Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 455, 2017 г.

И. Жуков, Е. Лысенко

ПОСТРОЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ СТЕПЕНИ p^2 ПОЛНОГО ПОЛЯ

Введение

Эта статья продолжает цикл работ, связанных с явным построением тех или иных расширений полных дискретно нормированных полей характеристики 0 с произвольным полем вычетов характеристики $p > 0$.

Уже задача предъявления явных уравнений, задающих произвольное циклическое расширение L/K степени p^n $(n \geq 1)$, когда в поле K нет первообразного корня степени p^n из единицы, нетривиальна и при $n \geq 2$ не решена.

Напомним, что в случае $n = 1$ такие расширения могут быть заданы (как и в простой характеристике) при помощи многочленов Артина–Шрайера. Известно, что для скачка ветвления $s(L/K)$ циклического расширения степени p существует оценка $0 \leq s(L/K) \leq pe/(p-1)$, где e – абсолютный индекс ветвления K; при этом равенство $s(L/K) = pe/(p-1)$ возможно, только если K содержит первообразный корень степени p из 1. Как показали Маккензи и Уэплс [5], любое циклическое расширение L/K степени p с $s = s(L/K) < pe/(p-1)$ задаётся присоединением к K корня многочлена Артина–Шрайера $X^p - X - a$, где $v_K(a) = -s$. Изящное и компактное доказательство этого факта, использующее формальные группы Любина–Тэйта, принадлежит С. В. Востокову [1].

Оказывается, что при $n > 1$, кроме случая характеристики p, или случая $\zeta_{p^n} \in K$, не каждое циклическое расширение L_1/K степени p может быть вложено в циклическое расширение L/K степени p^n. Как доказал Мики [4], при $\zeta_p \in K$ и $L_1 = K(x)$, $x^p = a \in K$, существование L/K равносильно тому, что $a \in M_{n,K} = N_{K_n/K} K_n^* \cdot (K^*)^p$.

Можно показать (см. [6, §3]), что из $v_K(u-1) > e$ следует $u \in M_{2,K}$. По теореме Мики получаем, что расширение L_1/K (в том числе и при

Ключевые слова: полное дискретно нормированное поле, циклическое расширение, ветвление, скачок ветвления.

$\zeta_p \notin K$) со скачком ветвления $s(L_1/K) < e/(p-1)$ может быть погружено в некоторое циклическое расширение L_2/K. Цель настоящей работы заключается в явном построении такого L_2/K.

Как было продемонстрировано в [6, §3], если выполняется несколько более сильное неравенство $s(L_1/K) < pe/(p^2-1)$ и L_1/K задано присоединением корня многочлена $X^p - X - a$, расширение L_2/K можно задать уравнениями, идентичными уравнениям в характеристике p для расширения, задаваемого вектором Витта $(a, 0)$. А именно, пусть $L_2 = K(x_0, x_1)$, где

$$x_0^p - x_0 = a,$$
$$x_1^p - x_1 = -p^{-1}((a + x_0)^p - a^p - x_0^p).$$

Тогда L_2/K – циклическое расширение степени p^2, содержащее L_1/K.

В данной работе мы модифицируем эти уравнения так, чтобы снять ограничение $s(L_1/K) < pe/(p^2-1)$.

Полученное расширение L_2/K можно рассматривать как задаваемое "вектором" $(a, 0)$ в некоторой гипотетической "теории Витта в характеристике 0", которая превращается в классическую теорию векторов Витта при $e \to \infty$.

Отметим ещё, что в [6, §4] для случая *абсолютно неразветвлённого* поля K было построено семейство циклических p-расширений, дающих в композите максимальное абелево p-расширение K; это семейство также можно рассматривать как аналог расширений в простой характеристике, задаваемых всевозможными векторами Витта вида $(a, 0, \dots, 0)$. В неявном (когомологическом) виде теория векторов Витта для таких полей K содержится в работе Курихары [2], см. также обзор [3].

§1. Обозначения и предварительные сведения

Для полного дискретно нормированного поля K характеристики 0 с полем вычетов характеристики $p > 0$:

- K – полное дискретно нормированное поле;
- v_K – дискретное нормирование на K;
- $\mathcal{O}_K$ – кольцо целых поля K;
- $\mathfrak{M}_K$ – максимальный идеал кольца $\mathcal{O}_K$;
- $\overline{K}$ – поле вычетов поля K;
- $e_K = v_K(p)$;
- $\pi_K = \pi$ – простой элемент поля K,

- $\mathfrak{p}_K(i) = \mathfrak{p}(i) = \{\beta \in K \mid v_K(\beta) > i\}$, $i \geqslant 1$;
- $\mathrm{o}(\alpha) = \mathrm{o}_K(\alpha) \in \{\beta \in K \mid v_K(\beta) > v_K(\alpha)\}$, $\alpha \in K$;
- ζ_p – первообразный корень степени p из 1 в алгебраическом замыкании K.

В пределах одного утверждения значения нормирования вычисляются для одного и того же поля, и мы часто опускаем индексы у v_K и e_K.

Для циклического расширения L/K степени p через $s(L/K)$ обозначается его единственный скачок ветвления; имеем

$$s(L/K) = v_L(\pi_L^\sigma/\pi_L - 1),$$

где σ – любой неединичный элемент $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Приведем формулировку леммы 1.1 из [8].

Лемма 1.1. *Пусть K – произвольное поле нулевой характеристики, $\zeta_p \in K$, L/K – циклическое расширение степени p^i, $M = L(\sqrt[p]{a})$, $a \in L^*$. Обозначим через σ порождающий элемент группы* $\mathrm{Gal}(L/K)$.

(1) *M/K абелево, если и только если $a^{\sigma-1} \in (L^*)^p$.*
(2) *Пусть $a^{\sigma-1} = b^p$, $b \in L^*$. Тогда M/K циклическое, если и только если $N_{L/K}(b) \neq 1$.*

§2. Результат

Теорема 2.1. *Пусть $a \in K$, $-\frac{e}{p-1} < v(a) \leqslant 0$. Пусть $M = K(x_0, x_1)$, где*

$$x_0^p - x_0 = a,$$

$$x_1^p - x_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n,$$

$$\Delta_n = \begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p}{i}}{p}\right) a^{p-i} x_0^i, & n = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)+1}, & n = 1, \\ p^{p^n + p^{n-1} + \cdots + p} x_0^{p^{n+2} - p + 1}, & n \geqslant 2. \end{cases}$$

Тогда, если $x_0 \notin K$, то M/K – циклическое расширение степени p^2.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать $\zeta_p \in K$. Тогда K содержит элемент π_0 такой, что $\pi_0^{p-1} = -p$.

Обозначим $y_1 = \pi_0 x_1$, $L = K(x_0)$, $\Delta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Тогда $M = L(y_1)$, и

$$y_1^p + py_1 = b, \qquad b = \pi_0(x_0^{p^2} - a^p - x_0^p) + \pi_0^p \Delta. \tag{1}$$

Пусть σ – порождающий элемент группы $\mathrm{Gal}(L/K)$, $u = x_0^\sigma - x_0$, $v(u) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} b^\sigma &= \pi_0((x_0^\sigma)^{p^2} - a^p - (x_0^\sigma)^p) + \pi_0^p \Delta^\sigma \\ &= \pi_0((x_0 + u)^{p^2} - a^p - (x_0 + u)^p) + \pi_0^p \Delta^\sigma \\ &= \pi_0 \left(\sum_{i=0}^{p^2} \tbinom{p^2}{i} x_0^{p^2-i} u^i - a^p - \sum_{i=0}^{p} \tbinom{p}{i} x_0^{p-i} u^i \right) + \pi_0^p \Delta^\sigma. \end{aligned}$$

В последующих вычислениях, согласно теории Куммера, мы можем не учитывать слагаемые правой части (1), принадлежащие идеалу $\mathfrak{p}_K\left(\frac{pe}{p-1} + 1\right)$.

Для $p \nmid i$ выполняется $v(\binom{p^2}{i}) = 2e$. Из $\binom{p^2}{pi} \equiv \binom{p}{i} \mod \mathfrak{p}(2e)$ и

$$v(\pi_0 x_0^{pi} u^{p^2-pi}) > \frac{e}{p-1} + pi \cdot \frac{-e}{p(p-1)} \geqslant \frac{e}{p-1} - e$$

следует

$$\begin{aligned} \pi_0 \tbinom{p^2}{pi} x_0^{pi} u^{p^2-pi} &\equiv \pi_0 \tbinom{p}{i} x_0^{pi} u^{p^2-pi} \mod \mathfrak{p}(2e + v(\pi_0 x_0^{pi} u^{p^2-pi})) \\ &\equiv \pi_0 \tbinom{p}{i} x_0^{pi} u^{p^2-pi} \mod \mathfrak{p}\left(\tfrac{pe}{p-1} + 1\right). \end{aligned}$$

Следовательно, по модулю идеала $\mathfrak{p}\left(\frac{pe}{p-1}+1\right)$ выполняется сравнение

$$\begin{aligned}
b^\sigma &\equiv \pi_0\Biggl(\sum_{i=0}^{p}\tbinom{p}{i}x_0^{p^2-pi}u^{pi}+\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}\tbinom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u^i-a^p-\sum_{i=0}^{p}\tbinom{p}{i}x_0^{p-i}u^i\Biggr)+\pi_0^p\Delta^\sigma\\
&=\pi_0(x_0^{p^2}-a^p-x_0^p)+\pi_0^p\Delta\\
&\quad+\pi_0\Biggl(\sum_{i=1}^{p-1}\tbinom{p}{i}(x_0^{p^2-pi}u^{pi}-x_0^{p-i}u^i)+\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}\tbinom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u^i\Biggr)\\
&\quad+\pi_0(u^{p^2}-u^p)+\pi_0^p(\Delta^\sigma-\Delta)\\
&=b+\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}[p]_G(-\pi_0x_0^{p-i}u^i)\\
&\quad+\pi_0\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}\tbinom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u^i+\pi_0(u^{p^2}-u^p)+\pi_0^p(\Delta^\sigma-\Delta).
\end{aligned}$$

Здесь $[p]_G=pX+X^p$ – многочлен, задающий умножение на p в формальной группе Любина–Тэйта с законом сложения

$$G(X,Y)=X+Y+(p^p-p)^{-1}\sum_{i=1}^{p-1}\tbinom{p}{i}X^iY^{p-i}+\dots$$

Положим $y=\pi_0x_0$; тогда $y^p+py=b$. В формальном модуле $G(\mathfrak{M}_L)$ имеем $y^\sigma=y+_G w$, где $[p](w)=0$ и $w\neq 0$; можно считать $w=\pi_0$. Таким образом,

$$y^\sigma=y+\pi_0+(p^{p-1}-1)^{-1}y^{p-1}\pi_0+\dots$$

Разделив на π_0, чтобы перейти обратно к корню уравнения Артина–Шрайера, получаем

$$x_0^\sigma=x_0+1+(p^{p-1}-1)^{-1}x_0^{p-1}\pi_0^{p-1}+\dots,$$

откуда

$$u=x_0^\sigma-x_0=1+(p^{p-1}-1)^{-1}x_0^{p-1}\pi_0^{p-1}+\dots. \tag{2}$$

Следовательно, $v(u-1) = (p-1)v(x_0) + e > e - \frac{e}{p}$, $v(u^p - 1) > 2e - \frac{e}{p}$ и $v(u^{p^2} - 1) > 3e - \frac{e}{p}$. Это даёт нам

$$\pi_0(u^{p^2} - u^p) \equiv 0 \mod \mathfrak{p}\Big(\tfrac{pe}{p-1} + 1\Big). \tag{3}$$

Так как

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)+1},$$

то

$$\begin{aligned}\pi_0^p(\Delta_1^\sigma - \Delta_1) &= \pi_0^p \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p \left((x_0+u)^{p(p^2-i)+1} - x_0^{p(p^2-i)+1}\right)\\ &= \pi_0^p \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p \sum_{k=1}^{p(p^2-i)+1} \tbinom{p(p^2-i)+1}{k} x_0^{p(p^2-i)+1-k} u^k.\end{aligned}$$

Учитывая, что при $k \geqslant 2$ верно $\binom{p(p^2-i)+1}{k} \vdots p$, убедимся, что соответствующие слагаемые принадлежат идеалу $\mathfrak{p}\big(\frac{pe}{p-1} + 1\big)$. Имеем

$$v\left(\pi_0^p \left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p \tbinom{p(p^2-i)+1}{k} x_0^{p(p^2-i)+1-k} u^k\right) > \tfrac{pe}{p-1} + \frac{e}{p(p-1)} > \tfrac{pe}{p-1}.$$

Следовательно, по модулю идеала $\mathfrak{p}\big(\frac{pe}{p-1} + 1\big)$ выполняется сравнение

$$\begin{aligned}\pi_0^p(\Delta_1^\sigma - \Delta_1) &\equiv \pi_0^p \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p \tbinom{p(p^2-i)+1}{1} x_0^{p(p^2-i)} u\\ &= \pi_0^p \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)} u + \pi_0^p \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p p(p^2-i) x_0^{p(p^2-i)} u.\end{aligned}$$

Так как при $i \geqslant 1$

$$v\left(\pi_0^p \left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p p(p^2-i) x_0^{p(p^2-i)} u\right) > \tfrac{pe}{p-1} + pe + e - \frac{p(p^2-1)e}{p(p-1)} = \tfrac{pe}{p-1},$$

то в силу (2) по модулю идеала $\mathfrak{p}\big(\frac{pe}{p-1}+1\big)$ выполняется сравнение

$$\pi_0^p(\Delta_1^\sigma-\Delta_1)\equiv\pi_0^p\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)} + \pi_0^p\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)}(p^{p-1}-1)^{-1}\pi_0^{p-1}x_0^{p-1}.$$

Так как для $i\geqslant 1$

$$v\left(\pi_0^p\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)}(1-u^{pi})\right)=\tfrac{pe}{p-1}+e-\frac{e}{p}>\tfrac{pe}{p-1},$$

то

$$\pi_0^p\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)}\equiv\pi_0^p\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)}u^{pi}\mod\mathfrak{p}\Big(\tfrac{pe}{p-1}+1\Big). \tag{4}$$

Поскольку

$$(p^{p-1}-1)^{-1}=-\frac{1}{-p^{p-1}+1}=-1+p^{p-1}-p^{2p-2}+\dots, \tag{5}$$

и

$$v\left(\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)}p^{p-1}\pi_0^{p-1}x_0^{p-1}\right)>\tfrac{pe}{p-1}+\frac{(p^3-2p^2+1)e}{p(p-1)}>\tfrac{pe}{p-1},$$

то по модулю идеала $\mathfrak{p}\big(\frac{pe}{p-1}+1\big)$

$$\pi_0^p\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)}(p^{p-1}-1)^{-1}\pi_0^{p-1}x_0^{p-1} \equiv-\pi_0^p\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)}\pi_0^{p-1}x_0^{p-1}. \tag{6}$$

Таким образом, на первом шаге, в силу (2), (4) и (6) по модулю идеала $\mathfrak{p}\big(\frac{pe}{p-1}+1\big)$ выполняется сравнение

$$\begin{aligned}
b^\sigma \equiv b &+ \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p}[p]_G(-\pi_0 x_0^{p-i}u^i) + p\cdot\pi_0 \sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1} \frac{\binom{p^2}{i}}{p} x_0^{p^2-i}u^i \\
&+ \pi_0^p \sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)}u^{pi} \\
&- \pi_0^p \sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)}\pi_0^{p-1}x_0^{p-1} + \pi_0^p\sum_{n=2}^{N}(\Delta_n^\sigma - \Delta_n) \\
\equiv b &+ \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p}[p]_G(-\pi_0 x_0^{p-i}u^i) + \sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}[p]_G\left(\frac{\pi_0}{p}\tbinom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u^i\right) \\
&- \pi_0^{2p-1}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)+p-1} + \pi_0^p\sum_{n=2}^{N}(\Delta_n^\sigma - \Delta_n).
\end{aligned}$$

Поскольку при $i \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$v\left(\pi_0^{2p-1}\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p x_0^{p(p^2-i)+p-1}\right) > \tfrac{pe}{p-1} + \frac{e}{p(p-1)} > \tfrac{pe}{p-1},$$

то по модулю идеала $\mathfrak{p}\big(\frac{pe}{p-1}+1\big)$ выполнено

$$\begin{aligned}
b^\sigma \equiv b &+ \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p}[p]_G(-\pi_0 x_0^{p-i}u^i) + \sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}[p]_G\left(\frac{\pi_0}{p}\tbinom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u^i\right) \\
&- \pi_0^{2p-1}p^p x_0^{p^3-1} + \pi_0^p\sum_{n=2}^{N}(\Delta_n^\sigma - \Delta_n) \\
= b &+ \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p}[p]_G(-\pi_0 x_0^{p-i}u^i) + \sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}[p]_G\left(\frac{\pi_0}{p}\tbinom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u^i\right) \\
&+ \pi_0^{p^2+p-1}x_0^{p^3-1} + \pi_0^p\sum_{n=2}^{N}(\Delta_n^\sigma - \Delta_n).
\end{aligned}$$

Обозначим
$$\delta_1 = \pi_0^{p^2+p-1} x_0^{p^3-1},$$
тогда
$$v(\delta_1) > \tfrac{pe}{p-1} - \frac{e}{p}.$$

Легко убедиться, что при $n \geqslant 2$
$$\Delta_n = -\pi_0^{p^{n+1}-p} x_0^{p(p^{n+1}-1)+1}.$$
При $n \geqslant 2$ рассмотрим выражение
$$\begin{aligned}\pi_0^p(\Delta_n^\sigma - \Delta_n) &= -\pi_0^{p^{n+1}}\big((x_0^\sigma)^{p(p^{n+1}-1)+1} - x_0^{p(p^{n+1}-1)+1}\big)\\ &= -\pi_0^{p^{n+1}}\big((x_0+u)^{p(p^{n+1}-1)+1} - x_0^{p(p^{n+1}-1)+1}\big)\\ &= -\pi_0^{p^{n+1}}\tbinom{p(p^{n+1}-1)+1}{1} x_0^{p(p^{n+1}-1)} u\\ &\quad - \pi_0^{p^{n+1}} \sum_{k=2}^{p(p^{n+1}-1)+1} \tbinom{p(p^{n+1}-1)+1}{k} x_0^{p(p^{n+1}-1)+1-k} u^k.\end{aligned}$$
Учитывая, что $p \mid \binom{p(p^{n+1}-1)+1}{k}$ при $k \geqslant 2$, оценим нормирование суммы из правой части последнего равенства:
$$\begin{aligned}&v\bigg(\pi_0^{p^{n+1}} \sum_{k=2}^{p(p^{n+1}-1)+1} \tbinom{p(p^{n+1}-1)+1}{k} x_0^{p(p^{n+1}-1)+1-k} u^k\bigg)\\ &\qquad > \tfrac{pe}{p-1} + \frac{e}{p(p-1)} > \tfrac{pe}{p-1}.\end{aligned}$$
Следовательно,
$$\begin{aligned}\pi_0^p(\Delta_n^\sigma - \Delta_n) &\equiv -\pi_0^{p^{n+1}} x_0^{p(p^{n+1}-1)} u\\ &= -\pi_0^{p^{n+1}} x_0^{p(p^{n+1}-1)} - \pi_0^{p^{n+1}} x_0^{p(p^{n+1}-1)} (p^{p-1}-1)^{-1} \pi_0^{p-1} x_0^{p-1}\\ &\equiv -\pi_0^{p^{n+1}} x_0^{p(p^{n+1}-1)} - \pi_0^{p^{n+1}+p-1} (p^{p-1}-1)^{-1} x_0^{p(p^{n+1}-1)+p-1}.\end{aligned}$$

В силу (5) и неравенства
$$v(\pi_0^{p^{n+1}+p-1} p^{p-1} x_0^{p(p^{n+1}-1)+p-1}) > \tfrac{pe}{p-1} + \frac{e}{p-1} > \tfrac{pe}{p-1}$$
получаем сравнение
$$\pi_0^p(\Delta_n^\sigma - \Delta_n) \equiv -\pi_0^{p^{n+1}} x_0^{p(p^{n+1}-1)} + \delta_n \mod \mathfrak{p}\Big(\tfrac{pe}{p-1} + 1\Big), \tag{7}$$

где
$$\delta_n = \pi_0^{p^{n+1}+p-1} x_0^{p^{n+2}-1}. \tag{8}$$

Следовательно, для $N > 2$
$$\delta_1 + \pi_0^p \sum_{n=2}^{N} (\Delta_n^\sigma - \Delta_n) = \sum_{n=1}^{N-1} [p]_G(-\pi_0^{p^{n+1}} x_0^{p^{n+2}-1}) + \delta_N. \tag{9}$$

Вычислим нормирование δ_n:
$$v\left(\pi_0^{p^{n+1}+p-1} x_0^{p^{n+2}-1}\right) > \frac{pe}{p-1} + \frac{-(p-1)e + p^{n+2} - 1}{p(p-1)}.$$

Из последнего равенства видно, что при n, удовлетворяющем условию $n \geqslant N$, $e \leqslant p^N$, выполняется
$$\delta_n = \pi_0^{p^{n+1}+p-1} x_0^{p^{n+2}-1} \in \mathfrak{p}\Big(\tfrac{pe}{p-1} + 1\Big).$$

Следовательно, в силу (3) и (9) получаем следующее сравнение
$$b^\sigma \equiv b + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p} [p]_G(-\pi_0 x_0^i u^{p-i}) \tag{10}$$
$$+ \sum_{\substack{p \nmid i \\ i=1}}^{p^2-1} [p]_G\left(\frac{\pi_0}{p} \tbinom{p^2}{i} x_0^{p^2-i} u\right) \tag{11}$$
$$+ \sum_{i=1}^{N-1} [p]_G(-\pi_0^{p^{i+1}} x_0^{p^{i+2}-1}) \mod \mathfrak{p}\Big(\tfrac{pe}{p-1} + 1\Big). \tag{12}$$

Рассмотрим слагаемое (10). Так как
$$\frac{\binom{p}{i}}{p}[p]_G(-\pi_0 x_0^i u^{p-i})$$
$$= [p]_G\left(-\frac{\binom{p}{i}}{p}\pi_0 x_0^i u^{p-i}\right) + \left(\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p - \frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right) \cdot (\pi_0 x_0^i u^{p-i})^p,$$
и
$$v\left(\left(\left(\frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right)^p - \frac{\binom{p^2}{i}}{p}\right) \cdot (\pi_0 x_0^i u^{p-i})^p\right) > \tfrac{pe}{p-1},$$
то
$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p}[p]_G(-\pi_0 x_0^i u^{p-i}) \equiv \sum_{i=1}^{p-1} [p]_G\left(-\frac{\binom{p}{i}}{p}\pi_0 x_0^i u^{p-i}\right) \mod \mathfrak{p}\Big(\tfrac{pe}{p-1} + 1\Big).$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p-1}[p]_G(c_i) &= p\sum_{i=1}^{p-1}c_i + \left(\sum_{i=1}^{p-1}c_i\right)^p - \left(\sum_{i=1}^{p-1}c_i\right)^p + \sum_{i=1}^{p-1}c_i^p \\ &= [p]_G\left(\sum_{i=1}^{p-1}c_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{p-1}c_i\right)^p + \sum_{i=1}^{p-1}c_i^p,\end{aligned}$$

и в сумме $-\left(\sum\limits_{i=1}^{p-1}c_i\right)^p + \sum\limits_{i=1}^{p-1}c_i^p$ слагаемым с наименьшим нормированием является $pc_i^{p-1}c_j$, то, учитывая неравенство

$$v\left(p\cdot\left(-\frac{\binom{p}{i}}{p}\pi_0x_0^iu^{p-i}\right)^{p-1}\cdot\left(-\frac{\binom{p}{j}}{p}\pi_0x_0^ju^{p-j}\right)\right) > \tfrac{pe}{p-1},$$

заключаем, что

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}[p]_G(-\pi_0x_0^iu^{p-i}) \equiv [p]_G\left(-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}\pi_0x_0^iu^{p-i}\right) \mod \mathfrak{p}\left(\tfrac{pe}{p-1}+1\right).$$

Рассмотрим слагаемое (11).

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}[p]_G\left(\frac{\pi_0}{p}\tbinom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u\right) &= [p]_G\left(\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}\frac{\pi_0}{p}\tbinom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u\right) \\ &\quad+\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}\frac{\pi_0^p}{p^p}\tbinom{p^2}{i}^p x_0^{p(p^2-i)}u^p \\ &\quad-\left(\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}\frac{\pi_0}{p}\tbinom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u\right)^p \\ &\equiv [p]_G\left(\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}\frac{\pi_0}{p}\tbinom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u\right) \mod \mathfrak{p}\left(\tfrac{pe}{p-1}+1\right),\end{aligned}$$

так как

$$v\Biggl(\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}\frac{\pi_0^p}{p^p}\binom{p^2}{i}^p x_0^{p(p^2-i)}u^p-\Biggl(\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}\frac{\pi_0}{p}\binom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u\Biggr)^p\Biggr)$$
$$=v\Biggl(p\Biggl(\frac{\pi_0}{p}\binom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u\Biggr)^{p-1}\frac{\pi_0}{p}\binom{p^2}{j}x_0^{p^2-j}u\Biggr)>\tfrac{pe}{p-1}.$$

Расмотрим слагаемое (12). Полагая $A_i=-\pi_0^{p^{i+1}}x_0^{p^{i+2}-1}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{N-1}[p]_G(A_i)=[p]_G\Biggl(\sum_{i=1}^{N-1}A_i\Biggr)-\sum_{i=1}^{N-1}\pi_0^{p^{i+2}}x_0^{p^{i+3}-p}+\Biggl(\sum_{i=1}^{N-1}A_i\Biggr)^p$$
$$\equiv[p]_G\Biggl(\sum_{i=1}^{N-1}A_i\Biggr)\mod\mathfrak{p}\Bigl(\tfrac{pe}{p-1}+1\Bigr),$$

так как

$$v\Biggl(\sum_{i=1}^{N-1}\pi_0^{p^{i+2}}x_0^{p^{i+3}-p}-\Biggl(\sum_{i=1}^{N-1}A_i\Biggr)^p\Biggr)=v\Bigl(p(\pi_0^{p^N}x_0^{p^{N+1}-1})^{p-1}\pi_0^{p^N}x_0^{p^{N+1}-1}\Bigr)$$
$$>e+p\biggl(\frac{p^Ne}{p-1}-\frac{(p^{N+1}-1)e}{p(p-1)}\biggr)=\tfrac{pe}{p-1}.$$

Таким образом, получаем следующее сравнение по модулю идеала $\mathfrak{p}\bigl(\frac{pe}{p-1}+1\bigr)$:

$$b^\sigma\equiv b+[p]_G\Biggl(-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}\pi_0x_0^iu^{p-i}\Biggr)$$
$$+[p]_G\Biggl(\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}\frac{\pi_0}{p}\binom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u\Biggr)+[p]_G\Biggl(\sum_{i=1}^{N-1}A_i\Biggr)$$
$$=b+[p]_G\Biggl(-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}\pi_0x_0^iu^{p-i}+\sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1}\frac{\pi_0}{p}\binom{p^2}{i}x_0^{p^2-i}u+\sum_{i=1}^{N-1}A_i\Biggr)+d,$$

где

$$v(d)=v\Biggl(p(\pi_0^{p^{N+1}}x_0^{p^{N+2}-1})^{p-1}\frac{\pi_0}{p}\binom{p^2}{1}x_0^{p^2-1}u\Biggr)>\tfrac{pe}{p-1}.$$

Следовательно,

$$b^\sigma \equiv b + [p]_G(c) \mod \mathfrak{p}\Big(\tfrac{pe}{p-1}+1\Big),$$

где

$$c = -\sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p}\pi_0 x_0^i u^{p-i} + \sum_{\substack{p\nmid i\\ i=1}}^{p^2-1} \frac{\pi_0}{p}\tbinom{p^2}{i} x_0^{p^2-i}u - \sum_{i=1}^{N-1} \pi_0^{p^{i+1}} x_0^{p^{i+2}-1}.$$

Заметим, что

$$\begin{gathered} b +_G \widehat{c} = b + \widehat{c} + G_p(b,\widehat{c}) + \dots, \\ G_p(b,\widehat{c}) = (p^p - p)^{-1}\sum_{i=1}^{p-1}\tbinom{p}{i} b^i \widehat{c}^{p-i}, \end{gathered} \tag{13}$$

$$v(b) = \tfrac{pe}{p-1} + (p^2-p+1)v(x_0) > \tfrac{pe}{p-1} + \frac{(p^2-p+1)(-e)}{p(p-1)}, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} v([p]_G(c)) &= v(pc) \\ &= \min\Big\{ v(p\pi_0 x_0^{p-1}), v(p^2\pi_0 x_0^{p^2-1}), v(p\pi_0^{p^N} x_0^{p^{N+1}-1})\Big\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Поскольку

$$\begin{gathered} v(p\pi_0 x_0^{p-1}) > \tfrac{pe}{p-1} + \tfrac{1-e}{p},\ v(p^2\pi_0 x_0^{p^2-1}) > \tfrac{pe}{p-1} + \tfrac{-ep+e+p^2-1}{p(p-1)}, \\ v(p\pi_0^{p^N} x_0^{p^{N+1}-1}) > \tfrac{pe}{p-1} + \tfrac{p^{N+1}-1-(p-1)e}{p(p-1)}, \end{gathered}$$

и при всех N, удовлетворяющих условию $p^N \geqslant e$, верно

$$p^{N+1} - 1 - (p-1)e > 0,$$

то

$$v([p]_G(c)) > \tfrac{pe}{p-1} + \tfrac{1-e}{p}.$$

Следовательно,

$$v(G_p(b,[p]_G(c))) = (p-1)v(b) + v([p]_G(c)) > \tfrac{pe}{p-1}. \tag{16}$$

Учитывая (13), (14), (15) и (16), получаем сравнение

$$b^\sigma \equiv b +_G [p]_G(c) \mod \mathfrak{p}\Big(\tfrac{pe}{p-1}+1\Big).$$

Переходя к мультипликативной группе и, применяя лемму 1.1, получаем, что расширение M/K абелево.

Остается доказать, что M/K является циклическим. Предположим противное. Пусть K_1/K – циклическое расширение, заданное уравнением $x_0^p - x_0 = a$, K_2/K – циклическое расширение, заданное уравнением Артина-Шрайера $x^p - x = \widetilde{a}$ такое, что $M/K_1 = K_2K_1/K_1$ и $p \nmid v_K(\widetilde{a})$.

Согласно лемме 3.3.1 из [7], имеем

$$s(K_2K_1/K_1) = \begin{cases} -v_K(a), & \text{если } -v_K(a) = -v_K(\widetilde{a}); \\ -v_K(a) + p(-v_K(\widetilde{a}) + v_K(a)), & \text{если } -v_K(a) < -v_K(\widetilde{a}); \\ -v_K(\widetilde{a}), & \text{если } -v_K(a) > -v_K(\widetilde{a}). \end{cases}$$

Мы знаем скачок расширения M/K_1:

$$\begin{aligned} s(M/K_1) &= -v_{K_1}(a^{p-1}x_0) = -(p-1)v_{K_1}(a) - v_{K_1}(x_0) \\ &= -(p-1)pv_K(a) - v_K(a) = -(p^2-p+1)v_K(a). \end{aligned}$$

Таким образом, первый случай, очевидно, невозможен.

Рассмотрим случай $-v_K(a) < -v_K(\widetilde{a})$. Тогда

$$\begin{aligned} s(K_2K_1/K_1) &= s(M/K_1), \\ -v_K(a) + p(-v_K(\widetilde{a}) + v_K(a)) &= -(p^2-p+1)v_K(a), \\ v_K(\widetilde{a}) &= pv_K(a), \end{aligned}$$

что противоречит тому, что $p \nmid v_K(\widetilde{a})$.

Если $-v_K(a) > -v_K(\widetilde{a})$, то

$$-v_K(\widetilde{a}) = -(p^2-p+1)v_K(a) > -v_K(a),$$

что невозможно.

Таким образом, M/K – циклическое расширение степени p^2.

Литература

1. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions. A constructive approach*, Second edition, AMS, Providence, RI, 2002.
2. M. Kurihara, *Abelian extensions of an absolutely unramified local field with general residue field.* — Invent. Math. **93** (1988), 451–480.
3. M. Kurihara, *Abelian extensions of absolutely unramified complete discrete valuation fields.* — In book: I. Fesenko, M. Kurihara, (eds.) *Invitation to Higher Local Fields.* Geometry and Topology Monographs, **3** (2000), 113–116.

4. H. Miki, *On $\mathbb{Z}_p$-extensions of complete p-adic power series fields and function fields.*— J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1A **21** (1974), 377–393.
5. R. E. MacKenzie, G. Whaples, *Artin–Schreier equations in characteristic zero.* — Amer. J. Math. **78** (1956), 473–485.
6. С. В. Востоков, И. Б. Жуков, *Некоторые подходы к построению абелевых расширений для $\mathfrak{p}$-адических полей.* — Труды С.-Петерб. мат. общ. **3** (1995), 194–214.
7. L. Xiao, I. Zhukov, *Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions.* — Алгебра и анализ **26**, No. 5 (2014), 1–63.
8. И. Б. Жуков, *Структурная теорема для полных полей.* — Труды С.-Петерб. мат. общ. **3** (1995), 215–234.
9. I. Zhukov, *Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields.* — In book: I. Fesenko, M. Kurihara, (eds.) *Invitation to Higher Local Fields.* Geometry and Topology Monographs, **3** (2000), 117–122.

Zhukov I., Lysenko E. Construction of cyclic extensions of degree p^2 for a complete field.

In the present paper we embed a given cyclic extension of degree p of a complete discrete valuation field of characteristic 0 with an arbitrary residue field of characteristic $p > 0$ into a cyclic extension of degree p^2. The result extends the construction obtained by S. V. Vostokov and I. B. Zhukov in terms of Witt vectors, to a wider interval of values for the ramification jump of the original field extension.

Санкт-Петербургский
государственный университет
Университетская наб., 7/9
199034, Санкт-Петербург
E-mail: i.zhukov@spbu.ru

Поступило 11 февраля 2017 г.

Санкт-Петербургский
государственный электротехнический
университет “ЛЭТИ”
улица Профессора Попова, 5
197376, Санкт-Петербург
E-mail: lysenkoef@yandex.ru