Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 455, 2017 г.

А. М. Водолазов, С. Ф. Лукомский

СИСТЕМЫ СДВИГОВ В ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Памяти С. А. Евдокимова посвящаем

Введение

После работы С. Козырева [1] все попытки построения ортогональных всплесков на полях p-адических чисел приводили только к Хааровским всплескам. Причина этого стала понятна после работы [2] С. Альбеверио, С. Евдокимова и М. Скопиной, которые доказали, что если система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))$ ступенчатой функции φ ортонормирована и функция φ порождает ортогональный p-адический кратномасштабный анализ (КМА), то носитель ее преобразования Фурье лежит в единичном шаре. Т.е. два условия на функцию: ортогональность системы сдвигов и масштабирующее уравнение дают в качестве решения только систему Хаара. В 2015 г. С. Евдокимов и М. Скопина [3] доказали, что для поля $\mathbb{Q}_p$ любой ортогональный вейвлет-базис в $L_2(\mathbb{Q}_p)$, который состоит из локально-постоянных (периодических) функций, является модификацией базиса Хаара. В работе [4] С. Евдокимов построил ортогональные базисы всплесков, которые состоят из нефинитных функций с финитным преобразованием Фурье. Эти базисы также ассоциированы с КМА Хаара.

После решения задач, связанных с построением p-адического КМА, возникла проблема построения КМА на кольце аделей. С. Евдокимов [5] с блеском справился с этой проблемой, построив семейство кратномасштабных анализов, и как следствие получил семейство ортонормированных базисов всплесков в $L^2(\mathbb{A})$.

В [6] было доказано, что даже и без предположения, что “φ порождает КМА” (является решением масштабирующего уравнения),

Ключевые слова: вейвлеты, сдвиги, ортонормированные системы, поля p-адических чисел, локальные поля нулевой характеристики.

Работа поддержана РФФИ, грант 16-01-00152.

класс функций φ, сдвиги которых образуют ортонормированный базис, весьма мал. Изучение таких функций представляет интерес, например, они могут оказаться полезными для построения нестационарных ортогональных базисов всплесков.

В [6] авторы построили функции φ, которые имеют большой носитель и постоянны на маленьких смежных классах с ортогональной системой сдвигов для поля $\mathbb{Q}_p$. В этой работе мы показываем, как находить такие функции для локальных полей нулевой характеристики.

§1. Основные понятия

Приведем необходимые свойства локальных полей нулевой характеристики, более подробно смотри [7]. Пусть F является конечным расширением поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ степени n. На поле F существует нормирование $\|\cdot\|$, являющееся продолжением p-адического нормирования, которое для элементов $x \in \mathbb{Q}_p$, имеющих разложение

$$x = p^t \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i,$$

где $t \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ и $a_0 \neq 0$, определяется, как $\|x\|_p = p^{-t}$. Условие продолжимости нормы означает, что для элементов $x \in \mathbb{Q}_p \subset F$ имеем $\|x\| = \|x\|_p$.

Множество

$$\mathbf{O} = \{x \in F \mid \|x\| \leqslant 1\}$$

является кольцом и называется кольцом целых чисел поля F. Кольцо $\mathbf{O}$ содержит единственный максимальный идеал, который является главным: $\mathbf{P} = \pi\mathbf{O} = \{x \in F | \ \|x\| < 1\}$. Фактор-кольцо $\mathbf{k} = \mathbf{O}/\pi\mathbf{O}$ является полем, изоморфным $\mathrm{GF}(p^s)$. Обозначим через $\mathbf{A}$ множество представителей смежных классов $\mathbf{O}/\pi\mathbf{O}$, а через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ такие представители, смежные классы которых при изоморфизме являются базисом расширения поля $\mathrm{GF}(p^s)$ над полем $\mathrm{GF}(p)$. Для любого $a_i \in \mathbf{A}$ существует единственное представление в виде $a_i = a_{i1}\varepsilon_1 + \dots + a_{is}\varepsilon_s$, где $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Каждый элемент $x \in F$ допускает единственное разложение

$$x = \pi^{\gamma}(a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots),$$

где $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbf{A}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\pi^e = p$ и $es = n$. Норма элемента $\|x\| = p^{-\gamma/e}$. Базисом расширения поля F над $\mathbb{Q}_p$ являются элементы $\varepsilon_i\pi^j$ при $i = 1, \dots, s$ и $j = 0, \dots, e-1$.

Множество $B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{F} \mid \|x - a\| \leqslant p^{\gamma/e}\}$ является π-адическим шаром. Дробной частью элемента $x \in F$ называется

$$\{x\}_F = \pi^\gamma \sum_{k=0}^{-\gamma-1} a_k \pi^k,$$

множество I_F состоит из чисто дробных чисел $x = \{x\}_F$ и $I_F(N) = I_F \cap B_N(0)$. Обозначим $D_{-N}(M)$, где $N, M \in \mathbb{N}$, множество локально постоянных функций, носитель которых содержится в $B_N(0)$ и являющихся постоянными на множествах $a + \pi^M \mathbf{O}$.

§2. Ортогональная система сдвигов

Фактор-группа $G = \pi^{-N}\mathbf{O}/\pi^M\mathbf{O}$ является конечной абелевой группой порядка $p^{s(N+M)} = q$. Пусть $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{q-1}$ – множество аддитивных характеров группы G. Они образуют ортонормированный базис в пространстве комплекснозначных функций на G.

Определим функции ψ_i на F следующим образом:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \chi_i(x), & \text{если } x \in \pi^{-N}\mathbf{O} \\ 0, & \text{если } x \notin \pi^{-N}\mathbf{O}. \end{cases}$$

Эти функции являются аддитивными на F , $\psi_i(x - y) = \psi_i(x)\overline{\psi_i(y)}$ и образуют ортогональный базис для $D_{-N}(M)$ над $\mathbb{C}$, так как

$$\int_F \psi_i(x)\overline{\psi_j(x)}dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ p^{sN}, & i = j, \end{cases}$$

и для $\varphi \in D_{-N}(M)$ имеет место разложение

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{q-1} c_i \psi_i(x).$$

Обозначим через $H_F(N) = \{h \mid h = a - b, \text{ где } a, b \in I_F(N)\}$.

Теорема 1. *Для функции $\varphi \in D_{-N}(M)$ система сдвигов $(\varphi(x-a))_{a \in I_F}$ ортонормирована тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=0}^{q-1} |c_i|^2 \psi_i(h) = \begin{cases} p^{-sN}, & \text{если } h = 0, \\ 0, & \text{если } h \neq 0 \text{ и } h \in H_F(N). \end{cases} \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть a, b из I_F, тогда

$$\langle\varphi(x-a),\varphi(x-b)\rangle = \int\limits_F \varphi(x-a)\overline{\varphi(x-b)}dx$$

$$= \int\limits_F \varphi(x-(a-b))\overline{\varphi(x)}dx = \int\limits_F \sum_{i=0}^{q-1} c_i\psi_i(x-(a-b)) \sum_{j=0}^{q-1}\overline{c_j\psi_j(x)}dx$$

$$= \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q-1} c_i\overline{c_j}\psi_i(b-a)\int\limits_F \overline{\psi}_i(x)\psi_j(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q-1} c_i\overline{c_j}\psi_i(b-a)\delta_{i,j}p^{sN} = \sum_{i=0}^{q-1}|c_i|^2\psi_i(b-a)p^{sN}.$$

Если $a=b$, то получаем первую строчку теоремы. При $b-a\notin\pi^{-N}\mathbf{O}$ все $\psi_i(a-b)=0$, и ортогональность сдвигов для таких a,b выполняется. Пусть $b-a\in\pi^{-N}\mathbf{O}$, тогда или $a,b\in I_F(N)$ или $a,b\notin I_F(N)$, но в этом случае существуют $a_1,b_1\in I_F(N)$ и $b_1-a_1=b-a\in I_F(N)$, что и доказывает теорему 1. □

Изучим более подробно множества $H_F(N)$.

Лемма 1. *Для множества $H_F(N)$ верна оценка $\sharp H_F(N)\leqslant 2^n p^{sN}-1$.*

Доказательство. Пусть вначале $F=\mathbb{Q}_p$, тогда $h=a-b\in H_F(N)$ тогда и только тогда, когда $h=a_{-N}p^{-N}+\dots+a_{-1}p^{-1}$ если $a\geqslant b$ или $h=a_{-N}p^{-N}+\dots+a_{-1}p^{-1}+\sum\limits_{i=0}^{\infty}(p-1)p^i$ если $a<b$. Учитывая случай $a=b$ получаем $\sharp H_{\mathbb{Q}_p}(N)=2p^N-1$.

Аддитивная группа поля F изоморфна прямой сумме n экземпляров поля $\mathbb{Q}_p$. Пусть $N=eq+r$, $0\leqslant r<e$. Элемент $h\in H_F(N)$ имеет разложение

$$h=a_{-N,1}\varepsilon_1\pi^{-N}+\dots+a_{-N,s}\varepsilon_s\pi^{-N}+\dots+a_{-1,1}\varepsilon_1\pi^{-1}+\dots+a_{-1,s}\varepsilon_s\pi^{-1}$$

где $a_{-i,j}\in\{0,\dots,p-1\}$ и $i\in\{-N,\dots,-1\}$, $j\in\{1,\dots,s\}$. Сгруппируем элементы $a_{-N,i}\varepsilon_i\pi^{-N},\dots,\ a_{-1,i}\varepsilon_i\pi^{-1}$ с шагом e

$$a_{-N+t,i}\varepsilon_i\pi^{-N+t}+a_{-N+t+e,i}\varepsilon_i\pi^{-N+t+e}\dots+a_{-N+t+qe,i}\varepsilon_i\pi^{-N+t+qe}$$
$$=\varepsilon_i\pi^{-N+t}(a_{-N+t,i}+a_{-N+t+e,i}p+\dots+a_{-N+t+qe,i}p^q),$$

где при $0 \leqslant t \leqslant r-1$ суммы имеют $q+1$ слагаемых и

$$\begin{aligned}
&a_{-N+t,i}\varepsilon_i\pi^{-N+t} + a_{-N+t+e,i}\varepsilon_i\pi^{-N+t+e}\dots \\
&+ a_{-N+t+(q-1)e,i}\varepsilon_i\pi^{-N+t+(q-1)e} \\
&= \varepsilon_i\pi^{-N+t}(a_{-N+t,i} + a_{-N+t+e,i}p + \dots + a_{-N+t+(q-1)e,i}p^q - 1),
\end{aligned}$$

где при $r \leqslant t \leqslant e-1$ суммы имеют q слагаемых. Применяя формулу $\sharp H_{\mathbb{Q}_p}(N) = 2p^N - 1$, оцениваем

$$\begin{aligned}
\sharp H_F(N) &\leqslant (2p^{q+1}-1)^{rs}(2p^q-1)^{(e-r)s} \\
&\leqslant (2p^{q+1})^{rs}(2p^q)^{(e-r)s} - 1 = 2^n p^{sN} - 1,
\end{aligned}$$

что и доказывает лемму. □

Теорема 2. *Пусть F – локальное поле характеристики ноль. Если $M > \frac{e}{\log_2 p}$, то множество функций $\varphi \in D_{-N}(M)$, сдвиги которых на элементы из I_F образуют ортонормированную систему в $L_2(F)$, содержит нетождественную функцию. Количество таких линейно независимых функций в пространстве $D_{-N}(M)$ не менее $p^{s(N+M)} - 2^n p^{sN} + 1$.*

Для доказательства теоремы докажем ряд вспомогательных утверждений. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases}
x_1 + \dots + x_n = n \\
\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\
\dots \\
\alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = 0,
\end{cases} \tag{2.2}$$

в которой $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, и вектор $(1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ является решением этой системы. Определим для системы (2.2) вспомогательную систему

$$\begin{cases}
\mathrm{Re}(\alpha_{11})x_1 + \dots + \mathrm{Re}(\alpha_{1n})x_n = 0 \\
\dots \\
\mathrm{Re}(\alpha_{m1})x_1 + \dots + \mathrm{Re}(\alpha_{m1})x_n = 0 \\
\mathrm{Im}(\alpha_{11})x_1 + \dots + \mathrm{Im}(\alpha_{1n})x_n = 0 \\
\dots \\
\mathrm{Im}(\alpha_{m1})x_1 + \dots + \mathrm{Im}(\alpha_{m1})x_n = 0,
\end{cases} \tag{2.3}$$

где $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ – действительная и соответственно мнимая часть комплексного числа z.

Лемма 2. *Любое решение* $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ *системы* (2.2), *у которого все координаты* $\alpha_i \geqslant 0$, *можно найти как линейную комбинацию*

$$\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}' + m(\overline{\alpha}')\overline{\alpha}_0)\frac{n}{nm(\overline{\alpha}') + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'}, \tag{2.4}$$

где константа $m(\overline{\alpha}')$ *определена равенством*

$$m(\overline{\alpha}') = \begin{cases} \min\{\alpha_i'\}, & \text{если существует } \alpha_i' < 0, \\ 0, & \text{если все } \alpha_i' \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

$\overline{\alpha}_0 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ *и* $\overline{\alpha}'$ *– произвольное решение системы* (2.3), *отличное от* $-m(\overline{\alpha}')\overline{\alpha}_0$.

Доказательство. Пусть $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – неотрицательное решение системы (2.2), т.е. $\alpha_i \geqslant 0$. Тогда при всех j

$$\alpha_{j1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{jn}\alpha_n = 0,$$

и значит

$$\mathrm{Re}(\alpha_{j1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{jn}\alpha_n) = 0, \ \mathrm{Im}(\alpha_{j1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{jn}\alpha_n) = 0.$$

Так как $\alpha_i \in \mathbb{R}$, то

$$\mathrm{Re}(\alpha_{j1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{jn}\alpha_n) = \mathrm{Re}(\alpha_{j1})\alpha_1 + \dots + \mathrm{Re}(\alpha_{jn})\alpha_n = 0,$$
$$\mathrm{Im}(\alpha_{j1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{jn}\alpha_n) = \mathrm{Im}(\alpha_{j1})\alpha_1 + \dots + \mathrm{Im}(\alpha_{jn})\alpha_n = 0.$$

Следовательно, $\overline{\alpha}$ – решение системы (2.3) и равенство (2.4) выполнено при $\overline{\alpha}' = \overline{\alpha}$. В этом случае $m(\overline{\alpha}') = 0$, так как все $\alpha_i \geqslant 0$, а $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = n$.

Пусть теперь $\overline{\alpha}'$ – произвольное решение системы (2.3). Проверим, что $\overline{\alpha}$, определенное по формуле (2.4), является решением системы (2.2) и все компоненты $\alpha_i \geqslant 0$. Последнее условие следует из определения $m(\overline{\alpha}')$. Так как $\overline{\alpha}'$ является решением системы (2.3), то $\overline{\alpha}'$ есть решение системы (2.2) без первого уравнения. Учитывая, что $\overline{\alpha}_0 = (1, 1, \dots, 1)$ есть решение системы (2.2), то $\overline{\alpha}$ является решением системы (2.2) без первого уравнения. А так как $\overline{\alpha}' \neq -m(\overline{\alpha}')\overline{\alpha}_0$, то из (2.4) следует, что $\overline{\alpha}$ удовлетворяет и первому уравнению. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Если* $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1', \dots, \overline{\alpha}_r'$ *– фундаментальная система решений системы* (2.3), *то соответствующие решения* $\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_r$ *системы* (2.2) *линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\gamma_1\overline{\alpha}_1 + \cdots + \gamma_r\overline{\alpha}_r = 0$ и существует $\gamma_j \neq 0$. Тогда

$$\gamma_1(\overline{\alpha}_1^{'} + m(\overline{\alpha}_1^{'})\overline{\alpha}_0) + \cdots + \gamma_r(\overline{\alpha}_r^{'} + m(\alpha_r^{'})\overline{\alpha}_0) = 0,$$
$$\gamma_1\overline{\alpha}_1^{'} + \cdots + \gamma_r\overline{\alpha}_r^{'} + (m(\overline{\alpha}_1^{'}) + \cdots + m(\overline{\alpha}_r^{'}))\overline{\alpha}_0) = 0,$$

и так как существует $\gamma_j \neq 0$, то это противоречит линейной независимости векторов $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1^{'}, \ldots, \overline{\alpha}_r^{'}$. □

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим систему линейных уравнений (2.1) из теоремы 1. После умножение всех уравнений на qp^{sN} эта система приводится к системе (2.2). Из свойства ортогональности характеров следует, что $\overline{\alpha}_0 = (1, \ldots, 1)$ является решением системы. Эта система имеет $p^{s(N+M)}$ неизвестных и не более $2^n p^{Ns} - 1$ уравнений. Без первого уравнения остается $2^n p^{Ns} - 2$ уравнений, но уравнения, соответствующие h и $-h$, являются комплексно сопряженными в силу свойств аддитивности функций ψ_i, а мы ищем действительные решения, поэтому можно оставить половину уравнений $2^{n-1}p^{Ns} - 1$, а вспомогательная система имеет $2^n p^{Ns} - 2$ уравнений. Следовательно, из лемм 2 и 3 получаем, что система линейных уравнений из теоремы 1 имеет не меньше $k = p^{s(N+M)} - (2^n p^{Ns} - 2) - 1$ линейно независимых решений. Ясно, что $p^{s(N+M)} - 2^n p^{Ns} = (p^{sM} - 2^n)p^{Ns} > 0$, если $p^{sM} - 2^n > 0$, т.е.$M > \frac{e}{\log_2 p}$, так как $n = se$. В случае поля $\mathbb{Q}_p$, $k > 1$ кроме случая, когда $p = 2$ и $M = 1$. □

Замечание 1. В [2] для поля $\mathbb{Q}_p$ доказано, что система из теоремы 1 имеет единственное действительное решение при условии, что не более p^N коэффициентов отлично от нуля. Это так, если функция удовлетворяет масштабирующему уравнению. Мы показываем, что если отказаться от этого условия, то появляются другие действительные решения.

Замечание 2. В случае поля $\mathbb{Q}_p$ всегда есть нетождественная функция, обладающая системой ортогональных сдвигов, исключение только при $p = 2$ и $M = 1$, что доказано в [6].

Литература

1. С. В. Козырев, *Теория всплесков как p-адический спектральный анализ.* — Изв. РАН. Сер. мат., **66**, No. 2 (2002), 149–158.

2. S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, *p-Adic multiresolution analysis and wavelet frames.* — J. Fourier Anal. Appl. **16**, No. 5 (2010), 693–714.
3. S. Evdokimov, M. Skopina, *On orthogonal p-adic wavelet bases.* — J. Math. Anal. and Appl., **424**, No. 2 (2015), 952–965.
4. S. Evdokimov, *On non-compactly supported p-adic wavelets.* — J. Math. Anal. and Appl., **443**, No. 2 (2016), 1260–1266.
5. С. Евдокимов, *Кратномасштабный анализ и базисы Хаара на кольце рациональных аделей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **400** (2012), 158–165.
6. А. М. Водолазов, С. Ф. Лукомский, *Ортогональные системы сдвигов в поле p-адических чисел.* — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. **14**, No. 3 (2016), 256–262.
7. *Алгебраическая теория чисел*, ред. Дж. Касселс, А. Фрелих. Из-во Мир (1969).

Vodolazov A. M., Lukomskii S. F. Shift systems in local fields of zero characteristic.

We consider the problem of constructing L_2 integrable functions on a local field of zero characteristic, whose shifts form an orthonormal system.

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет
Астраханская 83, Саратов, Россия
E-mail: vam21@yandex.ru

Поступило 11 апреля 2017 г.

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет
Саратов, Астраханская 83
E-mail: LukomskiiSF@info.sgu.ru