

Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев, Я. Н. Нужин

ПОЛНЫЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЕТИ НАД ПОЛЕМ ЧАСТНЫХ КОЛЬЦА ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Система аддитивных подгрупп $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, кольца K называется *полной сетью* над кольцом K порядка n , если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j . Для сети принят также термин *ковер*. Такая же система, но без диагонали, называется *элементарной сетью*. Полную или элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы называем *неприводимой*, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля.

По определению *элементарная сетевая* подгруппа $E(\sigma)$ порождается элементарными трансвекциями $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$, $\alpha \in \sigma_{ij}$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Здесь e – единичная матрица, e_{ij} – матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули. Назовем элементарную сеть σ *замкнутой*, если подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Замкнутыми являются элементарные сети, диагональ которых можно дополнить подгруппами, получив при этом полную сеть (детали можно найти в [1]). В частности, любая элементарная сеть идеалов замкнута. Примеры незамкнутых неприводимых элементарных сетей любого порядка приводятся в [2, 3].

Через $D(n, K)$ обозначим группу обратимых диагональных $n \times n$ матриц над кольцом K . По полной или элементарной сети σ и любой матрице $d = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ из $D(n, K)$ можно определить сопряженную сеть $\pi = d\sigma d^{-1}$, где $\pi_{ij} = \varepsilon_i \sigma_{ij} \varepsilon_j^{-1}$.

Полную сеть $\tau = (\tau_{ij})$ порядка $n \geq 2$ над кольцом K с единицей 1 назовем *D-сетью*, если $1 \in \tau_{ii}$, $1 \leq i \leq n$. Из сетевого условия $\tau_{ii}\tau_{ii} \subseteq \tau_{ii}$ следует, что все диагональные аддитивные подгруппы τ_{ii} полной сети являются кольцами, а для *D*-сети все τ_{ii} – кольца с единицей.

Ключевые слова: общая и специальная линейные группы, полная и элементарная сети аддитивных подгрупп, сетевая подгруппа, поле частных кольца главных идеалов.

Результаты работы получены в рамках государственного задания Минобрнауки России.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00707).

Теорема 1. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ – неприводимая полная D -сеть порядка $n \geq 2$ над полем частных K кольца главных идеалов R , причем для любых i, j подгруппы σ_{ij} являются R -модулями. Тогда для некоторого промежуточного подкольца P , $R \subseteq P \subseteq K$, сеть σ сопряжена диагональной матрицей из $D(n, K)$ с полной D -сетью $\pi = (\pi_{ij})$ идеалов кольца P , где $\pi_{ij} = q_{ij}P$, для некоторых $q_{ij} \in P$, причем $q_{ii} = q_{i1} = 1$, $1 \leq i \leq n$, и каждый q_{ij} делит q_{1j} для любых i, j .

Теорема 2. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ – неприводимая элементарная сеть порядка $n \geq 3$ над полем частных K кольца главных идеалов R , причем для любых i, j , $i \neq j$, подгруппы σ_{ij} являются R -модулями. Тогда для некоторого промежуточного подкольца P , $R \subseteq P \subseteq K$, сеть σ сопряжена диагональной матрицей из $D(n, K)$ с элементарной сетью $\pi = (\pi_{ij})$ идеалов кольца P , где $\pi_{ij} = q_{ij}P$, для некоторых $q_{ij} \in P$, причем $q_{i1} = 1$, $2 \leq i \leq n$, и каждый q_{ij} делит q_{1j} для любых $i \neq 1$, $j \neq 1$, $j \neq i$. В частности, элементарная сеть σ является замкнутой.

Полная D -сеть $\pi = (\pi_{ij})$ из теоремы 1 наглядно представляется таблицей

$$\begin{pmatrix} P & q_{12}P & q_{13}P & \dots & q_{1n}P \\ P & P & q_{23}P & \dots & q_{2n}P \\ P & q_{32}P & P & \dots & q_{3n}P \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P & q_{n2}P & q_{n3}P & \dots & P \end{pmatrix}.$$

Подобная таблица, но без диагонали, также представляет и элементарную сеть $\pi = (\pi_{ij})$ из теоремы 2. Теоремы 1 и 2 дают

Следствие. Всякая неприводимая элементарная сеть (полная D -сеть) порядка $n \geq 3$ (соответственно $n \geq 2$) над полем рациональных чисел \mathbb{Q} с точностью до сопряженности диагональной матрицей из $D(n, \mathbb{Q})$ является элементарной сетью (полной D -сетью) главных идеалов некоторого промежуточного подкольца P , $\mathbb{Z} \subseteq P \subseteq \mathbb{Q}$, и имеет вид элементарной сети из теоремы 2 (соответственно, полной сети из теоремы 1). В частности, любая неприводимая элементарная сеть порядка $n \geq 3$ над полем рациональных чисел \mathbb{Q} замкнута.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОЛЕЦ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

Утверждения следующей леммы хорошо известны.

Лемма 1. Пусть K – поле частных кольца главных идеалов R . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) R – факториальное кольцо, то есть в кольце R разложение на простые множители однозначно.

2) Если S – мультипликативное подмножество кольца R , то $S^{-1}R$ также является кольцом главных идеалов и $R \subseteq S^{-1}R \subseteq K$. С другой стороны, всякое промежуточное подкольцо P , $R \subseteq P \subseteq K$, является кольцом главных идеалов и имеет вид $P = S^{-1}R$ для некоторого мультипликативного подмножества $S \subseteq R$.

Далее для аддитивных подгрупп A и B поля K через AB мы обозначаем аддитивную подгруппу, порожденную всеми произведениями ab , где $a \in A$, $b \in B$.

Лемма 2. Пусть A и B – аддитивные подгруппы поля частных K кольца главных идеалов R . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) если подгруппы A и B являются R -модулями, $AB = R$ и $1 \in A$, то $B = rR$, а $A = \frac{1}{r}R$ для некоторого $r \in R$.

2) $kAB = (kA)B = A(kB)$ для любого $k \in K$.

Доказательство. 1) В силу $AB = R$ и $1 \in A$ получаем включение $B \subseteq R$, а так как B – R -модуль, то B является идеалом кольца R . Следовательно, $B = rR$ для некоторого $r \in R$. Так как $AB = R$ и $B = rR$, то $ArR = R$. Отсюда $Ar \subseteq R$. По условию леммы A является R -модулем, поэтому Ar – идеал кольца R и, следовательно, $Ar = sR$ для некоторого $s \in R$. Равенства $ArR = R$ и $Ar = sR$ дают равенство $sR = R$. Отсюда $Ar = R$ и, следовательно, $A = \frac{1}{r}R$.

2) Подгруппа AB состоит из конечных сумм произведений вида $a_i b_j$, где $a_i \in A$, $b_j \in B$. Следовательно, для любого $k \in K$ получаем

$$\begin{aligned} k(AB) &= k \left\{ \sum_{i,j} a_i b_j \mid a_i \in A, b_j \in B \right\} = \left\{ \sum_{i,j} k a_i b_j \mid a_i \in A, b_j \in B \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i,j} (k a_i) b_j \mid a_i \in A, b_j \in B \right\} = (kA)B. \end{aligned}$$

Равенство $kAB = A(kB)$ показывается аналогично. \square

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Здесь и далее мы используем определения и обозначения из введения.

Лемма 3. Пусть $\tau = (\tau_{ij})$ – неприводимая D -сеть порядка $n \geq 2$ над полем частных K кольца главных идеалов R , причем для любых i, j подгруппы τ_{ij} являются R -модулями. Тогда существует промежуточное подкольцо P , $R \subseteq P \subseteq K$, такое, что справедливы следующие утверждения.

1) Для любых i, j подгруппы τ_{ij} являются P -модулями и $\tau_{ij}\tau_{ji} = m_{ij}P$ для некоторых $m_{ij} \in P$, причем $m_{ij} = m_{ji}$ и $m_{ii} = 1$. В частности, $\tau_{ii} = P$, $1 \leq i \leq n$.

2) Если $1 \in \tau_{ij}$, то существуют $m_{ij}, p_{ij} \in P$ такие, что $\tau_{ij} = \frac{1}{p_{ij}}P$, $\tau_{ji} = p_{ij}m_{ij}P$.

Доказательство. 1) Так как τ_{ij} – R -модули, то произведения $\tau_{ij}\tau_{ji}$ также являются R -модулями. В силу предположения леммы $1 \in \tau_{ii}$ и $R\tau_{ii} \subseteq \tau_{ii}$. Следовательно, подкольца τ_{ii} являются промежуточными, то есть $R \subseteq \tau_{ii} \subseteq K$. В частности, τ_{ii} – кольца главных идеалов по лемме 1. Зафиксируем пару различных индексов i, j и положим $\tau_{ii} = P$, $\tau_{jj} = Q$, $\tau_{ij}\tau_{ji} = B$. Из сетевого условия $\tau_{ii}\tau_{ij} \subseteq \tau_{ij}$ следует, что τ_{ij} является P -модулем. Далее, из включений $\tau_{ij}\tau_{ji} \subseteq \tau_{ii}$ и $\tau_{ii}\tau_{ij}\tau_{ji} \subseteq \tau_{ij}\tau_{ji}$ следует, что $B \subseteq P$, $B \subseteq Q$ и B – идеал кольца P , $R \subseteq P \subseteq K$. Аналогично, B – идеал кольца Q , $R \subseteq Q \subseteq K$. Поэтому $\tau_{ij}\tau_{ji} = B = m_{ij}P$ для некоторого $m_{ij} \in P$. Так как $\tau_{ij}\tau_{ji} = \tau_{ji}\tau_{ij}$, то $m_{ij} = m_{ji}$.

Положим $m = m_{ij}$ и покажем, что $P = Q$. Как мы уже отметили, B – идеал кольца Q , $R \subseteq Q \subseteq K$, поэтому $B = nQ$, $n \in Q$. Таким образом, $B = nQ = mP = B$, $n \in Q$, $m \in P$. Далее, B – идеал пересечения $P \cap Q$, $R \subseteq P \cap Q \subseteq K$, поэтому $B = q(P \cap Q)$, $q \in P \cap Q$. Следовательно, $nQ = mP = q(P \cap Q)$, $n \in Q$, $m \in P$, $q \in P \cap Q$. Отсюда $\frac{m}{q} \in P \cap Q \subseteq P$, $\frac{q}{m} \in P$ и, следовательно, $\frac{m}{q}$ – обратимый элемент кольца P , а потому равенство $mP = q(P \cap Q)$ влечет равенство $P = P \cap Q$. Аналогично устанавливается, что $Q = P \cap Q$. Следовательно, $P = Q$. Таким образом, $\tau_{ii} = P$, $1 \leq i \leq n$, и в качестве m_{ii} можно взять 1.

2) По уже доказанному утверждению 1) этой леммы справедливо равенство $\tau_{ij}\tau_{ji} = m_{ij}P$, которое в силу п. 2) леммы 2 влечет равенство

$$\tau_{ij}\left(\frac{1}{m_{ij}}\tau_{ji}\right) = P.$$

Отсюда в силу п. 1) леммы 2 для некоторого ненулевого $p_{ij} \in P$ получаем равенства $\tau_{ij} = \frac{1}{p_{ij}}P$, $\tau_{ji} = p_{ij}m_{ij}P$. \square

Доказательство теоремы 1. По предположению теоремы $\sigma = (\sigma_{ij})$ – неприводимая полная D -сеть порядка $n \geq 2$ над полем частных K кольца главных идеалов R , причем для любых i, j подгруппы σ_{ij} являются R -модулями.

В силу п. 1 леммы 3 существует промежуточное подкольцо P , $R \subseteq P \subseteq K$, такое, что для любых i, j подгруппы τ_{ij} являются P -модулями и $\tau_{ij}\tau_{ji} = m_{ij}P$ для некоторых $m_{ij} \in P$, причем $m_{ij} = m_{ji}$ и $m_{ii} = 1$. В частности, $\tau_{ii} = P$, $1 \leq i \leq n$.

Пусть t_{i1} – ненулевые элементы подгрупп σ_{i1} , $2 \leq i \leq n$. Положим

$$d = \text{diag} \left(1, \frac{1}{t_{21}}, \frac{1}{t_{31}}, \dots, \frac{1}{t_{n1}} \right).$$

Тогда сопряженная D -сеть $\tau = d\sigma d^{-1}$ обладает тем свойством, что $1 \in \tau_{i1}$, $2 \leq i \leq n$. Поэтому в силу п. 2 леммы 3 при каждом i , $2 \leq i \leq n$ для некоторого ненулевого $p_{i1} \in P$ получаем

$$\tau_{i1} = \frac{1}{p_{i1}}P, \quad \tau_{1i} = p_{i1}m_{i1}P.$$

Сейчас, сопрягая сеть $\tau = (\tau_{ij})$ диагональной матрицей

$$\text{diag}(1, p_{21}, p_{31}, \dots, p_{n1}),$$

получаем полную D -сеть $\pi = (\pi_{ij})$ над полем K , где $\pi_{ij} = q_{ij}P$, для некоторого $q_{ij} \in K$, причем в силу построения $q_{ii} = q_{i1} = 1$, $1 \leq i \leq n$, и $q_{1i} = m_{i1} \in P$, $2 \leq i \leq n$. Сеть $\pi = (\pi_{ij})$ наглядно представляется таблицей

$$\begin{pmatrix} P & q_{12}P & q_{13}P & \dots & q_{1n}P \\ P & P & q_{23}P & \dots & q_{2n}P \\ P & q_{32}P & P & \dots & q_{3n}P \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P & q_{n2}P & q_{n3}P & \dots & P \end{pmatrix}.$$

Покажем, что все q_{ji} лежат в кольце P . Для $j = 1$ это выполняется. Для остальных i, j при $i \neq j$, $2 \leq i \leq n$, по сетевому условию справедливы включения $q_{ji}PP = \pi_{ji}\pi_{i1} \subseteq \pi_{j1} = P$. Отсюда $q_{ji} \in P$.

Наконец, снова в силу сетевого условия для всех i, j при $i \neq j$, $2 \leq i \leq n$, имеем $P(q_{1j}P) = \pi_{i1}\pi_{1j} \subseteq \pi_{ij} = q_{ij}P$. Отсюда $q_{1j}P \subseteq q_{ij}P$ и, следовательно, q_{ij} делит q_{1j} . \square

4. ДВЕ ПОЛНЫЕ D -СЕТИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СЕТЬЮ

В этом параграфе $\sigma = (\sigma_{ij})$ – элементарная сеть порядка $n \geq 3$ над коммутативным кольцом R с единицей. По сети σ определим две новые элементарные сети ω и Ω как в [5]. В свою очередь, по этим сетям построим две полные сети $\hat{\omega}$ и $\hat{\Omega}$ и две полные D -сети $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\Omega}$ которые будут использоваться, в доказательстве теоремы 2.

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется *дополняемой*, если можно доопределить диагональные аддитивные подгруппы σ_{ii} , $1 \leq i \leq n$, так, чтобы $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для всех i, r, j . Хорошо известно, что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (1)$$

(см., например, [4, с. 25]). Это дополнение можно получить, положив

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}. \quad (2)$$

Если $\sigma = (\sigma_{ij})$ – элементарная дополняемая сеть, то через $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_{ij})$ будем обозначать дополнение σ до полной сети по формуле (2).

Отметим, что не всякая элементарная сеть дополняется до полной сети. При $n = 2$ примеры недополняемых элементарных сетей легко строятся, так как в этом случае любая пара аддитивных подгрупп кольца R является элементарной сетью. Примеры неприводимых замкнутых недополняемых элементарных сетей любой степени над полями рациональных функций указаны в [2].

Лемма 4. [5, Предложение 1]. *Для любых различных i, j положим $\omega_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}\sigma_{kj}$, где суммирование берется по всем k , отличным от i и j . Набор $\omega = (\omega_{ij})$ является элементарной дополняемой сетью.*

Лемма 5. [5, Предложение 5]. *Для любых различных i, j положим $\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij}$, где $\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m$. Набор $\Omega = (\Omega_{ij})$ является элементарной дополняемой сетью.*

Лемма 6. [5, Предложение 6]. *Пусть $\omega = (\omega_{ij})$ и $\Omega = (\Omega_{ij})$ как в леммах 4 и 5. Тогда $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$, то есть $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$ при всех i, j , $i \neq j$, а для полных сетей $\hat{\omega}$ и $\hat{\Omega}$ помимо общего включения*

$\widehat{\omega} \subseteq \widehat{\Omega}$ справедливы включения $\widehat{\omega}_{ir}\widehat{\Omega}_{rj} \subseteq \widehat{\omega}_{ij}$ и $\widehat{\Omega}_{ir}\widehat{\omega}_{rj} \subseteq \widehat{\omega}_{ij}$, если $i \neq j$, $1 \leq i, j, r \leq n$.

Сети $\widehat{\omega}$ и $\widehat{\Omega}$ не обязательно являются D -сетями, то есть диагональные аддитивные подгруппы, которые являются кольцами, не обязательно содержат 1. Однако, мы можем к диагональным кольцам добавить \mathbb{Z} и рассмотреть диагонали $\widehat{\omega}_{ii} + \mathbb{Z}$ и $\widehat{\Omega}_{ii} + \mathbb{Z}$ соответственно. Обозначим эти наборы с увеличенными диагоналями через $\widetilde{\omega}$ и $\widetilde{\Omega}$ соответственно. Конечно, если характеристика кольца R равна m , то вычисления в кольцах $\widetilde{\omega}_{ii} = \widehat{\omega}_{ii} + \mathbb{Z}$ и $\widetilde{\Omega}_{ii} = \widehat{\Omega}_{ii} + \mathbb{Z}$ происходят по модулю m . Следующая лемма очевидна.

Лемма 7. Пусть $\omega = (\omega_{ij})$ и $\Omega = (\Omega_{ij})$ как в леммах 4 и 5. Тогда наборы $\widetilde{\omega}$ и $\widetilde{\Omega}$ являются полными D -сетями и $\widetilde{\omega} \subseteq \widetilde{\Omega}$, то есть $\widetilde{\omega}_{ij} \subseteq \widetilde{\Omega}_{ij}$ для всех i, j , $1 \leq i, j \leq n$. Наглядно $\widetilde{\omega}$ и $\widetilde{\Omega}$ представляются соответственно следующими таблицами

$$\begin{pmatrix} \widehat{\omega}_{11} + \mathbb{Z} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \widehat{\omega}_{22} + \mathbb{Z} & \dots & \omega_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \widehat{\omega}_{nn} + \mathbb{Z} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \widehat{\Omega}_{11} + \mathbb{Z} & \Omega_{12} & \dots & \Omega_{1n} \\ \Omega_{21} & \widehat{\Omega}_{22} + \mathbb{Z} & \dots & \Omega_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \Omega_{n1} & \Omega_{n2} & \dots & \widehat{\Omega}_{nn} + \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

По предположению теоремы $\sigma = (\sigma_{ij})$ – неприводимая элементарная сеть порядка $n \geq 3$ над полем частных K кольца главных идеалов R , причем для любых i, j , $i \neq j$, подгруппы σ_{ij} являются R -модулями.

Пусть элементарные сети $\omega = (\omega_{ij})$ и $\Omega = (\Omega_{ij})$ как в леммах 4 и 5. С точностью до сопряжения диагональной матрицей из $D(n, K)$ можно считать, что все подгруппы ω_{ii-1} , $2 \leq i \leq n$, содержат 1. Из сетевого условия следует, что $1 \in \omega_{ij}$ для всех i, j при $i > j$. По лемме 6 имеем $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$. Поэтому 1 лежит и во всех подгруппах σ_{ij} и Ω_{ij} при $i > j$. Таким образом, полные D -сети $\widetilde{\omega}$ и $\widetilde{\Omega}$ из леммы 7 удовлетворяют всем предположениям леммы 3. Следовательно, существуют промежуточные подкольца L и P , $R \subseteq P, L \subseteq K$, и их элементы $s_{ij}, m_{ij} \in L$,

$p_{ij}, q_{ij} \in P$ такие, что

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{ii} &= \hat{\omega}_{ii} + \mathbb{Z} = L, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \omega_{ij} &= \frac{1}{s_{ij}}L, \quad \omega_{ji} = s_{ij}m_{ij}L, \quad i > j, \quad 1 \leq i, j \leq n, \\ \tilde{\Omega}_{ii} &= \hat{\Omega}_{ii} + \mathbb{Z} = P, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{p_{ij}}P, \quad \Omega_{ji} = p_{ij}q_{ij}P, \quad i > j, \quad 1 \leq i, j \leq n.\end{aligned}$$

Здесь мы учитываем, что $\hat{\omega}_{ij} = \omega_{ij}$ и $\hat{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij}$ для всех $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Установим совпадение колец L и P . По лемме 7 имеем $\tilde{\omega} \subseteq \tilde{\Omega}$, поэтому $L \subseteq P$. С другой стороны, $\omega_{21}\hat{\Omega}_{11} \subseteq \omega_{21}$ в силу леммы 6, а включение $\omega_{21}\mathbb{Z} \subseteq \omega_{21}$ очевидно. Отсюда

$$\omega_{21}(\hat{\Omega}_{11} + \mathbb{Z}) = \frac{1}{s_{21}}LP \subseteq \frac{1}{s_{21}}L = \omega_{21},$$

следовательно, $P \subseteq L$. Таким образом, $L = P$. По лемме 6 имеем $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$. Поэтому для любых $i > j$ получаем

$$\begin{aligned}\omega_{ij} &= \frac{1}{s_{ij}}P \subseteq \sigma_{ij} \subseteq \frac{1}{p_{ij}}P = \Omega_{ij}, \\ \omega_{ji} &= s_{ij}m_{ij}P \subseteq \sigma_{ji} \subseteq p_{ij}q_{ij}P = \Omega_{ji}.\end{aligned}$$

В частности, при всех $i > j$ любая группа σ_{ij} содержит 1 и любая σ_{ji} лежит в P .

Покажем, что для любого $i > j$ подгруппа σ_{ji} является идеалом кольца P . Во-первых, $\Omega_{ji} \subseteq P$, поэтому $\sigma_{ji} \subseteq P$. По лемме 6

$$\sigma_{ji}\hat{\omega}_{ii} \subseteq \Omega_{ji}\hat{\omega}_{ii} \subseteq \omega_{ji} \subseteq \sigma_{ji},$$

а включения $\sigma_{ji}\mathbb{Z} \subseteq \sigma_{ji}$ очевидны. Отсюда

$$\sigma_{ji}P = \sigma_{ji}(\hat{\omega}_{ii} + \mathbb{Z}) \subseteq \sigma_{ji}.$$

Итак, $\sigma_{ji} \subseteq P$, $\sigma_{ji}P \subseteq \sigma_{ji}$, поэтому σ_{ji} – идеал кольца P .

Покажем, что при $i \neq j$ все произведения $\sigma_{ij}\sigma_{ji}$ также являются идеалами кольца P . Действительно,

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji} \subseteq \Omega_{ij}\Omega_{ji} \subseteq \hat{\Omega}_{ii} \subseteq \tilde{\Omega}_{ii} = P.$$

Отсюда $\sigma_{ij}\sigma_{ji} \subseteq P$. Далее, по лемме 6 получаем

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\hat{\omega}_{ii} \subseteq \sigma_{ij}\Omega_{ji}\hat{\omega}_{ii} \subseteq \sigma_{ij}\omega_{ji} \subseteq \sigma_{ij}\sigma_{ji}$$

и, очевидно, $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\mathbb{Z} \subseteq \sigma_{ij}\sigma_{ji}$. Поэтому $\sigma_{ij}\sigma_{ji}P = \sigma_{ij}\sigma_{ji}(\widehat{\omega}_{ii} + \mathbb{Z}) \subseteq \sigma_{ij}\sigma_{ji}$. Следовательно, $\sigma_{ij}\sigma_{ji}$ — идеал кольца P и

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji} = a_{ij}P, \quad a_{ij} \in P.$$

Покажем, что все σ_{ij} являются P -модулями. По лемме 6 для любых $i, j, i \neq j$ справедливы включения

$$\sigma_{ij}\widehat{\omega}_{ii} \subseteq \Omega_{ij}\widehat{\omega}_{ii} \subseteq \omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij},$$

а включения $\sigma_{ij}\mathbb{Z} \subseteq \sigma_{ij}$ очевидны. Отсюда

$$\sigma_{ij}P = \sigma_{ij}(\widehat{\omega}_{ii} + \mathbb{Z}) \subseteq \sigma_{ij}.$$

Итак, все σ_{ij} являются P -модулями, $1 \in \sigma_{ij}$ при $i > j$ и $\sigma_{ij}\sigma_{ji} = a_{ij}P$. В этом случае утверждение 2) леммы 3, доказанное для полных D -сетей, проходит и для элементарных сетей. Поэтому для некоторого $t_{ij} \in P$ мы имеем

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{t_{ij}}P, \quad \sigma_{ji} = a_{ij}t_{ij}P, \quad a_{ij}, t_{ij} \in P, \quad i > j.$$

Сейчас, сопрягая сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ диагональной матрицей

$$\text{diag}(1, t_{21}, t_{31}, \dots, t_{n1}),$$

получаем элементарную сеть $\pi = (\pi_{ij})$ над полем K , где $\pi_{ij} = q_{ij}P$, для некоторого $q_{ij} \in K$. Сеть $\pi = (\pi_{ij})$ наглядно представляется таблицей

$$\begin{pmatrix} * & q_{12}P & q_{13}P & \dots & q_{1n}P \\ P & * & q_{23}P & \dots & q_{2n}P \\ P & q_{32}P & * & \dots & q_{3n}P \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P & q_{n2}P & q_{n3}P & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Включения $q_{ij} \in P$ для всех i, j и то, что каждый q_{ij} делит q_{1j} для любых $i \neq 1, j \neq 1, j \neq i$, устанавливается так же, как и при доказательстве теоремы 1.

Любая элементарная сеть идеалов удовлетворяет условию (1) параграфа 4 и, следовательно, является замкнутой сетью. Поэтому сеть идеалов π замкнута, а следовательно, замкнута и сопряженная с ней первоначальная сеть σ . \square

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Койбаев, Я. Н. Нужин, *Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца*. — *Фундаментальная и прикладная математика* **18**, No. 1 (2013), 75–84.
2. В. А. Койбаев, *Элементарные сети в линейных группах*. — *Труды ИММ УрО РАН* **17**, No. 4 (2011), 134–141.
3. С. К. Куклина, А. О. Лихачева, Я. Н. Нужин, *О замкнутости ковров лева типа над коммутативными кольцами*. — *Труды ИММ УрО РАН* **21**, No. 5 (2015), 192–196.
4. З. И. Борович, *О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями*. — *Зап. науч. семинаров ЛОМИ* **75** (1978), 22–31.
5. В. А. Койбаев, *Сети, ассоциированные с элементарными сетями*. — *Владикавказский матем. журнал* **12**, No. 4 (2010), 39–43.

Dryaeva R. Y., Koibaev V. A., Nuzhin Ya. N. Full and elementary nets over the quotient field of a principal ideal ring.

Let K be the quotient field of a principal ideal ring R , and $\sigma = (\sigma_{ij})$ be a full (elementary) net of order $n \geq 2$ (respectively, $n \geq 3$) over K such that the additive subgroups σ_{ij} are nonzero R -modules. It is proved that, up to conjugation by diagonal matrix, all σ_{ij} are ideals of a fixed intermediate subring P , $R \subseteq P \subseteq K$.

Северо-Осетинский гос. ун-т
им. К. Л. Хетагурова

E-mail: dryaeva-roksana@mail.ru

Поступило 22 декабря 2016 г.

Северо-Осетинский гос. ун-т им. К. Л. Хетагурова
Южный математический институт ВНИЦ РАН

E-mail: koibaev-k1@yandex.ru

Сибирский федеральный университет

E-mail: nuzhin2008@rambler.ru