Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

А. А. Хартов

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И КОМПАКТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§1. Введение и постановка задачи

Пусть задана последовательность серий из независимых в каждой серии случайных величин:

$$X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,l_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – произвольная последовательность натуральных чисел (не обязательно стремящаяся к бесконечности), $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Рассматриваются суммы

$$S_n := \sum_{k=1}^{l_n} X_{n,k} - A_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – некоторая заданная числовая последовательность. Будем изучать вопросы о необходимых и достаточных условиях относительной и стохастической компактности последовательности распределений S_n, $n \in \mathbb{N}$, без предположения классических условий равномерной предельной малости и равномерного предельного постоянства для суммируемых величин $X_{n,k}$.

Напомним, что, следуя В. Феллеру, последовательность распределений называется *стохастически компактной*, если любая ее подпоследовательность содержит свою подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторому вероятностному распределению, не сосредоточенному в какой-либо одной точке. Таким образом, стохастически

Ключевые слова: суммы независимых случайных величин, схема серий, относительная компактность, стохастическая компактность, характеристические функции, центры случайных величин.

Работа поддержана грантом РФФИ 16-01-00258, а также частично грантом Правительства РФ (грант 074-U01), Минобрнауки РФ (Госзадание 2014/190, Проекты 14.Z50.31.0031 и 1.754.2014/K), а также грантом Президента РФ МК-5001.2015.1.

компактная последовательность – это относительно компактная последовательность, в которой все слабые частичные пределы не вырождены.

Несмотря на то, что последовательность сумм (2) является хорошо изученным объектом, общий критерий относительной компактности распределений для нее без каких-либо вспомогательных предположений был получен лишь в 1981 году Г. Зигелем в работе [2]. В этой статье используется смешанная техника: "слабое" оценивание хвостов распределений S_n и применение фактов из теории функций концентрации. В недавней работе автора [5] данный критерий сформулирован в более полной (и, как представляется, более аккуратной) форме с указанием допустимых условий на центрирующую последовательность A_n, $n \in \mathbb{N}$. При этом предложено его новое доказательство, использующее классическую технику характеристических функций. Это позволило получить ряд новых необходимых и достаточных условий относительной компактности распределений S_n, $n \in \mathbb{N}$, в терминах характеристических функций $X_{n,k}$. Также в статье [5] аналогичные результаты сформулированы и для стохастической компактности распределений S_n, $n \in \mathbb{N}$, в указанной общей постановке, которая ранее никем не рассматривалась (только частные случаи, см. [7–10]). Более подробную историю всех этих вопросов можно найти в работе [5].

Изучение поведения распределений сумм вида S_n, $n \in \mathbb{N}$, почти всегда сопровождается центрированием слагаемых $X_{n,k}$. В работах [2] и [5] в критериях относительной и стохастической компактности последовательности распределений S_n, $n \in \mathbb{N}$, в качестве центрирующих констант используются медианы и урезанные средние случайных величин $X_{n,k}$. Это позволяет увидеть полезные связи с классической теорией суммирования независимых случайных величин. Например, как указано в [5], знание необходимых и достаточных условий относительной компактности распределений S_n, $n \in \mathbb{N}$, в терминах характеристических функций $X_{n,k}$ помогает значительно сократить доказательства классических предельных теорем о сходимости распределений S_n, $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, в рамках неклассической теории суммирования (см. [1] и [11]) указанный тип центрирования не представляется удобным и фактически не используется. Дело в том, что медианы и урезанные средние не обладают свойством аддитивности для сумм независимых случайных величин. Обычные математические ожидания лишены этого недостатка, но они, как известно, не всегда существуют.

При изучении распределений сумм S_n, $n \in \mathbb{N}$, в общей (неклассической) постановке наиболее удобным считается использование так называемых *центров* случайных величин $X_{n,k}$. Напомним, что *τ-центром* случайной величины X с характеристической функцией f называется величина $\omega(\tau)/\tau$, где $\tau \neq 0$ – это произвольное число из такой окрестности нуля $\mathcal{O}$, где f ни в какой точке не обращается в нуль, $\omega(\tau)$ – это значение в точке τ *главного аргумента* ω характеристической функции f. Под *главным аргументом*, следуя А. Я. Хинчину (см. [6]), мы разумеем действительную непрерывную функцию $\omega(t)$, $t \in \mathcal{O}$, удовлетворяющую равенствам $f(t) = |f(t)|\, e^{i\omega(t)}$, $t \in \mathcal{O}$, и $\omega(0) = 0$, которыми она определяется однозначно. Известно (см. [1] и [11]), что τ-центр суммы независимых случайных величин равен сумме τ-центров этих величин, а также, что τ-центры сходящейся по распределению последовательности случайных величин, сходятся к τ-центру предельной случайной величины. В обоих свойствах τ выбирается допустимым образом, чтобы все фигурирующие там τ-центры были определены, это всегда возможно.

В настоящей статье мы получим необходимые и достаточные условия относительной и стохастической компактности последовательности распределений сумм S_n, $n \in \mathbb{N}$, в терминах характеристических функций суммируемых случайных величин $X_{n,k}$ с использованием их τ-центров. Результаты, полученные в данной статье, представляются новыми и являются обобщениями подобных утверждений для общих последовательностей случайных величин (см. [1] и [11]).

В статье помимо уже введенных используются следующие обозначения. Буквой $\mathbb{R}$ обозначается множество вещественных чисел. Если z – комплексное число, то $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ обозначают соответственно его вещественную и мнимую части.

§2. Формулировки результатов

Пусть для каждой случайной величины $X_{n,k}$ из (1) известна характеристическая функция $f_{n,k}$ с ее главным аргументом $\omega_{n,k}$. Сформулируем первый вариант критерия относительной компактности последовательности распределений S_n, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть последовательность распределений сумм S_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно компактна. Тогда найдется такое число $\gamma > 0$,* *что выполнено условие*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \min_{k=1,\ldots,l_n} \bigl|f_{n,k}(t)\bigr| > 0 \quad \textit{для любого} \quad t \in (-\gamma, \gamma), \tag{3}$$

а также соотношения

$$\lim_{t\to 0} \inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} \ln|f_{n,k}(t)| = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \Bigl|\sum_{k=1}^{l_n} \omega_{n,k}(t) - tA_n\Bigr| = 0. \tag{5}$$

Последовательность распределений сумм S_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно компактна, если для некоторого $\gamma > 0$ выполнено условие (3)*, имеет место соотношение* (4)*, и при некотором $\tau \in (-\gamma, \gamma) \setminus \{0\}$ справедливо*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Bigl|\sum_{k=1}^{l_n} \omega_{n,k}(\tau) - \tau A_n\Bigr| < \infty. \tag{6}$$

Следствие 1. *Пусть для серий* (1) *имеет место условие* (3) *при некотором $\gamma > 0$, и выполнено соотношение* (4)*. Тогда при любом $\tau \in (-\gamma, \gamma) \setminus \{0\}$ последовательность распределений сумм $\sum\limits_{k=1}^{l_n} \bigl(X_{n,k} - \omega_{n,k}(\tau)/\tau\bigr)$, $n \in \mathbb{N}$, является относительно компактной.*

Факт, сформулированный в следствии 1, имеет следующую интересную, с точки зрения характеристических функций, интерпретацию, которая объясняет большую разницу между (5) и (6).

Следствие 2. *Пусть для серий* (1) *имеет место условие* (3) *при некотором $\gamma > 0$, и выполнено соотношение* (4)*. Тогда для любого $\tau \in (-\gamma, \gamma) \setminus \{0\}$ верно*

$$\lim_{t\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \Bigl|\sum_{k=1}^{l_n} \omega_{n,k}(t) - t\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\Bigr| = 0.$$

На самом деле справедливо и более сильное утверждение.

Теорема 2. *Пусть для серий* (1) *имеет место условие* (3) *при некотором $\gamma > 0$, и выполнено соотношение* (4)*. Тогда для любого*

$\tau \in (-\gamma, \gamma) \setminus \{0\}$ *верно*

$$\lim_{t\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} \bigl|\omega_{n,k}(t) - t\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\bigr| = 0. \tag{7}$$

Теперь сформулируем альтернативные варианты критерия относительной компактности распределений сумм S_n, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *В теоремах* 1 *и* 2*, а также в следствиях* 1 *и* 2 *условие* (4) *может быть заменено следующим условием*

$$\lim_{t\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} \bigl(1 - |f_{n,k}(t)|\bigr) = 0. \tag{8}$$

Причем при выполнении этого условия супремум сумм в нем конечен для любого $t \in \mathbb{R}$.

Замечание 1. В условии (8) каждый модуль $|f_{n,k}(t)|$ можно возвести в квадрат.

Это следует из элементарных неравенств:

$$1 - |f_{n,k}(t)| \leqslant 1 - |f_{n,k}(t)|^2 \leqslant 2(1 - |f_{n,k}(t)|), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Теорема 4. *Пусть последовательность распределений сумм* S_n, $n \in \mathbb{N}$, *относительно компактна. Тогда имеет место* (3) *при некотором* $\gamma > 0$, *выполнено* (5), *а также при любом* $\tau \in (-\gamma, \gamma) \setminus \{0\}$ *справедливы следующие соотношения*

$$\lim_{t\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} \bigl|1 - f_{n,k}(t)\, e^{-it\omega_{n,k}(\tau)/\tau}\bigr| = 0, \tag{10}$$

$$\lim_{t\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} \Bigl(1 - \operatorname{Re}\bigl(f_{n,k}(t)\, e^{-it\omega_{n,k}(\tau)/\tau}\bigr)\Bigr) = 0. \tag{11}$$

Причем при выполнении (10) *и* (11) *супремумы сумм в них конечны для любого* $t \in \mathbb{R}$.

Последовательность распределений сумм S_n, $n \in \mathbb{N}$, *относительно компактна, если для некоторого* $\gamma > 0$ *выполнено условие* (3), *при некотором* $\tau \in (-\gamma, \gamma) \setminus \{0\}$ *справедливо* (6), *и* (*возможно, при другом* $\tau \in (-\gamma, \gamma) \setminus \{0\}$) *верно любое из условий* (10) *или* (11).

Теперь сформулируем варианты необходимых и достаточных условий стохастической компактности распределений S_n, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 5. *Последовательность распределений сумм S_n, $n \in \mathbb{N}$, стохастически компактна тогда и только тогда, когда она является относительно компактной, и выполнено любое из следующих соотношений при некотором $\delta > 0$ и любом $t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$:*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l_n} \ln |f_{n,k}(t)| < 0, \tag{12}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l_n} \bigl(1 - |f_{n,k}(t)|\bigr) > 0. \tag{13}$$

Замечание 2. В условии (13) каждый модуль $|f_{n,k}(t)|$ можно возвести в квадрат.

Это следует опять же из неравенств (9).

Теорема 6. *Последовательность распределений сумм S_n, $n \in \mathbb{N}$, стохастически компактна тогда и только тогда, когда она является относительно компактной, и выполнено любое из следующих соотношений при некотором $\delta > 0$, любом $t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ и некотором (любом) допустимом $\tau \neq 0$:*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l_n} \bigl|1 - f_{n,k}(t)\, e^{-it\omega_{n,k}(\tau)/\tau}\bigr| > 0, \tag{14}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l_n} \Bigl(1 - \operatorname{Re}\bigl(f_{n,k}(t)\, e^{-it\omega_{n,k}(\tau)/\tau}\bigr)\Bigr) > 0. \tag{15}$$

§3. Доказательства

При доказательстве теоремы 1 мы будем использовать следующий известный критерий относительной компактности для общих последовательностей распределений (см. [3, с. 206], а также [4, с. 857–858]):

Лемма 1. *Пусть $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность случайных величин. Пусть g_n – характеристическая функция Y_n, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность распределений Y_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно компактна тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{t\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} |1 - g_n(t)| = 0.$$

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Пусть последовательность распределений сумм S_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно компактна. Тогда по лемме 1 имеет место соотношение

$$\lim_{t\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big| 1 - e^{-itA_n} \prod_{k=1}^{l_n} f_{n,k}(t) \Big| = 0, \tag{16}$$

из которого, в свою очередь, вытекает

$$\lim_{t\to 0} \inf_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k=1}^{l_n} \big| f_{n,k}(t) \big| = 1. \tag{17}$$

В силу того, что любая характеристическая функция по модулю не превосходит единицы, при некотором $\gamma > 0$ будет справедливо (3). Тогда при любом $t \in (-\gamma, \gamma)$ определены все $\ln |f_{n,k}(t)|$, и из (17) имеем (4).

Далее докажем (5). Пусть $\omega_n(t) := \sum_{k=1}^{l_n} \omega_{n,k}(t) - tA_n$, $t \in (-\gamma, \gamma)$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\Big| 1 - e^{-itA_n} \prod_{k=1}^{l_n} f_{n,k}(t) \Big| &= \Big| 1 - e^{i\omega_n(t)} \prod_{k=1}^{l_n} |f_{n,k}(t)| \Big| \\ &= \Big| \big(1 - e^{i\omega_n(t)}\big) \prod_{k=1}^{l_n} |f_{n,k}(t)| + 1 - \prod_{k=1}^{l_n} |f_{n,k}(t)| \Big| \\ &\geqslant \big| 1 - e^{i\omega_n(t)} \big| \cdot \prod_{k=1}^{l_n} |f_{n,k}(t)| - \Big| 1 - \prod_{k=1}^{l_n} |f_{n,k}(t)| \Big|.\end{aligned}$$

Из (16) и (17) вытекает

$$\lim_{t\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \big| 1 - e^{i\omega_n(t)} \big| = 0.$$

Это означает, что $\omega_n(t) = 2\pi m_n(t) + \alpha_n(t)$, где $m_n(t) \in \mathbb{Z}$, а $\alpha_n(t) \to 0$ при $t \to 0$, равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(t) = 0$ при всех достаточно малых t. Допустим противное. В силу того, что при фиксированном n имеем $m_n(t) = 0$ при всех t из некоторой окрестности нуля, то найдутся последовательности n_j и t_j, $j \in \mathbb{N}$, такие что $m_{n_j}(t_j) \neq 0$ и $n_j \to \infty$, $t_j \to 0$, $j \to \infty$. Из $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ в силу относительной компактности распределений S_n, $n \in \mathbb{N}$, можно выделить такую подпоследовательность $(n_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, что последовательность $S_{n_{j_k}}$,

$k \in \mathbb{N}$, имеет некоторое предельное распределение с характеристической функцией f. Пусть в некоторой окрестности нуля $\mathcal{O}$ определен ее главный аргумент ω. Тогда $\beta_{n_{j_k}}(t) := \omega_{n_{j_k}}(t) - \omega(t) \to 0$, $k \to \infty$, равномерно по t из некоторого собственного подинтервала $\mathcal{O}$. Теперь запишем

$$\begin{aligned}|2\pi m_{n_{j_k}}(t_{j_k})| &\leqslant |\omega_{n_{j_k}}(t_{j_k}) - 2\pi m_{n_{j_k}}(t_{j_k})| + |\omega_{n_{j_k}}(t_{j_k})| \\ &\leqslant |\omega_{n_{j_k}}(t_{j_k}) - 2\pi m_{n_{j_k}}(t_{j_k})| + |\omega_{n_{j_k}}(t_{j_k}) - \omega(t_{j_k})| + |\omega(t_{j_k})| \\ &= |\alpha_{n_{j_k}}(t_{j_k})| + |\beta_{n_{j_k}}(t_{j_k})| + |\omega(t_{j_k})|.\end{aligned}$$

В последней сумме при $k \to \infty$ все слагаемые стремятся к нулю: первые два – в силу приведенных выше замечаний, а третье – по непрерывности ω и $\omega(0) = 0$. Мы пришли к противоречию, ведь $|m_{n_j}(t_j)| \geqslant 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$. В итоге имеем $\omega_n(t) \to 0$, при $t \to 0$ равномерно по $n \in \mathbb{N}$, т.е. справедливо (5).

Достаточность. Пусть выполнены условие (3) при некотором $\gamma > 0$, соотношение (4) и условие (6) при некотором $\tau \in (-\gamma, \gamma) \setminus \{0\}$. Из (3) и (4) вытекает (17). Оно останется в силе, если в нем каждый модуль возвести в квадрат. Тогда по лемме 1 последовательность распределений симметризованных сумм $S'_n := \sum_{k=1}^{l_n} (X_{n,k} - X'_{n,k})$, $n \in \mathbb{N}$, относительно компактна, здесь $X'_{n,k}$ – независимая копия $X_{n,k}$, при этом все $X_{n,k}$ и $X'_{n,k}$ независимы в рамках каждой серии. Это означает, что найдутся такие центрирующие константы C_n, $n \in \mathbb{N}$, что последовательность распределений $S^*_n := \sum_{k=1}^{l_n} X_{n,k} - C_n$, $n \in \mathbb{N}$, относительно компактна. Действительно, по теореме Прохорова последовательность распределений S'_n, $n \in \mathbb{N}$, плотна. Следовательно, по известному неравенству симметризации, плотна (а, значит, и относительно компактна) и последовательность распределений S^*_n, $n \in \mathbb{N}$, где каждая константа C_n есть медиана $\sum_{k=1}^{l_n} X_{n,k}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Из относительной компактности последовательности распределений S^*_n, $n \in \mathbb{N}$, вытекает, что для каждого $t \in (-\gamma, \gamma)$, в частности для $t = \tau$, любая подпоследовательность последовательности

$$\sum_{k=1}^{l_n} \omega_{n,k}(t) - t\, C_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

содержит некоторую свою сходящуюся подпоследовательность. По условию (6) это же свойство выполнено и для последовательности

$$\sum_{k=1}^{l_n} \omega_{n,k}(\tau) - \tau A_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда из представления

$$\sum_{k=1}^{l_n} X_{n,k} - A_n = \Big(\sum_{k=1}^{l_n} X_{n,k} - C_n\Big) - \Big(\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{l_n} \omega_{n,k}(\tau) - C_n\Big) + \Big(\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{l_n} \omega_{n,k}(\tau) - A_n\Big), \quad n \in \mathbb{N},$$

в силу сделанных замечаний, вытекает доказываемая относительная компактность распределений $S_n = \sum\limits_{k=1}^{l_n} X_{n,k} - A_n$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть выполнены условие (3) при некотором $\gamma > 0$ и соотношение (4). Пусть $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ – произвольная последовательность, стремящаяся к нулю. Пусть, не ограничивая общности, она вся принадлежит интервалу $(-\gamma, \gamma)$. Зафиксируем произвольное число $\tau \in (-\gamma, \gamma) \setminus \{0\}$.

Определим для всех $n \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{N}$ наборы

$$U_j(n) := \big\{k \in \{1, \dots, l_n\} : \omega_{n,k}(t_j) - t_j \omega_{n,k}(\tau)/\tau \geqslant 0\big\},$$
$$V_j(n) := \{1, \dots, l_n\} \setminus U_j(n).$$

Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{N}$ можно записать

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l_n} \big|\omega_{n,k}(t_j) - t_j\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\big| &= \sum_{k\in U_j(n)} \big(\omega_{n,k}(t_j) - t_j\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\big) \\ &\quad - \sum_{k\in V_j(n)} \big(\omega_{n,k}(t_j) - t_j\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\big) \\ &= \Big|\sum_{k\in U_j(n)} \big(\omega_{n,k}(t_j) - t_j\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\big)\Big| \\ &\quad + \Big|\sum_{k\in V_j(n)} \big(\omega_{n,k}(t_j) - t_j\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\big)\Big|.\end{aligned}$$

Следовательно, для любого $j \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{l_n}\bigl|\omega_{n,k}(t_j)-t_j\omega_{n,k}(\tau)/\tau\bigr| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\Bigl|\sum_{k\in U_j(n)}\bigl(\omega_{n,k}(t_j)-t_j\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\bigr)\Bigr| \\ +\sup_{n\in\mathbb{N}}\Bigl|\sum_{k\in V_j(n)}\bigl(\omega_{n,k}(t_j)-t_j\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\bigr)\Bigr|.\end{aligned} \qquad (18)$$

Покажем, что

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in U_j(n)}\bigl|\omega_{n,k}(t_j)-t_j\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\bigr| = 0. \qquad (19)$$

При каждом $j \in \mathbb{N}$ выберем натуральное число n_j так, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}\Bigl|\sum_{k\in U_j(n)}\bigl(\omega_{n,k}(t_j)-t_j\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\bigr)\Bigr| \\ \leqslant\Bigl|\sum_{k\in U_j(n_j)}\bigl(\omega_{n_j,k}(t_j)-t_j\,\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau\bigr)\Bigr|+1/j.\end{aligned} \qquad (20)$$

Рассмотрим последовательность распределений сумм

$$\sum_{k\in U_j(n_j)}\bigl(X_{n_j,k}-\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau\bigr), \quad j\in\mathbb{N}.$$

Она является относительно компактной. Действительно, выберем произвольную подпоследовательность с индексами $j_m \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. Если $(n_{j_m})_{m\in\mathbb{N}}$ ограничена, то какое-то натуральное число, скажем n_*, в этой последовательности встречается бесконечное число раз. Следовательно, бесконечное число раз в последовательности $U_{j_m}(n_{j_m})$, $m \in \mathbb{N}$, встречается и некоторый поднабор из $\{1,\ldots,l_{n_*}\}$ (так как количество подмножеств $\{1,\ldots,l_{n_*}\}$ конечно). Выделим в $(j_m)_{m\in\mathbb{N}}$ соответствующую подпоследовательность. Далее, ей, в свою очередь, соответствует последовательность распределений сумм одних и тех же случайных величин, т.е. выделена, в частности, сходящаяся подпоследовательность. Пусть теперь $(n_{j_m})_{m\in\mathbb{N}}$ не ограничена. Тогда из нее можно выбрать строго возрастающую подпоследовательность. Чтобы не усложнять обозначения, предположим, что сама $(n_{j_m})_{m\in\mathbb{N}}$ строго возрастает. При этом мы не умаляем общности. Рассмотрим последовательность распределений сумм $\sum\limits_{k\in U_{j_m}(n_{j_m})}\bigl(X_{n_{j_m},k}-\omega_{n_{j_m},k}(\tau)/\tau\bigr)$, $m \in \mathbb{N}$. Для нее при любом $t \in (-\gamma, \gamma)$ имеем

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} \ln|f_{n,k}(t)| \leqslant \inf_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k\in U_{j_m}(n_{j_m})} \ln|f_{n_{j_m},k}(t)| \leqslant 0.$$

Следовательно, с учетом (4) получаем

$$\lim_{t\to 0} \inf_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k\in U_{j_m}(n_{j_m})} \ln|f_{n_{j_m},k}(t)| = 0.$$

Значит, по следствию 1 последовательность распределений сумм

$$\sum_{k\in U_{j_m}(n_{j_m})} \big(X_{n_{j_m},k} - \omega_{n_{j_m},k}(\tau)/\tau\big), \quad m \in \mathbb{N},$$

относительно компактна, а значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Итак, мы доказали относительную компактность последовательности распределений сумм $\sum\limits_{k\in U_j(n_j)} \big(X_{n_j,k} - \omega_{n_j,k}(\tau)/\tau\big)$, $j \in \mathbb{N}$. По следствию 2 получаем

$$\lim_{t\to 0} \sup_{j\in\mathbb{N}} \Big| \sum_{k\in U_j(n_j)} \big(\omega_{n_j,k}(t) - t\,\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau\big)\Big| = 0,$$

и, в частности,

$$\lim_{j\to\infty} \Big| \sum_{k\in U_j(n_j)} \big(\omega_{n_j,k}(t_j) - t_j\,\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau\big)\Big| = 0.$$

Это вместе с (20) дает (19).

Совершенно аналогично доказывается соотношение

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in V_j(n)} \big|\omega_{n,k}(t_j) - t_j\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\big| = 0.$$

В итоге по неравенству (18) имеем

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{l_n} \big|\omega_{n,k}(t_j) - t_j\,\omega_{n,k}(\tau)/\tau\big| = 0.$$

В силу произвольности выбора последовательности чисел t_j, $j \in \mathbb{N}$, получаем доказываемое соотношение (7). $\square$

Доказательство теоремы 3. Соотношение (8) вытекает из (4) в силу элементарного неравенства $\ln x \leqslant x-1$, $x>0$. Отсюда, очевидно, имеем конечность супремумов сумм из (8) для всех достаточно малых $t \neq 0$. Для произвольного значения t конечность этих супремумов следует из хорошо известного неравенства $1-|g(2t)|^2 \leqslant 4(1-|g(t)|^2)$, справедливого для произвольной характеристической функции g.

Если выполнено соотношение (8), то при некотором $\gamma>0$ справедливо (3). Тогда при $t \in (-\gamma,\gamma)$ корректно определены все $\ln|f_{n,k}(t)|$, и для каждого из них выполнено неравенство

$$\begin{aligned}\ln|f_{n,k}(t)| &= -\ln|f_{n,k}(t)|^{-1} \geqslant 1-|f_{n,k}(t)|^{-1}\\ &= -\frac{1-|f_{n,k}(t)|}{|f_{n,k}(t)|} \geqslant -\frac{1-|f_{n,k}(t)|}{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\min\limits_{k=1,\dots,l_n}|f_{n,k}(t)|}.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом выполнения условия (8) вытекает соотношение (4). □

В доказательстве теоремы 4 мы восмользуемся следующей простой леммой.

Лемма 2. *Для любой характеристической функции g справедливо следующее неравенство:*

$$|1-g(2t)| \leqslant 8\,|1-g(t)|, \qquad t\in\mathbb{R}. \tag{21}$$

Доказательство леммы 2. Для любого $t\in\mathbb{R}$ верно

$$|1-g(2t)| \leqslant \bigl(1-\operatorname{Re}g(2t)\bigr)+|\operatorname{Im}g(2t)|. \tag{22}$$

Используя известное неравенство, оценим первое слагаемое

$$1-\operatorname{Re}g(2t) \leqslant 4(1-\operatorname{Re}g(t)) \leqslant 4|1-g(t)|.$$

Оценим второе слагаемое в (22). Пусть характеристической функции g соответствует функция распределения G. Тогда для $\operatorname{Im}g(2t)$ имеем представление

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im} g(2t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(2tx)\, dG(x) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2\sin(tx)\cos(tx)\, dG(x) \\
&= 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\, dG(x) - 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\,(1-\cos(tx))\, dG(x),
\end{aligned}
$$

из которого получаем

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Im} g(2t)| &\leqslant 2\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\, dG(x)\right| + 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(1-\cos(tx)\big)\, dG(x) \\
&= 2|\operatorname{Im} g(t)| + 2(1-\operatorname{Re} g(t)) \\
&\leqslant 4|1-g(t)|.
\end{aligned}
$$

Соединяя полученные оценки в неравенстве (22), получаем (21). □

Доказательство теоремы 4. *Необходимость.* Пусть последовательность распределений сумм S_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно компактна. Из теоремы 1 имеем выполнение условия (3) при некотором $\gamma > 0$, а также соотношения (5). Произвольно зафиксируем $\tau \in (-\gamma, \gamma) \setminus \{0\}$. Достаточно проверить только соотношение (10), поскольку (11), как легко видеть, из него вытекает. При всех возможных n и k имеем неравенства

$$
\begin{aligned}
\big|1 - f_{n,k}(t)e^{-it\omega_{n,k}(\tau)/\tau}\big| &\leqslant 1 - |f_{n,k}(t)| + |f_{n,k}(t)| \cdot \big|1 - e^{i\omega_{n,k}(t) - it\omega_{n,k}(\tau)/\tau}\big| \\
&\leqslant 1 - |f_{n,k}(t)| + \big|\omega_{n,k}(t) - t\omega_{n,k}(\tau)/\tau\big|.
\end{aligned}
$$

Далее, используя теоремы 2 и 3, приходим к (10).

Из доказанных соотношений (10) и (11) вытекает, что супремумы сумм в них конечны для каждого $t \neq 0$ из некоторой окрестности нуля. С произвольным $t \in \mathbb{R}$ это утверждение для (10) вытекает из неравенства (21) леммы 2, а для (11) – из известного неравенства $1 - \operatorname{Re} g(2t) \leqslant 4(1 - \operatorname{Re} g(t))$, справедливого для произвольной характеристической функции g.

Достаточность. Из выполнения одного из условий (10) или (11) в любом случае следует справедливость (8). Вместе с остальными данными условиями (3) и (6) по теореме 3 это дает доказываемую относительную компактность. □

Доказательство теоремы 5. С условием (13) утверждение теоремы доказано в статье [5]. Для условия (12) справедливость теоремы вытекает уже из (13) и ранее полученных неравенств (см. доказательство теоремы 3):

$$-\frac{1-|f_{n,k}(t)|}{\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\ \min\limits_{k=1,\dots,l_n}|f_{n,k}(t)|} \leqslant \ln|f_{n,k}(t)| \leqslant -\big(1-|f_{n,k}(t)|\big),$$

которые в силу относительной компактности (см. (3)) будут справедливы в некоторой окрестности нуля. □

Доказательство теоремы 6. *Необходимость.* Если последовательность распределений сумм S_n, $n\in\mathbb{N}$, стохастически компактна, то она, очевидно, и относительно компактна. Значит, по теореме 1 найдется некоторая окрестность нуля $(-\gamma,\gamma)$, $\gamma>0$, в которой определены все $\omega_{n,k}$. Выберем произвольно $\tau\in(-\gamma,\gamma)\setminus\{0\}$. Для любых n и k справедливы элементарные неравенства

$$\begin{aligned} 1-|f_{n,k}(t)| &\leqslant 1-\operatorname{Re}\big(f_{n,k}(t)e^{-it\omega_{n,k}(\tau)/\tau}\big)\\ &\leqslant \big|1-f_{n,k}(t)e^{-it\omega_{n,k}(\tau)/\tau}\big|, \quad t\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{23}$$

из которых с учетом теоремы 5 вытекает (14) и (15) для любого $t\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$ с некоторым $\delta>0$.

Достаточность. Пусть теперь последовательность распределений сумм S_n, $n\in\mathbb{N}$, относительно компактна и выполнено (14) при всех $t\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$ с некоторым $\delta>0$ и при некотором $\tau\neq 0$ из какой-то окрестности нуля $(-\gamma,\gamma)$, $\gamma>0$, где определены все $\omega_{n,k}$. От противного предположим, что указанная последовательность не является стохастически компактной. Это означает, что найдется такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$, что распределения S_{n_j}, $j\in\mathbb{N}$, слабо сходятся к некоторому вырожденному закону. Тогда при любом $t\in\mathbb{R}$ будем иметь

$$\lim_{j\to\infty}\prod_{k=1}^{l_{n_j}}|f_{n_j,k}(t)| = 1. \tag{24}$$

равномерно по t на любом конечном интервале. Отсюда, в частности, вытекает, что суммы $\sum_{k=1}^{l_{n_j}} \ln|f_{n_j,k}(t)|$ стремятся к 0 при $j \to \infty$, равномерно по t, например, из некоторого отрезка $[-\gamma_1, \gamma_1]$, где $\gamma_1 > 0$ и $|\tau| \leqslant \gamma_1 < \gamma$. С помощью неравенства $\ln x \leqslant x - 1$, $x > 0$, получаем, что

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{l_{n_j}} \bigl(1 - |f_{n_j,k}(t)|\bigr) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad t \in [-\gamma_1, \gamma_1]. \tag{25}$$

Также из (24) вытекает, что для любой фиксированной последовательности наборов $\Delta_j \subset \{1, \ldots, l_{n_j}\}$, $j \in \mathbb{N}$, выполнено

$$\lim_{j\to\infty} \prod_{k\in\Delta_j} |f_{n_j,k}(t)| = 1$$

равномерно по t на любом конечном интервале. Это, в свою очередь, означает, что при некоторых C_j, $j \in \mathbb{N}$, суммы $\sum_{k\in\Delta_j} X_{n_j,k} - C_j$, $j \in \mathbb{N}$, по распределению сходятся к нулю. Тогда, в частности, имеем

$$\sum_{k\in\Delta_j} \omega_{n_j,k}(t) - t\,C_j \to 0, \quad j \to \infty,$$

равномерно по $t \in [-\gamma_1, \gamma_1]$. Отсюда, учитывая, что $|\tau| \leqslant \gamma_1$, несложно вывести:

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k\in\Delta_j} \bigl(\omega_{n_j,k}(t) - t\,\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau\bigr) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad t \in [-\gamma_1, \gamma_1]. \tag{26}$$

Теперь произвольно зафиксируем сходящуюся к нулю последовательность чисел $t_m \in [-\gamma_1, \gamma_1] \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$. В силу (25) имеем

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{l_{n_j}} \bigl(1 - |f_{n_j,k}(t_m)|\bigr) = 0 \quad \text{при каждом} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Покажем, что и

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{l_{n_j}} \bigl|\omega_{n_j,k}(t_m) - t_m\,\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau\bigr| = 0 \quad \text{при каждом} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Определим при $m \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{N}$ наборы

$$\begin{aligned}
\Delta_{j,+}^{(m)} &:= \bigl\{k \in \{1, \ldots, l_{n_j}\} : \omega_{n_j,k}(t_m) - t_m\,\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau \geqslant 0\bigr\},\\
\Delta_{j,-}^{(m)} &:= \{1, \ldots, l_{n_j}\} \setminus \Delta_{j,+}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Тогда, представляя

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{l_{n_j}} \bigl|\omega_{n_j,k}(t_m) - t_m\,\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau\bigr| = \sum_{k\in\Delta_{j,+}^{(m)}} &\bigl(\omega_{n_j,k}(t_m) - t_m\,\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau\bigr)\\
- \sum_{k\in\Delta_{j,-}^{(m)}} &\bigl(\omega_{n_j,k}(t_m) - t_m\,\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau\bigr),
\end{aligned}$$

с помощью (26) получим (28).

Далее оценим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{l_{n_j}} \bigl|1 - f_{n_j,k}(t_m) e^{-it_m\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau}\bigr|\\
&\quad\leqslant \sum_{k=1}^{l_{n_j}} \Bigl(1 - |f_{n_j,k}(t_m)| + |f_{n_j,k}(t_m)| \cdot \bigl|1 - e^{i\omega_{n_j,k}(t_m) - it_m\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau}\bigr|\Bigr)\\
&\quad\leqslant \sum_{k=1}^{l_{n_j}} \bigl(1 - |f_{n_j,k}(t_m)|\bigr) + \sum_{k=1}^{l_{n_j}} \bigl|\omega_{n_j,k}(t_m) - t_m\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau\bigr|.
\end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (27) и (28) получаем

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{l_{n_j}} \bigl|1 - f_{n_j,k}(t_m) e^{-it_m\omega_{n_j,k}(\tau)/\tau}\bigr| = 0 \quad \text{при каждом} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Это противоречит выполнению условия (14), поскольку $t_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Итак, достаточность условия (14) (конечно, вместе с относительной компактностью) доказана. Ясно, что ввиду (23) имеем и достаточность условия (15). □

Литература

1. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, Наука, М., 1986.

2. Г. Зигель, *Компактность последовательности сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве.* — Литов. матем. сб. **21**, No. 4 (1981), 123–136.
3. М. Лоэв, *Теория вероятностей*, Изд.-во ИЛ, М., 1962.
4. Д. А. Райков, *О положительно определенных функциях.* — ДАН СССР **26** (1940), 857–862.
5. А. А. Хартов, *Критерии относительной и стохастической компактности распределений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен., представлена в печать.
6. А. Я. Хинчин, *Предельные законы для сумм независимых случайных величин*, ОНТИ, М.-Л., 1938.
7. W. Feller, *On regular variation and local limit theorems.* — Proc. V Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. **2**, part 1 (1967), 373–388.
8. P. Hall, *Order of magnitude of the concentration function.* — Proc. AMS **89** (1983), 141–144.
9. R. A. Maller, *Relative stability, characteristic functions and stochastic compactness.* — J. Austral. Math. Soc., Ser. A **28** (1979), 499–509.
10. R. A. Maller, *Some properties of stochastic compactness.* — J. Austral. Math. Soc., Ser. A **30** (1981), 264–277.
11. V. M. Zolotarev, *Modern Theory of Summation of Random Variables*, VSP, Utrecht, 1997.

Khartov A. A. Characteristic functions and compactness for distributions of sums of independent random variables.

Sequences of distributions of centered sums of independent random variables are considered within a series scheme without supposing classical conditions of uniform asymptotic negligibility and uniform asymptotic constancy. We obtained necessary and sufficient conditions of relative and stochastic compactness for these sequences in terms of characteristic functions of the summed random variables with using their τ-centers.

С.-Петербургский Государственный Университет,
Университетская наб. д. 7/9,
199034, С.-Петербург;
С.-Петербургский Национальный
Исследовательский Университет
Информационных Технологий, Механики и Оптики
(Университет ИТМО)
Кронверкский пр. 49,
197101, С.-Петербург, Россия
E-mail: alexeykhartov@gmail.com

Поступило 9 ноября 2016 г.