Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 455, 2017 г.

**А. И. Генералов**

# О НЕОБЫЧНОЙ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КАТЕГОРИИ

## 1. Введение

В работе [1] было приведено ещё одно доказательство теоремы Ауслендера–Райтен о существовании почти расщепляющихся последовательностей для (конечно порождённых) модулей над артиновой алгеброй. В качестве одного из шагов этого доказательства был использован переход от произвольной абелевой категории $\mathcal{C}$ к сердцевине $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ некоторой $t$-структуры на гомотопической категории $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$. Поскольку доказательство абелевости сердцевины $t$-структуры в самом общем контексте – это довольно длинный путь (см. [2,3]), то мы попытались напрямую проверить выполнимость аксиом абелевой категории для сердцевины $t$-структуры, рассмотренной в [1]. При этом обнаружилось, что от исходной категории $\mathcal{C}$ можно требовать несколько меньше, а именно, достаточно, чтобы в $\mathcal{C}$ любой морфизм имел ядро, и тогда $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ оказывается абелевой. Такая асимметрия несколько удивительна, и, вероятно, потребуется дополнительное исследование для её объяснения.

## 2. Основные конструкции

Пусть $\mathcal{C}$ – аддитивная категория. В категории $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ морфизмов категории $\mathcal{C}$ рассмотрим идеал $I$, состоящий из морфизмов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_0)\colon g \to g'$, описываемых коммутативными квадратами вида

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\ g\ } & C \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_0} \\ B' & \xrightarrow{\ g'\ } & C', \end{array} \tag{1}$$

для которых выполняется условие:

существует морфизм $h\colon C \to B'$ такой, что $\alpha_0 = g'h$.

---

*Ключевые слова*: гомотопическая категория, аддитивная категория.
Работа выполнена частично при поддержке РФФИ (грант 17-01-00258).

Через $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ обозначим фактор-категорию категории $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ по идеалу $I$. Композицию морфизмов в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ будем обозначать (во избежание путиницы с обозначением композиции в $\mathcal{C}$) следующим образом: $\alpha * \beta$. Кроме того, класс морфизма $\alpha\colon g \to g'$ (относительно эквивалентности, определяемой идеалом $I$) мы будем обозначать также через $\alpha$.

**Предложение 1.** *Если $\mathcal{C}$ – аддитивная категория, то $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ – аддитивная категория, в которой любой морфизм имеет коядро.*

**Доказательство.** Введение структуры аддитивной категории на $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ стандартно, и мы опустим соответствующие построения.

Пусть дан произвольный морфизм $\alpha\colon g \to g'$ в категории $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, определяемый коммутативным квадратом (1). Докажем, что морфизм $p := \big((0,1)^{\mathrm{T}}, \mathrm{id}_{C'}\big)\colon g' \to (\alpha_0, g')$, определяемый квадратом

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "(0,1)^{\mathrm{T}}"'] & C' \arrow[d, "\mathrm{id}_{C'}"] \\ C \oplus B' \arrow[r, "(\alpha_0, g')"'] & C', \end{tikzcd} \tag{2}$$

является коядром морфизма $\alpha$. Композиция $p * \alpha$ задаётся квадратом

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "(0,\alpha_1)^{\mathrm{T}}"'] & C \arrow[d, "\alpha_0"] \\ C \oplus B' \arrow[r, "(\alpha_0, g')"'] & C'. \end{tikzcd}$$

Поскольку для $h := (1,\, 0)^{\mathrm{T}}$ выполняется соотношение $(\alpha_0,\, g')h = \alpha_0$, то $p * \alpha = 0$.

Пусть $\beta * \alpha = 0$, где $\beta$ задаётся квадратом

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta_1"'] & C' \arrow[d, "\beta_0"] \\ Y \arrow[r, "t"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Существует морфизм $h$ (в $\mathcal{C}$) такой, что $th = \beta_0\alpha_0$. Тогда коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} C \oplus B' \arrow[r, "(\alpha_0, g')"] \arrow[d, "(h, \beta_1)"'] & C' \arrow[d, "\beta_0"] \\ Y \arrow[r, "t"'] & Z \end{tikzcd}$$

задаёт морфизм $\beta'$ такой, что $\beta' * p = \beta$.

Наконец, проверим, что $p$ – эпиморфизм. Пусть $\chi * p = 0$, где $\chi = (\chi_1, \chi_0)\colon (\alpha_0, g') \to s$. Тогда существует морфизм $h$, для которого $sh = \chi_0$, а это означает, что $\chi = 0$. □

**Следствие 2.** *Морфизм $\alpha\colon g \to g'$ является эпиморфизмом в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ тогда и только тогда, когда $(\alpha_0, g')$ – расщепляющийся эпиморфизм.*

**Теорема 3.** *Предположим, что в аддитивной категории $\mathcal{C}$ любой морфизм обладает ядром. Тогда $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ – абелева категория.*

**Доказательство.** а) Докажем, что любой морфизм в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ обладает ядром. Пусть $\alpha\colon g \to g'$ – морфизм, задающийся коммутативным квадратом (1). Построим следующий декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} \widetilde{B} \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}_1"'] & C \arrow[d, "\alpha_0"] \\ B' \arrow[r, "g'"] & C', \end{tikzcd} \tag{3}$$

и, пользуясь коммутативностью квадрата (1), найдём морфизм $\lambda$ такой, что

$$\widetilde{g}\lambda = g, \ \ \widetilde{\alpha}_1\lambda = \alpha_1. \tag{4}$$

Кроме того, можно подобрать ядра $f' := \ker g'\colon K' \to B'$ и $\widetilde{f} := \ker \widetilde{g}\colon K' \to \widetilde{B}$ так, что выполняется соотношение

$$\widetilde{\alpha}_1\widetilde{f} = f'. \tag{5}$$

Докажем, что морфизм $i$ (в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$), определяемый коммутативным квадратом

$$(\,i\,)\qquad \begin{array}{ccc} B\oplus K' & \xrightarrow{(\lambda,\widetilde{f})} & \widetilde{B} \\ {\scriptstyle (1,0)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{g}} \\ B & \xrightarrow[g]{} & C, \end{array} \tag{6}$$

является ядром $\alpha$. Композиция $\alpha * i$ определяется квадратом

$$\begin{array}{ccc} B\oplus K' & \xrightarrow{(\lambda,\widetilde{f})} & \widetilde{B} \\ {\scriptstyle (\alpha_1,0)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha_0\widetilde{g}} \\ B' & \xrightarrow[g']{} & C'. \end{array}$$

Так как для этого квадрата выполняется соотношение $g'\cdot\widetilde{\alpha}_1=\alpha_0\widetilde{g}$, то $\alpha * i=0$.

Пусть $\alpha*\beta=0$, где морфизм $\beta$ задан квадратом

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{t} & Z \\ {\scriptstyle \beta_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \beta_0} \\ B & \xrightarrow{g} & C. \end{array}$$

Тогда существует морфизм $h_0$, для которого $g'\cdot h_0=\alpha_0\beta_0$. Используя декартов квадрат (3), находим морфизм $\theta$, для которого выполняются соотношения $\widetilde{g}\theta=\beta_0$, $\widetilde{\alpha}_1\theta=h_0$. Пусть $s:=\ker t\colon L\to Y$. Так как $g'(\alpha_1\beta_1-h_0t)=0$, то существует морфизм $h_1$, для которого $f'h_1=\alpha_1\beta_1-h_0t$. Используя соотношения (4), (5), построим квадрат

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{t} & Z \\ {\scriptstyle (\beta_1,-h_1)^{\mathrm{T}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \theta} \\ B\oplus K' & \xrightarrow[(\lambda,\widetilde{f})]{} & C \end{array} \tag{7}$$

и докажем, что он коммутативен и потому определяет некоторый морфизм $\beta'\colon t\to(\lambda,\widetilde{f})$. Действительно, ввиду соотношений

$$\widetilde{g}(\lambda\beta_1-\widetilde{f}h_1)=\widetilde{g}(\theta t),\quad \widetilde{\alpha}_1(\lambda\beta_1-\widetilde{f}h_1)=\widetilde{\alpha}_1(\theta t)$$

из декартовости квадрата (3) следует коммутативность квадрата (7). Ясно, что $\beta = i * \beta'$.

Наконец, докажем, что $i$ – мономорфизм. Пусть $i * \chi = 0$, где $\chi$ задан квадратом

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{u} & V \\ {\scriptstyle\chi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\chi_0} \\ B \oplus K' & \xrightarrow[(\lambda, \widetilde{f})]{} & C, \end{array}$$

и потому существует морфизм $h$, для которого $g \cdot h = \widetilde{g}\chi_0$. Тогда $\widetilde{g}(\lambda h - \chi_0) = 0$, и следовательно, существует морфизм $h'$ такой, что $\lambda h - \chi_0 = \widetilde{f}h'$. Для морфизма $H := \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} : V \to B \oplus K'$ выполняется соотношение $(\lambda, \widetilde{f}) \cdot H = \chi_0$, и следовательно, $\chi = 0$.

б) Рассмотрим каноническое разложение морфизма $\alpha$, определённого коммутативным квадратом вида (1):

$$\alpha = \operatorname{im}\alpha * \overline{\alpha} * \operatorname{coim}\alpha;$$

с учётом предложения 1 мы уже знаем, что $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ – предабелева категория. Из описания коядер и ядер в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ (см. квадраты (2) и (6)) следует, что в качестве $\operatorname{coim}\alpha$ и $\operatorname{im}\alpha$ можно взять следующие квадраты:

$$\begin{array}{cccc} & B & \xrightarrow{g} & C \\ (\operatorname{coim}\alpha) & {\scriptstyle(0,1)^{\mathrm{T}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}_C} \\ & \widetilde{B} \oplus B & \xrightarrow[(\widetilde{g}, g)]{} & C, \\ & B' \oplus \widetilde{B} & \xrightarrow{\zeta} & C \oplus B' \\ (\operatorname{im}\alpha) & {\scriptstyle(1,0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\alpha_0, g')} \\ & B' & \xrightarrow[g']{} & C', \end{array}$$

где $\zeta = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{g} \\ 1 & -\widetilde{\alpha}_1 \end{pmatrix}$, и тогда можно взять $\overline{\alpha} := \left( \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_1 & \alpha_1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Докажем, что морфизм $\nu$ в категории $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, определяемый коммутативным квадратом

$$\begin{array}{ccc} B' \oplus \widetilde{B} & \xrightarrow{\zeta} & C \oplus B' \\ {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(1,0)} \\ \widetilde{B} \oplus B & \xrightarrow{(\widetilde{g},g)} & C, \end{array}$$

где $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, является обратным к $\overline{\alpha}$. Действительно, морфизмы $\nu * \overline{\alpha} - \mathrm{id}$ и $\overline{\alpha} * \nu - \mathrm{id}$ задаются квадратами

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B} \oplus B & \xrightarrow{(\widetilde{g},g)} & C \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ \widetilde{B} \oplus B & \xrightarrow[(\widetilde{g},g)]{} & C \end{array} \qquad \text{и} \qquad \begin{array}{ccc} B' \oplus \widetilde{B} & \xrightarrow{\zeta} & C \oplus B' \\ {\scriptstyle\rho_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho_0} \\ B' \oplus \widetilde{B} & \xrightarrow[\zeta]{} & C \oplus B' \end{array}$$

соответственно, где $\rho_1 := \begin{pmatrix} -1 & \widetilde{\alpha}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Сразу ясно, что $\nu * \overline{\alpha} = \mathrm{id}$. Наконец, для $H := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ выполняется соотношение $\zeta \cdot H = \rho_0$, и следовательно, $\overline{\alpha} * \nu = \mathrm{id}$. □

## 3. Заключительные замечания

**Замечание 1.** В [1] для абелевой категории $\mathcal{C}$ в качестве объектов категории $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ берутся точные последовательности вида

$$0 \to K \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

(т.е. $f = \ker g$), которые рассматриваются как комплексы, сосредоточенные в степенях 2, 1, 0 (в “гомологических” обозначениях), а морфизмы в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ – это классы гомотопической эквивалентности цепных отображений между комплексами указанного вида. Легко видеть, что для абелевой категории $\mathcal{C}$ это описание $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ совпадает с нашим. Именно поэтому в заглавии настоящей статьи мы назвали категорию $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ “гомотопической”.

**Замечание 2.** Пусть $\mathcal{C}$ – произвольная аддитивная категория. Непосредственно проверяется, что объекты вида $0 \to C$ проективны в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$; при этом категория $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ оказывается богатой проективными объектами (ср. [1, стр. 84]).

В дополнение к предыдущему замечанию докажем следующий факт.

**Предложение 4.** *Пусть $\mathcal{C}$ – аддитивная категория, в которой расщепляются все идемпотенты. Тогда любой проективный объект в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ изоморфен некоторому объекту вида $0 \to C$.*

**Доказательство.** Пусть $\mathbb{X} = X \xrightarrow{g} Y$ – проективный объект в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$. С использованием следствия 2 получаем, что следующий квадрат представляет эпиморфизм $\pi$ в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Из проективности $\mathbb{X}$ следует, что $\pi$ расщепляется, т.е. существует морфизм $i$ такой, что $\pi * i = \mathrm{id}_{\mathbb{X}}$. Пусть $i$ задаётся коммутативным квадратом

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "i_0"] \\ 0 \arrow[r] & Y. \end{tikzcd}$$

Так как $(i * \pi)^2 = i * \pi$, то $i_0^2 = i_0$. Следовательно, найдутся морфизмы $p, q$ такие, что $pq = \mathrm{id}\,, qp = i_0$. Рассмотрим морфизмы $\zeta$ и $\theta$, определяемые следующими коммутативными квадратами

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & Y \arrow[d, "p"] \\ 0 \arrow[r] & C. \end{tikzcd}$$

Легко проверяется, что $\zeta$ и $\theta$ – взаимно обратные морфизмы. □

В следующем утверждении мы упростим критерий мономорфности морфизма в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, предложенный в [1, лемма 3.1].

**Предложение 5.** *Пусть $\mathcal{C}$ – абелева категория. Морфизм $\alpha$ в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, задаваемый коммутативным квадратом* (1), *является мономорфизмом тогда и только тогда, когда* (*в обозначениях из* (3) *и* (4)) *морфизм* $(\lambda, \widetilde{f})\colon B \oplus K' \to \widetilde{B}$ *является расщепляющимся эпиморфизмом.*

**Доказательство.** Предположим, что $\alpha$ – мономорфизм, т.е. $\ker\alpha = 0$, и потому (см. квадрат (6)) существует морфизм $h$ такой, что $gh = \widetilde{g}$. Введём обозначение $f := \ker g$. Из коммутативности квадрата (1) следует, что существует морфизм $\alpha_2$ такой, что $\alpha_1 f = f'\alpha_2$. Из леммы о двух квадратах (см. [4]) следует, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} \\ K' & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{B} \end{array}$$

кодекартов, и он бидекартов, так как $f$ – мономорфизм. Отсюда вытекает точность верхней строки в следующей коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{(f,\,-\alpha_2)^{\mathrm{T}}} & B \oplus K' & \xrightarrow{(\lambda,\widetilde{f})} & \widetilde{B} & \longrightarrow & 0 \\ & & \Vert & & {\scriptstyle(1,0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\widetilde{g}} & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow[f]{} & B & \xrightarrow[g]{} & C & & \end{array} \tag{8}$$

Так как $\widetilde{g} = gh$, то верхняя строка в этой диаграмме расщепляется.

Обратно, если $(\lambda, \widetilde{f})$ – расщепляющийся эпиморфизм, то верхняя строка в диаграмме (8) расщепляется, и потому существует морфизм $h$, для которого $gh = \widetilde{g}$, т.е. $\ker\alpha = 0$. $\square$

**Замечание 3.** Предположим, что $\mathcal{C}$ – абелева категория. Включим квадрат (1), определяющий морфизм $\alpha\colon g \to g'$, в следующую коммутативную диаграмму, в которой строки точны

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{v} & V & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{-1}} & & \\ B' & \xrightarrow[g']{} & C' & \xrightarrow[v']{} & V' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

В [1] при описании мономорфизмов в $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ в число необходимых и достаточных условий включено условие, что в этой диаграмме $\alpha_{-1}$ – мономорфизм. Но ввиду предложения 5 оно оказывается излишним.

## Литература


1. E. Backelin, O. Jaramillo, *Auslander–Reiten sequences and t-structures on the homotopy category of an abelian category.* — J. Algebra, **339**, No. 1 (2011), 80–96.
2. A. A. Beilinson, J. Bernstein, J. Deligne, *Faisceaux pervers.* — Astérisque, 100 (1982).
3. С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры*, т. I, М., Наука, 1988.
4. T. H. Fay, K. A. Hardie, P. J. Hilton, *The two-square lemma*, Publ. Mat., **33**, No. 1 (1989), 133–137.



Generalov A. I. On a strange homotopy category.

For an additive category $\mathcal{C}$ in which each morphism has a kernel, it is proved that the homotopy category of the category of complexes over $\mathcal{C}$ which are concentrated in degrees 2, 1, 0 and are exact in degrees 2 and 1 is abelian. Under assumption that a category $\mathcal{C}$ is abelian, earlier this result was obtained by considering the heart of a suitable $t$-structure on the homotopy category of $\mathcal{C}$.



С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: ageneralov@gmail.com


Поступило 13 апреля 2017 г.