Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

Б. П. Харламов

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ОТ ДИФФУЗИОННОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Введение. Мы рассматривается непрерывный полумарковский процесс диффузионного типа $X(t)$ $(t \geqslant 0)$. Из определения ([3, с. 78]) следует, что этот класс процессов включает в себя класс диффузионных марковских процессов, но в данной статье мы нигде не используем собственно марковское свойство процесса. Нам достаточно того, что рассматриваемые процессы имеют в качестве моментов марковской регенерации моменты первого выхода из открытых множеств. В связи с этим мы применяем к исследованию интеграла $J(t)$ от процесса $X(t)$ полумарковский метод. При этом методе не требуется пользоваться марковским свойством относительно фиксированных (неслучайных) моментов времени. В том числе – использовать аппарат дифференциальных уравнений с частными производными. В нашем случае дифференциальные уравнения возникают для преобразований Лапласа от так называемых полумарковских переходных функций процесса $X(t)$.

Постановка задачи. Рассмотрим измеримое пространство элементарных событий $\mathcal{C}$, где любое $\xi \in \mathcal{C}$ представляет собой непрерывную вещественную функцию на интервале $[0, \infty)$. Пусть $\mathcal{F}$ – борелевская сигма-алгебра подмножеств множества $\mathcal{C}$ относительно метрики равномерной сходимости на конечных интервалах. Вероятностная мера P на этой сигма-алгебре интерпретируется как распределение некоторого случайного процесса. Пусть $x \in \mathbb{R}$ и P_x – мера множества всех $\xi \in \mathcal{C}$, для которых $\xi(0) = x$. Семейство мер (P_x) $(x \in \Delta_c)$ я называю распределением случайного процесса, заданного с точностью до начального состояния. При любом множестве $S \in \mathcal{F}$ вероятности $(P_x(S))$ можно интерпретировать как значения некоторой функции, заданной на интервале $\mathbb{R}$. Ниже мы рассматриваем полумарковские переходные функции. В работе [3] доказано, что для любой начальной точки

Ключевые слова: диффузионный марковский процесс, диффузионный полумарковский процесс, марковский момент, процесс интегралов от диффузионного полумарковского процесса.

существует вероятностная мера на множестве всех траекторий, начинающихся с этой точки, порождённая согласованной системой таких полумарковских переходных функций (см. [3, с. 151]). В этом случае семейство мер (P_x) наследует свойство измеримости по аргументу x (относительно борелевской сигма-алгебры $\mathcal{B}$ подмножеств множества $\mathbb{R}$) от семейства полумарковских переходных функций. И обратно, если семейство (P_x) измеримо относительно x, то каждая из полумарковских переходных функций измерима относительно соответствующего аргумента x (начальная точка перехода). Отсюда следует, что для любой $\mathcal{F}$-измеримой функции $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ суперпозиция $P_\phi(S)$ также является $\mathcal{F}$-измеримой функцией.

Это свойство важно для определения полумарковского семейства мер (P_x). В дальнейшем мы называем марковской регенерацией процесса относительно момента времени τ, если в этот момент времени выполняется марковский принцип "независимость будущего от прошлого при фиксированном настоящем". Это, в частности, может быть фиксированный (неслучайный) момент времени (как для марковских процессов). Для полумарковских процессов – это момент первого выхода из любого открытого множества, а также некоторые комбинации таких моментов.

Точное определение этого свойства опирается на неубывающее семейство сигма-алгебр $(\mathcal{F}_t)$, называемое фильтрацией, на определение марковского момента τ относительно фильтрации и на определение так называемой сигма-алгебры событий, предшествующих данному марковскому моменту $\mathcal{F}_\tau$ (см., например, [1, с. 142]).

Особый интерес представляют для нас моменты первого выхода σ_Δ, где Δ – открытый интервал вида (a, b) $(-\infty < a < b < \infty)$, где $\sigma_\Delta(\xi) = \inf\{t \geqslant 0 : \xi(t) \notin \Delta\}$, которые являются марковскими моментами относительно так называемой естественной фильтрации. В терминах этих марковских моментов определяется распределение (P_x) полумарковского процесса, заданное с точностью до начального состояния. Условием согласования мер из данного семейства является условие

$$(\forall x)\,(\forall \Delta) \quad P_x(\theta_{\sigma_\Delta}^{-1} S,\, A \cap \{\sigma_\Delta < \infty\}) = E_x(P_{X(\sigma_\Delta)}(S);\, A \cap \{\sigma_\Delta < \infty\}), \tag{1}$$

где $S \in \mathcal{F}$, $A \in \mathcal{F}_{\sigma_\Delta}$, отображение $\theta_t : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ – оператор сдвига, определяемый равенством $(\forall \xi)$, $(\forall s)$ $X_s(\theta_t(\xi)) = X_{s+t}(\xi)$, $\theta_\tau^{-1} S = \{\xi : \theta_\tau(\xi) \in S\}$.

Это условие согласования в терминах математических ожиданий имеет вид

$$(\forall x)\,(\forall \Delta) \quad E_x((f_1 \circ \theta_{\sigma_\Delta}) \cdot f_2;\, \sigma_\Delta < \infty) = E_x(E_{X(\sigma_\Delta)}(f_1) \cdot f_2;\, \sigma_\Delta < \infty), \tag{2}$$

где f_1 – $\mathcal{F}$-измеримая функция и f_2 – $\mathcal{F}_{\sigma_\Delta}$-измеримая функция.

Условие марковости для непрерывного полумарковского процесса выполняется для любого момента первого выхода из открытого множества, то есть любой такой момент является моментом марковской регенерации для семейства мер (P_x). Согласно этому определению, любой строго марковский процесс является частным случаем полумарковского процесса.

Заметим, что слово “непрерывный” относится не к характеру траекторий, а только к методу их исследования и к противопоставлению данного определения традиционному определению ступенчатых полумарковских процессов. К тому же в данной статье рассматриваются полумарковские процессы диффузионного типа, для которых траектории действительно непрерывны.

Диффузионный полумарковский процесс. Определение диффузионного полумарковского процесса проще всего давать в терминах преобразования Лапласа от моментов первого выхода. Пусть $X(t)$ $(t \geqslant 0)$ – непрерывный полумарковский процесс с согласованным семейством мер (P_x) $(x \in \mathbb{R})$. Для $\Delta = (\alpha, \beta)$ и $\lambda > 0$ определим

$$g_\Delta(\lambda \,|\, x) = E_x(e^{-\lambda\sigma_\Delta};\, \sigma_\Delta < \infty,\, X(\sigma_\Delta) = \alpha),$$

$$h_\Delta(\lambda \,|\, x) = E_x(e^{-\lambda\sigma_\Delta};\, \sigma_\Delta < \infty,\, X(\sigma_\Delta) = \beta).$$

Пусть $\Delta_1{=}(u, v)$, $\Delta_2 = (a, b)$ и $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Очевидно, что

$$\sigma_{\Delta_2} = \sigma_{\Delta_1} + \sigma_{\Delta_2} \circ \theta_{\sigma_{\Delta_1}}.$$

Согласно (1), справедливо

$$g_{\Delta_2}(\lambda \,|\, x) = g_{\Delta_1}(\lambda \,|\, x) g_{\Delta_2}(\lambda, u) + h_{\Delta_1}(\lambda \,|\, x) g_{\Delta_2}(\lambda, v), \tag{3}$$

$$h_{\Delta_2}(\lambda \,|\, x) = g_{\Delta_1}(\lambda \,|\, x) h_{\Delta_2}(\lambda, u) + h_{\Delta_1}(\lambda \,|\, x) h_{\Delta_2}(\lambda, v). \tag{4}$$

Для любого $r > 0$ будем использовать сокращённое обозначение для момента первого выхода из r-окрестности начальной точки траектории

$$\nu_r(\xi) \equiv \sigma_{(x-r,\, x+r)}(\xi),$$

где $x = \xi(0)$, а также

$$g_r(\lambda \,|\, x) \equiv g_{(x-r,x+r)}(\lambda \,|\, x), \qquad h_r(\lambda \,|\, x) \equiv h_{(x-r,x+r)}(\lambda \,|\, x).$$

Непрерывный полумарковский процесс называется диффузионным в окрестности точки x, если существуют функции $A(x)$ и $B(\lambda \,|\, x)$ такие, что

$$g_r(\lambda \,|\, x) = \frac{1}{2}(1 - A(x)r - B(\lambda \,|\, x)r^2) + o(r^2), \tag{5}$$

$$h_r(\lambda \,|\, x) = \frac{1}{2}(1 + A(x)r - B(\lambda \,|\, x)r^2) + o(r^2) \tag{6}$$

при $r \to 0$. Предполагается, что $A(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки x, $B(\lambda \,|\, x)$ положительна, непрерывна по второму аргументу в окрестности точки x, не убывает и имеет вполне монотонную частную производную по первому аргументу. Примерами таких функций являются

$$B(\lambda \,|\, x) = B_0(x)\lambda, \qquad B(\lambda \,|\, x) = B_0(x)\ln(1 + \lambda)$$

и другие. Если условие диффузионности выполняется для любой точки открытого интервала (a, b) при некоторых допустимых функциях $A(x)$, $B(\lambda \,|\, x)$ $(x \in (a, b), \lambda \geqslant 0)$, то дважды дифференцируемые на этом интервале функции $g_{(a,b)}(\lambda \,|\, x)$, $h_{(a,b)}(\lambda \,|\, x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению [3] (см. приложение 1)

$$\frac{1}{2}f'' + A(x)f' - B(\lambda \,|\, x)f = 0, \tag{7}$$

с краевыми значениями

$$g_{(a,b)}(\lambda \,|\, a) = h_{(a,b)}(\lambda \,|\, b) = 1, \quad g_{(a,b)}(\lambda \,|\, b) = h_{(a,b)}(\lambda \,|\, a) = 0.$$

и, следовательно, при любом $\lambda \geqslant 0$ составляют фундаментальную систему решений этого уравнения.

Мы будем предполагать, что $B(0 \,|\, x) = 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Из этого условия следует (см., например, [5]), что с P_x-вероятностью 1 происходит выход траектории из любого интервала (a, b), где $a < x < b$. В дальнейшем для сокращения записи такие события, как $\{X(\sigma_{(a,b)}) = a\}$, $\{X(\sigma_{(a,b)}) = b\}$ мы будем писать, подразумевая, что одновременно выполняется событие $\{\sigma_{(a,b)} < \infty\}$.

Интеграл от диффузионного полумарковского процесса. Обозначим сумму "со сдвигом" для двух $\mathcal{F}$-измеримых неотрицательных функций τ_1 и τ_2 на $\mathcal{C}$ (возможно принимающих бесконечное значение) как

$$\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}$$

на множестве $\{\tau_1 < \infty\}$, а также $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \infty$ на множестве $\{\tau_1 = \infty\}$. Операция $\dot{+}$ обладает ассоциативностью, но не коммутативна. Как отмечено выше, для любого интервала (c, d) такого, что $(c, d) \subset (a, b)$, выполняется свойство $\sigma_{(a,b)} = \sigma_{(c,d)} \dot{+} \sigma_{(a,b)}$. Для суммы $\tau_1 \dot{+} \tau_2$ справедливы соотношения (см., например, [3], с. 43):

$$\theta_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} = \theta_{\tau_2} \circ \theta_{\tau_1}, \quad X_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} = X_{\tau_2} \circ \theta_{\tau_1}$$

на множестве $\{\tau_1 \dot{+} \tau_2 < \infty\}$. Под обозначениями θ_τ, X_τ понимаются функции со значениями $(\forall \xi)$ $\theta_{\tau(\xi)}(\xi)$, $X_{\tau(\xi)}(\xi)$ на множестве $\{\tau < \infty\}$.

Случайная функция $\widetilde{V}(s, t)$, заданная на множестве $\{(s, t) : s \in \{t > s \geqslant 0\}$ называется аддитивным функционалом от процесса, если для любых $s < t < u$ почти наверное $\widetilde{V}(s, s) = 0$ и

$$\widetilde{V}(s, u) = \widetilde{V}(s, t) + \widetilde{V}(t, u).$$

Аддитивный функционал называется однородным во времени, если почти наверное $\widetilde{V}(s, t) = \widetilde{V}(0, t - s) \circ \theta_s$. Обозначив $\widetilde{V}(0, t) = V_t$, выводим соотношение

$$\begin{aligned} V_{t+u} \circ \theta_s &= \widetilde{V}(s,\, s + t + u) = \widetilde{V}(s,\, s + t) + \widetilde{V}(s + t,\, s + t + u) \\ &= V_t \circ \theta_s + V_u \circ \theta_{s+t} = (V_t + V_u \circ \theta_t) \circ \theta_s, \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\theta_s^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{C}$, получаем основное соотношение для однородных аддитивных функционалов

$$V_{t+u} = V_t + V_u \circ \theta_t. \tag{8}$$

Тривиальным примером аддитивного функционала является само "время" $t \equiv t(\xi)$. Соотношение (8) может быть обобщено для случайных неотрицательных функций τ на множестве $\{\tau < \infty\}$, если определить $(\forall \xi)\, V_\tau(\xi) = V_{\tau(\xi)}(\xi)$. Покажем, что для однородных аддитивных функционалов справедливо представление

$$V_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} = V_{\tau_1} + V_{\tau_2} \circ \theta_{\tau_1} \tag{9}$$

на множестве $\{\tau_1 \dot{+} \tau_2 < \infty\}$. Полагая $(\forall \xi)\, V_\tau(\xi) = V_{\tau(\xi)}(\xi)$, действительно получаем

$$V_{\tau_1 \dot{+} \tau_2}(\xi) = V_{\tau_1(\xi) + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}(\xi)}(\xi) = V_{\tau_1}(\xi) + V_{\tau_2(\theta_{\tau_1}(\xi))}(\theta_{\tau_1}(\xi))$$
$$= V_{\tau_1}(\xi) + V_{\tau_2}((\theta_{\tau_1 \xi})(\xi)).$$

Пусть $X(t)$ – однородный диффузионный полумарковский процесс. Обозначим $J(t) = \int\limits_0^t X(s)\, ds$. Интеграл от процесса – это пример аддитивного функционала, однородность которого следует из однородности во времени исходного процесса $X(t)$ и из соотношений:

$$J(s+t) = \int\limits_0^{s+t} X(u)\, du = \int\limits_0^s X(u)\, du + \int\limits_s^{s+t} X(u)\, du$$
$$= \int\limits_0^s X(u)\, du + \int\limits_0^t (X(u) \circ \theta_s)\, du.$$

Обозначим

$$J^+(t) = \int\limits_0^t X^+(s)\, ds, \qquad J^-(t) = \int\limits_0^t X^-(s)\, ds,$$

где $(\forall s)$

$$X^+(s) = \max\{X(s), 0\}, \qquad X^-(s) = \min\{X(s), 0\}.$$

Ясно, что

$$J(t) = J^+(t) + J^-(t).$$

При фиксированном $x \in (a, b) \equiv \Delta$ нас интересует совместное P_x-распределение σ_Δ и J_{σ_Δ}, которое может быть найдено из совместного распределения трёх неотрицательных случайных величин σ_Δ, $J^+(\sigma_\Delta)$ и $-J^-(\sigma_\Delta)$. Это совместное распределение может быть найдено путём обращения трёхмерного преобразования Лапласа ($\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$)

$$E_x \exp(-\alpha\sigma_\Delta - \lambda J^+(\sigma_\Delta) - \mu(-J^-(\sigma_\Delta)).$$

В дальнейшем предполагаем, что исследуемый нами однородный положительный аддитивный функционал имеет вид

$$V(t) \equiv \alpha t + \lambda J^+(t) - \mu J^-(t).$$

Пусть $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset \Delta$. Для разбиения аддитивного функционала случайными точками используем тождество $\sigma_\Delta = \nu_\epsilon \dot{+} \sigma_\Delta$, из которого следует, что на множестве $\{\sigma_\Delta < \infty\}$

$$V(\sigma_\Delta) = V(\nu_\epsilon) + V(\sigma_\Delta) \circ \theta_{\nu_\epsilon}. \tag{10}$$

В следующей теореме предполагается, что $X(t)$ – диффузионный полумарковский процесс, производящие функции которого $f_1(x) \equiv g_\Delta(\lambda \,|\, x)$ и $f_2(x) \equiv h_\Delta(\lambda \,|\, x)$ дважды дифференцируемы по x и удовлетворяют уравнению (7) с граничными значениями

$$f_1(a+) = f_2(b-) = 1, \qquad f_1(b-) = f_2(a+) = 0.$$

Теорема 1. *При любых $\alpha > 0, \lambda > 0, \mu > 0$ на интервале $\Delta = (a, b)$, где $a < x < b$, дважды дифференцируемые по x функции*

$$f_3(x) \equiv E_x(\exp(-V(\sigma_\Delta));\ X_{\sigma_\Delta} = a),$$

$$f_4(x) \equiv E_x(\exp(-V(\sigma_\Delta));\ X_{\sigma_\Delta} = b)$$

удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{2} f'' + A(x) f' - B(\gamma(x) \,|\, x) f = 0 \tag{11}$$

с граничными значениями

$$f_3(a+) = f_4(b-) = 1, \qquad f_3(b-) = f_4(a+) = 0,$$

где $\gamma(x) \equiv \alpha + \lambda x\, I(x > 0) - \mu x\, I(x < 0)$ (непрерывная кусочно-линейная функция).

Доказательство. Рассмотрим два случая:
1) Пусть $x > \epsilon > 0$. Тогда P_x-почти наверное справедливо

$$(\alpha + \lambda(x-\epsilon))\nu_\epsilon \leqslant V(\nu_\epsilon) \leqslant (\alpha + \lambda(x+\epsilon))\nu_\epsilon,$$

$$\exp(-(\alpha + \lambda(x+\epsilon))\nu_\epsilon) \leqslant \exp(-V(\nu_\epsilon)) \leqslant \exp(-(\alpha + \lambda(x-\epsilon))\nu_\epsilon).$$

2) Пусть $x < -\epsilon < 0$. Тогда P_x-почти наверное справедливо

$$(\alpha - \mu(x+\epsilon))\nu_\epsilon \leqslant V(\nu_\epsilon) \leqslant (\alpha - \mu(x-\epsilon))\nu_\epsilon,$$

$$\exp(-(\alpha - \mu(x-\epsilon))\nu_\epsilon) \leqslant \exp(-V(\nu_\epsilon)) \leqslant \exp(-(\alpha - \mu(x+\epsilon))\nu_\epsilon).$$

Рассмотрим первый случай. Обозначим $\lambda_1 = \alpha + \lambda(x-\epsilon)$, $\lambda_2 = \alpha + \lambda(x+\epsilon)$ и $\widetilde{\lambda} = \alpha + \lambda x$. Функции $g_\Delta(\lambda_1, x)$, $h_\Delta(\lambda_1, x)$, $g_\Delta(\lambda_2, x)$, $h_\Delta(\lambda_2, x)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (7) с соответствующими

краевыми значениями, в котором аргумент преобразования Лапласа λ заменён на λ_1 и λ_2 соответственно. При $\Delta = (a, b)$ обозначим

$$G_\Delta(V, x) \equiv E_x(\exp(-V(\sigma_\Delta)); X(\sigma_\Delta) = a),$$

$$H_\Delta(V, x) \equiv E_x(\exp(-V(\sigma_\Delta)); X(\sigma_\Delta) = b),$$

заменяя нижний индекс на ϵ, если $\Delta = (\xi(0) - \epsilon,\ \xi(0) + \epsilon)$ Из приведённых выше неравенств следует

$$g_\epsilon(\lambda_2, x) \leqslant G_\epsilon(V, x) \leqslant g_\epsilon(\lambda_1, x).$$

Из определения диффузионного процесса (5) с учетом замечания 1 (из которого следует, что асимптотическое разложение до второго порядка включительно не зависит от того, зависит ли коэффициент $B(x)$ от ϵ или не зависит), получаем двойное неравенство

$$\frac{1}{2}(1 - A(x)\epsilon - B(\lambda_2 \,|\, x)\epsilon^2 + o(\epsilon^2)) \leqslant G_\epsilon(V, x)$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(1 - A(x)\epsilon - B(\lambda_1 \,|\, x)\epsilon^2 + o(\epsilon^2).$$

Отсюда, учитывая фактическую зависимость λ_1 и λ_2 от ϵ, сходимость при $\epsilon \to 0$ аргументов λ_1 и λ_2 к $\widetilde{\lambda}$ и непрерывность функции $B(\lambda \,|\, x)$ по первому аргументу, получаем, что функции $B(\lambda_i \,|\, x)$ $(i = 1, 2)$ в предыдущем двойном неравенстве имеют вид $B(\widetilde{\lambda} \,|\, x) + o(1)$ $(\epsilon \to 0)$. Следовательно,

$$G_\epsilon(V, x) = \frac{1}{2}(1 - A(x)\epsilon - B(\widetilde{\lambda} \,|\, x)\epsilon^2) + o(\epsilon^2)$$

равномерно по x в некоторой окрестности точки x.

Аналогично доказывается формула

$$H_\epsilon(V, x) = \frac{1}{2}(1 + A(x_0)\epsilon - B(\widetilde{\lambda} \,|\, x_0)\epsilon^2) + o(\epsilon^2).$$

Тем же способом доказываются асимптотики при $x_0 < 0$

$$G_\epsilon(V, x) = \frac{1}{2}(1 - A(x_0)\epsilon - B(\overline{\lambda} \,|\, x_0)\epsilon^2 + o(\epsilon^2))$$

$$H_\epsilon(V, x) = \frac{1}{2}(1 + A(x_0)\epsilon - B(\overline{\lambda} \,|\, x_0)\epsilon^2 + o(\epsilon^2))$$

где $\overline{\lambda} = \alpha - \mu x_0$.

Доказательство асимптотического представления для точки $x = 0$ проводим по той же схеме.

Полагаем $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Имеем очевидные неравенства

$$-\epsilon\nu_\epsilon \leqslant 0 \leqslant J^+(\nu_\epsilon) \leqslant \epsilon\nu_\epsilon,$$

$$-\epsilon\nu_\epsilon \leqslant J^-(\nu_\epsilon) \leqslant 0 \leqslant \epsilon\nu_\epsilon.$$

Отсюда получаем

$$\nu_\epsilon(\alpha - \epsilon(\lambda+\mu)) \leqslant V(\nu_\epsilon) \equiv \alpha\nu_\epsilon + \lambda J^+(\nu_\epsilon) - \mu J^-(\nu_\epsilon) \leqslant \nu_\epsilon(\alpha + \epsilon(\lambda+\mu)).$$

Обозначим $\lambda_1 \equiv \alpha - \epsilon(\lambda+\mu)$, $\quad \lambda_2 \equiv \alpha + \epsilon(\lambda+\mu)$. $\quad$ Следовательно

$$g_\epsilon(\lambda_2, 0) \leqslant E_0(\exp(-V(\nu_\epsilon);\ X(\nu_\epsilon) = -\epsilon)) \leqslant g_\epsilon(\lambda_1, 0).$$

В соответствии с замечанием 1, а также ввиду непрерывности функции $B(\lambda \,|\, x)$ по первому аргументу, асимптотики первого и последнего члена этого двойного неравенства имеют вид

$$1/2(1 - A(0)\epsilon - B(\lambda_1 \,|\, 0)\epsilon^2) + o(\epsilon^2) = 1/2(1 - A(0)\epsilon - B(\alpha \,|\, 0)\epsilon^2) + o(\epsilon^2).$$

$$1/2(1 - A(0)\epsilon - B(\lambda_2 \,|\, 0)\epsilon^2) + o(\epsilon^2) = 1/2(1 - A(0)\epsilon - B(\alpha \,|\, 0)\epsilon^2) + o(\epsilon^2).$$

Доказательство асимптотики для $E_0(\exp(-V(\nu_\epsilon));\ X(\nu_\epsilon) = \epsilon)$ аналогично.

Чтобы применить теорему 3 приложения 1 нам нужно доказать что для функций $G_\Delta(V,x)$, $H_\Delta(V,x)$ выполняется система из двух разностных уравнений. Это вытекает из свойства аддитивности функционала V. Имеем при $\Delta_1 \equiv (c,d) \subset \Delta_2 \equiv (a,b)$ и $x \in \Delta_1$

$$G_{\Delta_2}(V,x) \equiv E_x(\exp(-V(\sigma_{\Delta_2}));\ X(\sigma_{\Delta_2}) = a)$$

$$= E_x(\exp(-V(\sigma_{\Delta_1} \dot{+} \sigma_{\Delta_2}));\ X(\sigma_{\Delta_1} \dot{+} \sigma_{\Delta_2}) = a)$$

$$= E_x(\exp(-V(\sigma_{\Delta_1}) - V(\sigma_{\Delta_2}) \circ \theta_{\sigma_{\Delta_1}});\ X(\sigma_{\Delta_2}) \circ \theta_{\sigma_{\Delta_1}} = a)$$

$$= E_x(\exp(-V(\sigma_{\Delta_1}))\, E_{X(\sigma_{\Delta_1})}(\exp(-V(\sigma_{\Delta_2});\ X(\sigma_{\Delta_2}) = a))$$

$$= E_x(\exp(-V(\sigma_{\Delta_1});\ X(\sigma_{\Delta_1}) = c)\, E_c(\exp(-V(\sigma_{\Delta_2});\ X(\sigma_{\Delta_2}) = a))$$

$$+ E_x(\exp(-V(\sigma_{\Delta_1});\ X(\sigma_{\Delta_1}) = d)\, E_d(\exp(-V(\sigma_{\Delta_2});\ X(\sigma_{\Delta_2}) = a))$$

$$= G_{\Delta_1}(V,x) G_{\Delta_2}(V,c) + H_{\Delta_1}(V,x) G_{\Delta_2}(V,d).$$

Второе уравнение системы двух разностных уравнений доказывается аналогично. Применяя теорему 3 получаем искомое дифференциальное уравнение относительно V. $\square$

При известном решении уравнения (11), применяемого к неотрицательному аддитивному функционалу $V(t) = \alpha t + \lambda J^+(t) + \mu(-J^-(t))$, с помощью частного дифференцирования этого решения по каждому из параметров α, λ, μ с последующим выполнением условия $\alpha = 0, \lambda = 0$, $\mu = 0$, получаем моменты любого порядка случайных величин σ_Δ, $J^+(\sigma_\Delta)$, $J^-(\sigma_\Delta)$, а также любые смешанные моменты относительно соответствующей меры.

§1. Приложение

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{2} f''_\Delta(\lambda, x) + A(x) f'_\Delta(\lambda, x) - B(\lambda \,|\, x) f_\Delta(\lambda, x) = 0, \tag{12}$$

где A – непрерывно дифференцируемая функция. При любом $\lambda \geqslant 0$ $B(\lambda \,|\, \cdot)$ – неотрицательная непрерывная по x функция, а при любом x $B(\cdot \,|\, x)$ – любая функция от λ, у которой при любом x производная по λ является вполне монотонной функцией от λ. Решения задачи Дирихле $g_\Delta(\lambda, x)$, $h_\Delta(\lambda, x)$ для этого уравнения на интервале Δ с соответствующими граничными условиями являются производящими функциями некоторого диффузионного полумарковского процесса. Например, при

$$B(\lambda \,|\, x) = \log(1 + \lambda) \frac{1}{b(x)},$$

где $b(x)$ – колмогоровский коэффициент локальной дисперсии, эти решения задачи Дирихле соответствуют диффузионному марковский процессу, преобразованному случайной заменой времени с помощью независимого гамма-процесса (диффузионный полумарковский процесс, не являющийся марковским). Более того, доказано, что диффузионный полумарковский процесс является марковским тогда (см., например, [4]) и только тогда (см. [3, с. 115]), когда $B(\lambda, x)$ – линейная функция от λ.

Пусть $A(x)$ и $B(\lambda \,|\, x)$ не зависят от x. Обозначим их A и $B(\lambda)$ соответственно. В этом случае уравнение (2) имеет решения явного вида

$$g_\Delta(\lambda, x) = \exp(-A(x - a)) \frac{\operatorname{sh}\left((b - x)\sqrt{A^2 + 2B(\lambda)}\right)}{\operatorname{sh}\left((b - a)\sqrt{A^2 + 2B(\lambda)}\right)},$$

$$h_\Delta(\lambda, x) = \exp(A(b - x)) \frac{\operatorname{sh}\left((x - a)\sqrt{A^2 + 2B(\lambda)}\right)}{\operatorname{sh}\left((b - a)\sqrt{A^2 + 2B(\lambda)}\right)}.$$

Если x – середина интервала Δ длиной $2r$, то эти формулы выглядят ещё проще

$$g_r(\lambda, x) \equiv g_\Delta(\lambda, x) = \frac{\exp(-Ar)}{2\,\mathrm{ch}(r\sqrt{A^2 + 2B(\lambda)})},$$

$$h_r(\lambda, x) \equiv h_\Delta(\lambda, x) = \frac{\exp(Ar)}{2\,\mathrm{ch}(r\sqrt{A^2 + 2B(\lambda)}}.$$

Очевидно, что в этом случае функции $g_r(\lambda, x)$ и $h_r(\lambda, x)$ также не зависят x. В точке $r = 0$ существуют производные по r любого порядка от этих функций. В частности,

$$(g_r(\lambda, x))'_r = -A/2, \qquad (g_r(\lambda, x))''_{r^2} = -B(\lambda),$$

$$(h_r(\lambda, x))'_r = A/2, \qquad (h_r(\lambda, x))''_{r^2} = -B(\lambda),$$

откуда вытекают формулы Тейлора

$$g_r(\lambda, x) \equiv g_r(\lambda, 0) = \frac{1}{2}(1 - A\,r - B(\lambda)\,r^2) + o(r^2), \tag{13}$$

$$h_r(\lambda, x) \equiv h_r(\lambda, 0) = \frac{1}{2}(1 + A\,r - B(\lambda)\,r^2) + o(r^2). \tag{14}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{2}f''_\Delta(x) + A(x)f'_\Delta(x) - B(x)f_\Delta(x) = 0, \tag{15}$$

где A – непрерывно дифференцируемая, и B – непрерывная неотрицательная функция в некоторой окрестности Δ точки x_0. Таким образом, на данном этапе задача об асимптотике решений задачи Дирихле не относится к теории вероятностей.

Пусть $g_\Delta(x)$, $h_\Delta(x)$ – решения задачи Дирихле на интервале Δ для уравнения (15), где при $\Delta = (a, b)$ выполняются краевые условия

$$g_\Delta(b) = h_\Delta(a) = 1, \qquad g_\Delta(a) = h_\Delta(b) = 0.$$

В книге [3, с. 170] приведено следствие из теоремы 0.1, обобщающее известную асимптотику для уравнения с постоянными коэффициентами на случай переменных коэффициентов. Вот эта теорема.

Теорема 2. *Если в уравнении* (15) *функции* A' *и* B *непрерывны и ограничены в некоторой окрестности* (a, b) *точки* x, *тогда при* $a \to$

x и $b \to x$ справедливы асимптотики

$$\begin{aligned} g_\Delta(x) = {} & \frac{b-x}{b-a} - A(x)\frac{(b-x)(x-a)}{b-a} \\ & - \frac{1}{3}\,B(x)\frac{(b-x)(x-a)(2b-a-x)}{b-a} \\ & - \frac{1}{3}\,(A^2(x)+A'(x))\frac{(b-x)(x-a)(a+b-2x)}{b-a} + o((b-a)^2), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} h_\Delta(x) = {} & \frac{x-a}{b-a} + A(x)\frac{(b-x)(x-a)}{b-a} \\ & - \frac{1}{3}\,B(x)\frac{(b-x)(x-a)(b-2a+x)}{b-a} \\ & + \frac{1}{3}\,(A^2(x)+A'(x))\frac{(b-x)(x-a)(a+b-2x)}{b-a} + o((b-a)^2) \end{aligned} \tag{17}$$

равномерно по $x \in \Delta$.

Доказательство. Известно (см. Соболев [2, с. 296]), что с помощью обобщённой функции Грина решение задачи Дирихле для уравнения $y'' = q(x)$ на интервале (a,b) при условиях $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$ получается в виде

$$\begin{aligned} y(x) = {} & y_1\frac{b-x}{b-a} - \frac{b-x}{b-a}\int\limits_a^x q(t)(t-a)\,dt \\ & + y_2\frac{x-a}{b-a} - \frac{x-a}{b-a}\int\limits_x^b q(t)(b-t)\,dt. \end{aligned} \tag{18}$$

Представим уравнение (15) в виде $f'' = -2A\,f' + 2B\,f$. Подставляя $q \equiv -2Af' + 2Bf$ в предыдущее выражение и используя интегрирование по частям, получаем для уравнения (15) формальное решение, которое

является интегральным уравнением относительно f:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & y_1 \frac{b-x}{b-a} + y_2 \frac{x-a}{b-a} \\ & - 2\,\frac{b-x}{b-a} \int\limits_a^x f(t)\,(A(t) + (B(t) + A'(t))\,(t-a))\,dt \\ & - 2\,\frac{b-x}{b-a} \int\limits_x^b f(t)\,(-A(t) + (B(t) + A'(t))\,(b-t))\,dt \end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим интегральное уравнение для функции $h_\Delta(x)$. Благодаря ограниченности подынтегрального выражения разложение нулевого порядка функции $h_\Delta(x)$ имеет вид

$$h_\Delta(x) = \frac{x-a}{b-a} + o(1) \tag{20}$$

равномерно в любой достаточно малой окрестности точки x, где асимптотика определяется при условии $a \to x$ и $b \to x$. Чтобы найти разложение первого порядка, подставим нулевое представление функции $h_\Delta(x)$ в правую часть уравнения (18). После элементарных (но громоздких) преобразований этого выражения мы получаем асимптотику вида

$$h_\Delta(x) = \frac{x-a}{b-a} + A(x)\,\frac{(b-x)(x-a)}{b-a} + o(b-a) \tag{21}$$

равномерно в любой достаточно малой окрестности точки x. Чтобы получить второй коэффициент асимптотики второго порядка, достаточно подставить это представление в правую часть уравнения (18). После элементарных (но ещё более громоздких) преобразований этого выражения мы получаем

$$\begin{aligned} h_\Delta(x) = {} & \frac{x-a}{b-a} + A(x)\frac{(b-x)(x-a)}{b-a} \\ & - \frac{1}{3}\,B(x)\frac{(b-x)(x-a)(b-2a+x)}{b-a} \\ & + \frac{1}{3}\,(A^2(x) + A'(x))\frac{(b-x)(x-a)(a+b-2x)}{b-a} + o((b-a)^2) \end{aligned} \tag{22}$$

равномерно по $x \in \Delta$.

Аналогично выводится асимптотическое разложение для g_Δ, которое отличается знаком при коэффициенте $A(x)$. $\square$

В предыдущей теореме не предполагается существование пределов отношений $\dfrac{b-x}{b-a}$ и $\dfrac{x-a}{b-a}$. Если же эти пределы существуют, например $x-a=r$ и $b-x=r \quad (r\to 0)$, то полученные формулы приводят к разложениям по степеням параметра r.

Следствие 1. *Пусть последовательность окрестностей симметрична относительно точки x. Тогда при условиях теоремы 2 справедливы разложения*

$$g_r(x) = 1/2(1 - A(x)\,r - B(x)\,r^2) + o(r^2), \tag{23}$$

$$h_r(x) = 1/2(1 + A(x)\,r - B(x)\,r^2) + o(r^2) \tag{24}$$

равномерно по $x \in G_0$, где

$$g_r(x) \equiv g_{(x-r,\,x+r)}(x), \quad h_r(x) \equiv h_{(x-r,\,x+r)}(x).$$

Замечание 1. Утверждение теоремы 2 останется верным, если допустить, что коэффициент B кроме зависимости от x зависит также от длины $b-a \equiv 2r$ интервала $\Delta \equiv (a,b)$, т.е. имеет вид $B(r,x)$. Если существует у этой функции предел $B(0,x)$ при $r\to 0$, то асимптотики (23) и (24) могут быть уточнены

$$g_r(x) = 1/2(1 - A(x)\,r - B(0,x)\,r^2) + o(r^2), \tag{25}$$

$$h_r(x) = 1/2(1 + A(x)\,r - B(0,x)\,r^2) + o(r^2) \tag{26}$$

Рассмотрим семейство вещественных неотрицательных функций $(g_\Delta,\, h_\Delta)$, зависящих от параметров Δ, которые принадлежат множеству всех открытых интервалов в $\mathbb{R}$.

Теорема 3. *Пусть для любых $a<c<d<b$ и интервалов $\Delta_1=(c,d)$, $\Delta_2=(a,b)$ функции g_{Δ_2} и h_{Δ_2} дважды дифференцируемы, имеют соответствующие граничные значения, и семейство этих функций удовлетворяет системе разностных уравнений: при любом $x\in\Delta_1$*

$$g_{\Delta_2}(x) = g_{\Delta_1}(x)g_{\Delta_2}(c) + h_{\Delta_1}(x)g_{\Delta_2}(d),$$

$$h_{\Delta_2}(x) = g_{\Delta_1}(x)h_{\Delta_2}(c) + h_{\Delta_1}(x)h_{\Delta_2}(d).$$

Пусть, кроме того, для любого x в некоторой области S выполняются асимптотики при $r\to 0$

$$g_r(x) = \frac{1}{2}\,(1 - A(x)\,r - B(x)\,r^2) + o(r^2),$$

$$h_r(x) = \frac{1}{2}\,(1 + A(x)\,r - B(x)\,r^2) + o(r^2),$$

где A и B – непрерывные и ограниченные функции в области S. Тогда для любого интервала $\Delta \subset S$ функции g_{Δ_2}, h_{Δ_2} удовлетворяют на этом интервале дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}\,f'' + A(x)f' - B(x)f = 0 \tag{27}$$

с соответствующими граничными значениями.

Доказательство. Далее $\Delta \equiv \Delta_2$. Имеем

$$g_\Delta(x) = g_r(x)g_\Delta(x-r) + h_r(x)g_\Delta(x+r).$$

Подставляя множители, для которых справедливы асимптотические разложения, получаем

$$\begin{aligned} g_\Delta(x) &= \left(\frac{1}{2}\,(1 - A(x)\,r - B(x)\,r^2) + o(r^2)\right) g_\Delta(x-r) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\,(1 + A(x)\,r - B(x)\,r^2) + o(r^2)\right) g_\Delta(x+r) \\ &= \frac{1}{2}\,g_\Delta(x-r) + \frac{1}{2}\,g_\Delta(x+r) + A(x)\,r(g_\Delta(x+r) - g_\Delta(x-r)) \\ &\quad - B(x)\,r^2(g_\Delta(x+r) + g_\Delta(x-r)) + o(r^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение в конечных разностях

$$\frac{1}{2}\,(g_\Delta(x-r) - 2\,g_\Delta(x) + g_\Delta(x+r)) + A(x)\,r(g_\Delta(x+r) - g_\Delta(x-r))$$

$$-B(x)\,r^2(g_\Delta(x+r) + g_\Delta(x-r)) + o(r^2) = 0.$$

Разделив полученное уравнение на r^2 и переходя к пределу, мы получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\,g''_\Delta + A(x)g'_\Delta - B(x)g_\Delta = 0.$$

Очевидно, что уравнение

$$\frac{1}{2}\,h''_\Delta + A(x)h'_\Delta - B(x)h_\Delta = 0$$

мы получаем этим же способом. □

Замечание 2. Система двух разностных уравнений в условии теоремы 3 может быть получена следующим образом. Для каждого интервала Δ рассмотрим два фундаментальных решения уравнения (27) g_Δ и h_Δ (решения задачи Дирихле с соответствующими граничными условиями). Тогда для любых интервалов Δ_1, Δ_2, где $\Delta_1 \subset \Delta_2$, выполняется приведённая в условии теоремы 3 система разностных уравнений. Это означает (с учётом теоремы 2), что условия теоремы 3 необходимы и достаточны для того, чтобы g_Δ и h_Δ удовлетворяли уравнению (27). Вывод системы разностных уравнений можно найти в книге [3] на с. 165, обобщение этого результата для многомерного случая – там же, с. 198.

Литература

1. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы.* ФМ, М., 1963.
2. С. Л. Соболев, *Уравнения математической физики.* Гостехиздат, М., 1954.
3. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы.* Наука, СПб., 2001.
4. Б. П. Харламов, *О марковском диффузионном процессе с замедленным отражением на границе отрезка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 231–255.
5. Б. П. Харламов, *Финальное распределение диффузионного процесса: полумарковский подход.* Теория вероятн. и ее примен. **60**, No. 3 (2015), 506–524.

Harlamov B. P. On integral of a semi-Markov diffusion process.

A semi-Markov diffusion process $(X(t))$ $(t \geqslant 0)$ is considered. The process $(J(t))$ $(t \geqslant 0)$ equals to integral of the process $(X(t))$ on interval $[0, T)$ is studied. The relation between one-dimensional differential equation of the second order of elliptical type and asymptotics of a solution of Dirichlet problem on an interval with length tending to zero is derived. This relation is used for deriving a differential equation Laplace transform for the semi-Markov generating function of the process $(J(t))$.

Институт Проблем Машиноведения РАН,
Большой пр. ВО, д. 61
С.Петербург, Россия

E-mail: b.p.harlamov@gmail.com
boris.harlamov@yandex.ru

Поступило 10 октября 2016 г.