_1}\psi^H\left(x-\frac{1}{2}\right)\overline{\psi^H\left(x-a-\frac{1}{2}\right)}\Bigg]dx \\
= \alpha_0\overline{\beta_0}\int \psi^H(x)\overline{\psi^H(x-a)}dx &+ \alpha_0\overline{\beta_1}\int \psi^H(x)\overline{\psi^H\left(x-a-\frac{1}{2}\right)}dx \\
+ \alpha_1\overline{\beta_0}\int \psi^H\left(x-\frac{1}{2}\right)&\overline{\psi^H(x-a)}\,dx \qquad (14)\\
+ \alpha_1\overline{\beta_1}\int \psi^H\left(x-\frac{1}{2}\right)&\overline{\psi^H\left(x-a-\frac{1}{2}\right)}dx.
\end{aligned}$$

Если $a \in I_2 \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$, то вычисления (14) вместе с ортонормированностью функций $\{\psi^H(\cdot - a), a \in I_2\}$ влекут $\langle \psi, \tilde{\psi}(\cdot - a)\rangle = 0$. Таким образом, осталось рассмотреть два случая: $a = 0$ и $a = \frac{1}{2}$. Подставляя $a = \frac{1}{2}$ в (14) и используя (9), из (12) получаем

$$\alpha_0\overline{\beta_1} = \alpha_1\overline{\beta_0}. \qquad (15)$$

Аналогично, подставляя $a = 0$, получаем

$$\alpha_0\overline{\beta_0} + \alpha_1\overline{\beta_1} = 1. \qquad (16)$$

Из построения ψ и $\tilde{\psi}$ как линейных комбинаций сдвигов функции ψ^H, вычисляя $\langle \tilde{\psi}, \psi(\cdot - a)\rangle$, мы получим (14), поменяв ролями α_k и β_k. Таким образом, для $k = 0, 1$ α_k и β_k соотношения (15) и (16), (13) также выполнены. Другими словами, структура функций такова, что выполнение (12) для всех $a \in I_2$ влечет выполнение (13) для всех $a \in I_2$.

С помощью аналогичных вычислений нетрудно установить, что для того, чтобы исключить тривиальный случай, когда системы образуют ортогональный базис, надо потребовать

$$\begin{aligned}
|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 &\neq 1, &(17)\\
|\beta_0|^2 + |\beta_1|^2 &\neq 1, &(18)\\
\alpha_0\overline{\alpha_1} &\neq \alpha_1\overline{\alpha_0}, &(19)\\
\beta_0\overline{\beta_1} &\neq \beta_1\overline{\beta_0}. &(20)
\end{aligned}$$

Положив $\zeta = e^{\pi i/3}$, определим числа

$$\alpha_0 = \zeta, \ \ \alpha_1 = \zeta^5, \ \ \beta_0 = \zeta^2 \ \text{ и } \ \beta_1 = \zeta^4.$$

Нетрудно проверить выполнение соотношений (15), (16), (17), (18), (19), (20). Таким образом, (12) и (13) выполнены для всех $a \in I_2$, и ни одна из систем $\{\psi(\cdot - a) : a \in I_2\}$, $\{\tilde{\psi}(\cdot - a), a \in I_2\}$ не является ортогональной. Далее, поскольку

$$\begin{aligned}\psi^H &= \frac{1}{2\zeta}\left[\psi + \tilde{\psi}\left(\cdot - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{-\zeta}{2}\left[\tilde{\psi} + \psi\left(\cdot - \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{-i}{2\sqrt{3}}\left[\psi + \psi\left(\cdot - \frac{1}{2}\right) + \tilde{\psi} + \tilde{\psi}\left(\cdot - \frac{1}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\psi^H\left(\cdot - \frac{1}{2}\right) &= \frac{\zeta}{2}\left[\psi - \tilde{\psi}\left(\cdot - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{-1}{2\zeta}\left[\tilde{\psi} - \psi\left(\cdot - \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{i}{2\sqrt{3}}\left[\psi - \psi\left(\cdot - \frac{1}{2}\right) + \tilde{\psi} - \tilde{\psi}\left(\cdot - \frac{1}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

а I_2-сдвиги функции ψ^H образуют ортонормированный базис в W_0^H, мы построили функции, порождающие биортонормированные 2-адические системы всплесков.

Более того, заметим, что любая биортонормированная система, порожденная функциями ψ and $\tilde{\psi}$ вида (10) и (11) с $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \in \mathbb{R}$ обязательно должна быть ортогональной системой. Это следует из того, что для вещественных чисел равенства $\alpha_0\overline{\alpha_1} = \alpha_1\overline{\alpha_0}$ и $\beta_0\overline{\beta_1} = \beta_1\overline{\beta_0}$ всегда выполнены, а значит соотношения (19) и (20) не верны.

Теперь мы обобщим теорему 1 работы [14], в которой дана характеризация всех ортогональных всплеск-функций КМА Хаара, чтобы описать все всплеск-функции, порождающие биортонормированные системы всплесков.

Теорема 8. *Пусть* $s = 1, 2, \dots$ *и*

$$\psi^{(s)} = \sum_{k=1}^{2^s-1} \alpha_k \psi^H\left(x - \frac{k}{2^s}\right), \tag{21}$$

$$\tilde{\psi}^{(s)} = \sum_{k=1}^{2^s-1} \beta_k \psi^H\left(x - \frac{k}{2^s},\right), \tag{22}$$

где

$$\{\alpha_k, k = 0, \dots, 2^s - 1\}, \{\beta_k, k = 0, \dots, 2^s - 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Положим

$$\begin{aligned}
u &= (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^s-1})^T,\\
v &= (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2^s-1})^T,\\
A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\textit{матрица размера } 2^s \times 2^s),\\
D_\alpha &= (u, Au, \dots, A^{2^s-1}u)^T, \ \textit{and}\\
D_\beta &= (v, Av, \dots, A^{2^s-1}v)^T.
\end{aligned}$$

Для того, чтобы системы всплесков, порожденные функциями $\psi^{(s)}$ *и* $\tilde{\psi}^{(s)}$, *были биортонормированными, необходимо и достаточно выполнение равенства* $D_\alpha D_\beta^* = I$. *При этом системы не являются ортонормированными, если матрицы* D_α *and* D_β *не унитарны.*

Доказательство. Пусть $\psi^{(s)}$ и $\tilde{\psi}^{(s)}$ определены равенствами (21) и (22). Нам надо показать, что для всех $a, b \in I_2$ выполняются соотношения (6), (7), (8). Так же, как в приведенном выше примере, из ортогонормированности системы $\{\psi^H(\cdot - a), a \in I_2\}$, периодичности функции ψ^H и (9) следует, что достаточно проверить выполнение равенства

$$\langle \psi, \tilde{\psi}(\cdot - a)\rangle = \delta_{a,0}$$

для $a = \frac{r}{2^s}$, $r = 0, 1, \dots, 2^s - 1$, чтобы доказать соотношения (6), (7), (8) для всех $a, b \in I_2$. Опять используя периодичность функции ψ^H, для $r = 0, \dots, 2^s - 1$ имеем

$$\begin{aligned}
&\psi^{(s)}\left(\cdot - \frac{r}{2^s}\right)\\
&\quad = -\alpha_{2^s-r}\psi^H - \alpha_{2^s-r+1}\psi^H\left(\cdot - \frac{1}{2^s}\right) - \dots - \alpha_{2^s-1}\psi^H\left(\cdot - \frac{r-1}{2^s}\right)\\
&\qquad + \alpha_0\psi^H\left(\cdot - \frac{r}{2^s}\right) + \dots + \alpha_{2^s-r-1}\psi^H\left(\cdot - \frac{2^s-1}{2^s}\right), \qquad (23)
\end{aligned}$$

где $\alpha_{2^s} := \alpha_0$, и аналогично

$$\begin{aligned}
&\tilde{\psi}^{(s)}\left(\cdot - \frac{r}{2^s}\right) \\
&= -\beta_{2^s-r}\psi^H - \beta_{2^s-r+1}\psi^H\left(\cdot - \frac{1}{2^s}\right) - \dots - \beta_{2^s-1}\psi^H\left(\cdot - \frac{r-1}{2^s}\right) \\
&\quad + \beta_0\psi^H\left(\cdot - \frac{r}{2^s}\right) + \dots + \beta_{2^s-r-1}\psi^H\left(\cdot - \frac{2^s-1}{2^s}\right),
\end{aligned} \tag{24}$$

где $\beta_{2^s} := \beta_0$. Положим

$$\Xi^H = \left(\psi^H, \psi^H\left(\cdot - \frac{1}{2^s}\right), \dots, \psi^H\left(\cdot - \frac{2^s-1}{2^s}\right)\right)^T,$$

$$\Xi^{(s)} = \left(\psi^{(s)}, \psi^{(s)}\left(\cdot - \frac{1}{2^s}\right), \dots, \psi^{(s)}\left(\cdot - \frac{2^s-1}{2^s}\right)\right)^T,$$

$$\tilde{\Xi}^{(s)} = \left(\tilde{\psi}^{(s)}, \tilde{\psi}^{(s)}\left(\cdot - \frac{1}{2^s}\right), \dots, \tilde{\psi}^{(s)}\left(\cdot - \frac{2^s-1}{2^s}\right)\right)^T.$$

Из (23) и (24) получаем равенства

$$\Xi^{(s)} = D_\alpha \Xi^H \text{ and } \tilde{\Xi}^{(s)} = D_\beta \Xi^H.$$

Из ортонормированности системы $\{\psi^H(\cdot - a), a \in I_2\}$ следует, что столбцы матриц $\Xi^{(s)}$ и $\tilde{\Xi}^{(s)}$ являются биортонормированными тогда и только тогда, когда $D_\alpha D_\beta^*$ – тождественная матрица размера $2^s \times 2^s$. Если D_α (или D_β) – унитарная матрица, то каждая из систем является ортонормированной.

Остается проверить, что системы $\{\psi^{(s)}(\cdot - a), a \in I_2\}$ и $\{\widetilde{\psi}^{(s)}(\cdot - a), a \in I_2\}$ – базисы в W_0^H. Поскольку $2^s = \operatorname{rank}(I) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(D_\alpha), \operatorname{rank}(D_\beta)\}$, обе матрицы D_α, D_β обратимы, и значит, $\Xi^H = D_\alpha^{-1}\Xi^{(s)} = D_\beta^{-1}\tilde{\Xi}^{(s)}$; т.е., для каждого $r = 0, 1, \dots, 2^s - 1$ функция $\psi^H(\cdot - \frac{r}{2^s})$ есть линейная комбинация функций $\psi^{(s)}(\cdot - \frac{k}{2^s})$, $k = 0, 1, \dots, 2^s - 1$, а также функций $\widetilde{\psi}^{(s)}(\cdot - \frac{k}{2^s})$, $k = 0, 1, \dots, 2^s - 1$. Так как любое отличное от нуля $c \in I_2$ представимо в виде $c = \frac{r}{2^s} + b$, где $r \in \{0, 1, \dots, 2^s - 1\}$, $|b|_2 \geqslant 2^{s+1}$, отсюда следует, что $\psi^H(\cdot - c)$ раскладывается по каждой из систем

$$\{\psi^{(s)}(\cdot - \frac{k}{2^s} - b),\ k = 0, 1, \dots, 2^s - 1\},$$

$$\{\widetilde{\psi}^{(s)}(\cdot - \frac{k}{2^s} - b),\ k = 0, 1, \dots, 2^s - 1\},$$

что и требовалось установить. □

Литература

1. S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, *p-Adic multiresolution analysis and wavelet frames.* — J. Fourier Anal. Appl., **16**, No. 5 (2010), 693–714.
2. S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, *p-adic nonorthogonal wavelet bases.* — Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 265 (2009), 1–12.
3. J. J. Benedetto, R. L. Benedetto, *A wavelet theory for local fields and related groups.* — J. Geom. Anal. **3** (2004) 423–456.
4. B. Behera, O. Jahan, *Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions.* — Adv. Pure Appl. Math. **3** (2012), No. 2, 181–202.
5. С. Евдокимов, *Кратномасштабный анализ и базисы Хаара на кольце рациональных аделей.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **400** (2012), 158–165,
6. S. Evdokimov, *On non-compactly supported p-adic wavelets.* — J. Math. Anal. Appl. **443** (2016), No. 2, 1260–1266
7. S. Evdokimov, M. Skopina, *On orthogonal p-adic wavelet bases.* — J. Math. Anal. Appl. **424** (2015), No. 2, 952–965.
8. С. А. Евдокимов, М. А. Скопина, 2*-адические базисы всплесков.* — Тр. ИММ УрО РАН, 15:1 (2009), 135–146,
9. S. Mallat, *Multiresolution representation and wavelets.* Ph. D. Thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA.(1988).
10. Y. Meyer, *Ondelettes et fonctions splines.* Séminaire EDP. Paris (Décembre 1986).
11. S. V. Kozyrev, *Wavelet analysis as a p-adic spectral analysis.* — Izvestia Akademii Nauk, Seria Math. **66** No. 2 (2002) 149–158.
12. S. V. Kozyrev, *p-Adic pseudodifferential operators and p-adic wavelets.* — Theor. Math. Physics, **138** (3), 1–42 (2004).
13. A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, *Non-Haar p-adic wavelets and their application to pseudo-differential operators and equations.* — Appl. Comput. Harmon. Anal. **28** (2010), No. 1, 1–23.
14. V. M. Shelkovich, M. Skopina, *p-Adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators.* — J. Fourier Anal. Appl. **15** (2009), No. 3, 366–393.
15. A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, M, Skopina, *p-Adic refinable functions and MRA-based wavelets.* — J. Approx. Theory **161** (2009) 226–238
16. A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, M, Skopina, *p-Adic orthogonal wavelet bases. p-Adic Numbers.* — Ultrametric Analysis and Applications, 1 (2009), No. 2, 145–156.
17. W. C. Lang, *Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group.* — SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), No. 1, 305–312.
18. I. Ya.Novikov, V. Yu. Protasov, M. A. Skopina, *Wavelet Theory.* AMS, Translations Mathematical Monographs, Vol. 239 (2011).
19. L. Pontryagin,*Topological Groups.* Princeton University Press, Princeton (1946)
20. В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, *Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой.* — Матем. сб., **197** (2006), 129–160.
21. J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups.* Graduate Texts in Mathematics. vol. 42, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.

22. Ю. А. Фарков, *Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп.* — Матем. заметки **82** 6 (2007), 934–952.
23. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-Adic analysis and mathematical physics.* World Scientific, Singapore, 1994.

King E. J., Skopina M. A. On biorthogonal p-adic wavelet bases.

Dual p-adic multiresolution analyses (MRAs) generated by scaling test functions are studied. It is proved that if two MRAs are dual, then each of MRAs is the Haar MRA. A characterization of all biorthogonal wavelet systems associated with the Haar MRA is given for the case $p = 2$.

University of Bremen
E-mail: gnikylime@gmail.com

Поступило 10 апреля 2017 г.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: skopina@MS1167.spb.edu