Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

В. Н. Солев

АДАПТИВНАЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИИ, НАБЛЮДАЕМОЙ НА ФОНЕ ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ШУМА

§1. Введение

Пусть $x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями с нулевым средним, $\mathbf{E}\, x(t) = 0$, (см. подробнее в $[1,2]$) и спектральной плотностью f,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u))}{1+u^2}\, du < \infty. \tag{1}$$

На протяжении всей работы нас будут интересовать случайные величины вида

$$x\,[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, dx(t),$$

определенные, например, для линейного множества S функций φ, удовлетворяющих условию

$$\varphi \in L^2, \quad |\widehat{\varphi}(u)|^2 \leqslant \frac{C(\varphi)}{1+u^2}, \text{ где } \widehat{\varphi}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\varphi(t)\, dt. \tag{2}$$

При этом

$$\mathbf{E}x\,[\psi]\,\overline{x\,[\varphi]} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(u)\,\overline{\widehat{\psi}(u)}\, f(u)\, du. \tag{3}$$

Теперь перейдем к описанию статистической задачи. Предположим, что на растущем отрезке $[-T, T]$ наблюдается гауссовсий процесс $y(t)$,

$$dy(t) = s(t)\, dt + dx(t), \quad t \in [-T, T]. \tag{4}$$

Ключевые слова: псевдопериодическая функция, непараметрическая оценка, процесс со стационарными приращениями.

Работа поддержана грантами РФФИ 14-01-00856, НШ-2504.2014.1. и программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Здесь $s(t)$ – неизвестная функция, лежащая в заданном выпуклом, центрально-симметричном подмножестве $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$ локально квадратично суммируемх функций s, таких что

$$\|s\|_{\mathscr{L}}^2 = \sup_x \int\limits_x^{x+1} |s\,(t)|^2 \; dt < \infty; \tag{5}$$

$x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями, нулевым средним и спектральной плотностью f. Точнее, наблюдению доступны случайные величины

$$y[\varphi] = s[\varphi] + x[\varphi], \quad \varphi \in \mathscr{D}(T) = \{\varphi : \ \varphi \in S \ \operatorname{supp} \varphi \subset [-T, T]\}. \tag{6}$$

Здесь

$$y[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, dy(t), \quad s[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\, \overline{\varphi(t)}\, dt,$$

Стандартный прием заключается в переходе от модели (6) к дискретной модели

$$Y_u = \theta_u + X_u, \quad u \in \Lambda, \tag{7}$$

где $Y_u = y\big[g_u^T\big]$, $\theta_u = s\big[g_u^T\big]$, $X_u = x\big[g_u^T\big]$, при подходящем выборе счетного множества Λ и системы функций $\{g_u^T,\ u \in \Lambda\}$ из $\mathscr{D}(T)$. При этом задача состоит в оценивании неизвестного вектора $\theta = (\theta_u,\ u \in \Lambda)$, лежащего в образе Θ подмножества $\mathscr{L}_*$ при отображении $s \to \theta$. Эта задача подробно исследована (см., например, [4, 9]) в случае, когда $\{X_u,\ u \in \Lambda\}$ – независимые гауссовские величины, а Θ – выпуклое, центрально–симметричное подмножество пространства l_2. Возможность перехода к зависимым величинам $\{X_u,\ u \in \Lambda\}$ дается следующей леммой, принадлежащей С. В. Решетову.

Положим $\|\theta\| = \sum\limits_{u \in \Lambda} |\theta_u|^2$, $\sigma_u^2 = \mathbf{E}|X_u|^2$, $\sigma = \big(\sigma_u^2,\ u \in \Lambda\big)$. Для оценки $\widehat{\theta}$ со значениями из Θ, построенной по наблюдениям (6) обозначим

$$R_\sigma\big(\widehat{\theta}; \Theta\big) = \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}\big\|\theta - \widehat{\theta}\big\|^2, \quad R_\sigma(\Theta) = \inf_{\widehat{\theta}} R\big(\widehat{\theta}; \Theta\big).$$

Лемма 1.1. *Пусть $(X_u,\ u \in \Lambda)$ – гауссовский вектор с нулевым средним, Θ – выпуклое центрально-симметричное подмножество l_2. Предположим также, что существует такая константа $c > 0$, что* *для любого конечного набора* $\{a(v),\, v \in \Lambda\}$

$$\mathbf{E}\,|X_u - \sum_{v \neq u} a(v) X_v|^2 \geqslant c\,\mathbf{E}|X_u|^2. \tag{8}$$

Тогда найдется такая константы $C_1(c) > 0$, *зависящиая только от* c, *что для любого вектора* $(\tau_u,\, u \in \Lambda) \in \Theta$

$$C_1(c) \sum_{u \in \Lambda} \tau_u^2 \wedge \sigma_u^2 \leqslant R_\sigma(\Theta) \tag{9}$$

Пусть $\widehat{s}_T$ – оценка неизвестной функции s, построенная по наблюдениям (6), $\widehat{s}_T \in \mathscr{L}_*$. Риск от использования оценки $\widehat{s}_T$ будем измерять величиной

$$\mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*) = \sup_{s \in \mathscr{L}_*} \mathbf{E}_{s,f}\, \|\widehat{s}_T - s\|^2_{\mathscr{L}}\,. \tag{10}$$

Обозначим $\mathscr{R}_T$ – минимаксный риск,

$$\mathscr{R}_T(\mathscr{L}_*) = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T)\,. \tag{11}$$

Задача состоит в поиске адаптивной оценки $\widehat{s}_T$, имеющей тот же порядок малости при $T \to \infty$, что и минимаксный риск,

$$\mathscr{R}_T \leqslant \mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T) \leqslant C\,\mathscr{R}_T. \tag{12}$$

§2. Псевдо–периодические функции

Выпуклое центрально-симметричнot подмножество $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$, в котором лежат подлежащие оцениванию функции s, мы будем выбирать из класса Степанова. Именно, пусть $\mathscr{L}(\Lambda)$ – веденный Степановым (см. [5]) класс псевдо–периодических функций s,

$$s(t) = \sum_{u \in \Lambda} a(u)\, e^{iut}, \quad \sum_{u \in \Lambda} |a(u)|^2 < \infty, \tag{13}$$

где Λ – не более чем счетное множество, удовлетворяющее условию отделимости

$$\tau = \tau\,(\Lambda) = \inf_{u,v \in \Lambda,\, u \neq v} |u - v| > 0. \tag{14}$$

В [5] установлено, что при условии (14) ряд в (13) сходится в $\mathscr{L}$.

Множество Λ, удовлетворяющее (14), будем называть τ–отделимым. Наряду с банаховой нормой, определенной в (5), будем также рассматривать гильбертовы нормы

$$\|s\|_* := \Big\{ \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 \Big\}^{1/2} < \infty, \quad \text{и} \quad \|s\|_{T} := \Big\{ \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |s(t)|^2\, dt \Big\}^{1/2},$$

и использовать обозначение L^2_T для L^2-пространства на отрезке $[-T, T]$, построенного по нормированной мере Лебега, со скалярным произведением

$$(s_1, s_2)_T := \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} s_1(t)\, \overline{s_2(t)}\, dt.$$

Н. Винер и Р. Пэли доказали в [6], что при условии (14) найдутся такие положительные константы $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(\tau)$, $C_1 = C_1(\tau)$, $C_1 = C_1(\tau)$, $T_0 = T_0(\tau)$, зависящие только от τ, что

$$c_1 \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant \|s\|_* \leqslant C_1 \|s\|_{\mathscr{L}}, \quad s \in \mathscr{L}(\Lambda), \quad s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}, \tag{15}$$

и при $T \geqslant T_0 = T_0(\tau)$

$$c_2 \|s\|_T \leqslant \|s\|_* \leqslant C_2 \|s\|_T, \quad s \in \mathscr{L}(\Lambda), \quad s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}. \tag{16}$$

В частности, найдутся такие положительные константы $c = c(\tau)$, $C = C(\tau)$, зависящие только от τ, что при $T \geqslant T_0$,

$$c \|s\|_T \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C \|s\|_T, \quad s \in \mathscr{L}(\Lambda). \tag{17}$$

Множество Λ будем называть спектральным множеством функций из класса $\mathscr{L}(\Lambda)$. Пусть $\varphi_u(t) = e^{iut}$. Из сказанного выше следует (подробнее см. в [6]), что при условии (14) система $\{\varphi_u(t),\ u \in \Lambda\}$ является базисом Рисса в $\mathscr{L}(\Lambda)$ (точнее в сужении $\mathscr{L}(\Lambda)$ на L^2_T) в метрике гильбертова пространства L^2_T с нормой $\|\cdot\|_T$. Стало быть, в $\mathscr{L}(\Lambda)$ существует сопряженная (в метрике гильбертова пространств с нормой $\|\cdot\|_T$) система $\{\psi_u^T,\ u \in \Lambda\}$, такая что

$$\big(\varphi_u, \psi_v^T\big)_T = \delta_{u,v}, \quad \text{где } \delta_{u,v} \text{ – символ Кронекера.} \tag{18}$$

При этом

$$s = \sum_{u\in\Lambda} \big(s, \psi_u^T\big)_T\, \varphi_u \quad s \in \mathscr{L}(\Lambda). \tag{19}$$

В дальнейшем мы будем называть сопряженной любую (не обязательно лежащую в $\mathscr{L}(\Lambda)$) систему локально квадратично суммируемых функций $\{g_u^T,\ u \in \Lambda\}$, удовлетворяющую (18).

Заметим, что, если $\tau(\Lambda) > 0$, при $T > T_0(\tau)$ оператор умножения на индикаторную функцию $\mathbf{1}_{[-T,T]}(t)$ является ограниченным и ограниченно обратимым оператором из $\mathscr{L}(\Lambda)$ (рассматриваемого как подпространство банахова пространства $\mathscr{L}$) в подпространство пространства L_T^2, определенного соотношением $\mathscr{L}_T(\Lambda) = \mathbf{1}_{[-T,T]}\mathscr{L}(\Lambda)$. В дальнейшем нам удобно будет считать, что функции из L_T^2 равны нулю вне отрезка $[-T,T]$. Мы будем предполагать, что $\sharp\{\Lambda\} = \infty$.

§3. Построение сопряженной системы

В этом пункте и далее мы будем использовать обозначение

$$\varphi_u(T;t) = \mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\,\varphi_u(t) = \mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\,e^{iut}.$$

Напомним также, что по принятому ранее соглашению функции из L_T^2 равны нулю вне отрезка $[-T,T]$. Пусть $\{\psi_u^r,\ u \in \Lambda\}$ – система из $\mathscr{L}_T(\Lambda)$, сопряженная (в метрике пространства L_T^2) к системе

$$\{\varphi_u(r;\,\cdot\,),\, u \in \Lambda\},$$

а потому

$$\widehat{\psi}_u^r(v) = \int\limits_{-r}^{r} \psi_u^r(x)\,e^{-ivx}\,dx = 2r\,\delta_{u,v}, \quad u,v \in \Lambda.$$

При $T, r > T_0(\tau)$ обозначим

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\,\varphi_u(T;s)\,ds. \tag{20}$$

Прежде всего отметим, что $g \in L_{T+r}^2$, в частности, $g(t) = 0$, если $|t| > T + r$. Далее,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\overline{\varphi_v(T+r;t)}\,dt = \iint\limits_{|t|\leqslant T+r,|s|\leqslant T} \psi_u^r(t-s)\,e^{i(u-v)s}\,e^{-iv(t-s)}\,ds\,dt.$$

Так как функция $\psi_u^r(t-s)$ в двойном интеграле обращается в нуль вне области $|t-s| \leqslant r$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\overline{\varphi_v(T+r;t)}\,dt = \iint\limits_{|t-s|\leqslant r, |s|\leqslant T} \psi_u^r(t-s)\,e^{i(u-v)s}\,e^{-iv(t-s)}\,ds\,dt$$

$$= \int_{-r}^{r} \psi_u^r(x)\,e^{-ivx}\,dx \int_{-T}^{T} e^{i(u-v)y}\,dy = \widehat{\psi}_u^r(v)\,\frac{2\sin T(v-u)}{v-u}.$$

Отсюда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\overline{\varphi_v(T+r;t)}\,dt = 4\,Tr\,\delta_{u,v}, \quad u,v \in \Lambda. \tag{21}$$

При фиксированном $r > T_0(\tau)$ определим новую систему $\{g_u^T,\ u \in \Lambda\}$ соотношением

$$g_u^T(t) = \frac{T}{2\,r(T-r)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\,\varphi_u(T-r;s)\,ds. \tag{22}$$

Очевидно,

$$\widehat{g}_u^T(v) = \frac{T}{r(T-r)}\,\widehat{\psi}_u^r(v)\,\frac{\sin(T-r)(v-u)}{v-u}. \tag{23}$$

Из (21) следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть $\{\psi_u^r,\ u \in \Lambda\}$ – система из $\mathscr{L}_T(\Lambda)$, сопряженная (в метрике пространства L_T^2) к системе $\{\varphi_u(r;\,\cdot),\ u \in \Lambda\}$. Тогда при $u \in \Lambda$ функции g_u^T лежат в L_T^2, причем*

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g_u^T(t)\,e^{-ivt}\,dt = \delta_{u,v}, \quad \textit{если} \ \ v \in \Lambda. \tag{24}$$

§4. Условие Маккенхаупта

Будем предполагать, что спектральная плотность f удовлетворяет условию (1) и условию Маккенхаупта (см. [7])

$$\lambda(f) := \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I f(t)\,dt\,\frac{1}{|I|}\int_I \frac{1}{f(t)}\,dt < \infty. \tag{25}$$

Здесь супремум берется по интервалам I, $|I|$ – длина I. Далее мы будем предполагать, что

$$\lambda(f) \leqslant \lambda < \infty. \tag{26}$$

Для $\varepsilon > 0$ обозначим

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\,\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u-s)\,ds.$$

Следующее утверждение установлено в [8].

Лемма 4.1. *Пусть $\lambda(f) \leqslant \lambda < \infty$. Тогда найдутся такие константы $0 < a(\lambda) \leqslant b(\lambda) < \infty$, что при $\varepsilon = 1/T$*

$$a(\lambda)\, f_\varepsilon(u) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 T(x-u)}{\pi T (x-u)^2}\, f(x)\,dx \leqslant b(\lambda)\, f_\varepsilon(u). \tag{27}$$

Отметим, что вместе с функцией f условию (26) удовлетворяет также и функция $1/f$. При этом (см. [7])

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(u)(1+u^2)}\,du < \infty.$$

Далее мы хотим иметь дело со случайными величинами вида

$$X_u = \int\limits_{\infty}^{\infty} \overline{g_u^T(t)}\,dx(t) = x\big[\,g_u^T\,\big],$$

предполагая, что спектральная плотность f процесса $x(t)$ удовлетворяет условию (26).

Лемма 4.2. *Пусть $\tau = \tau(\Lambda) > 0$, $\lambda(f) \leqslant \lambda < \infty$. Тогда найдутся такие константы $0 < c(\tau, r, \lambda) \leqslant C(\tau, r, \lambda) < \infty$, зависящие только от λ, r и τ, что при $T > T_0(r, \tau)$ для преобразования Фурье $\widehat{g}_u^T$ функции g_u^T при $\varepsilon = 1/T$ справедливы оценки*

$$c(\tau, r, \lambda)\, T\, f_\varepsilon(u) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}_u^T(x)|^2\, f(x)\,dx \leqslant C(\tau, r, \lambda)\, T\, f_\varepsilon(u). \tag{28}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что (это следует из (23))

$$\widehat{g}_u^T(v) = L(r,T)\,\widehat{\psi}_u^r(v)\,\frac{\sin(T-r)(v-u)}{v-u}, \quad L(r,T) = \frac{T}{r(T-r)}. \tag{29}$$

Поскольку система $\{\varphi_u(r;\,\cdot),\ u \in \Lambda\}$ является базисом Рисса в L_r^2 (в замыкании своей линейной оболочки), то таковой же является в L_r^2 и сопряженная система $\{\psi_u^r,\ u \in \Lambda\}$. Отсюда, в частности, следует, что нормы функций ψ_u^r в стандартном пространстве L^2 на вещественной прямой ограничены равномерно по u, скажем, величиной $C(r,\tau)$. Поскольку функции ψ_u^r равны нулю вне отрезка $[-r,r]$, отсюда мы выводим, что

$$\left|\widehat{\psi}_u^T(v)\right| \leqslant \sqrt{4\pi r C(r,\tau)}, \quad \left|\frac{d}{dv}\,\widehat{\psi}_u^T(v)\right| \leqslant r\sqrt{4\pi r C(r,\tau)}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}_u^T(x)|^2\, f(x)\,dx \leqslant 4\,\pi^2 r C(r,\tau)\,T \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(T-r)(x-u)}{(T-r)\pi(x-u)^2}\, f(x)\,dx.$$

С учетом (27) при $T > 2\,r$ получаем верхнюю оценку в (28). Перейдем к нижней оценке. Напомним, что $\widehat{\psi}_u^r(u) = 1$. Как уже отмечалось, модуль производной функции $\widehat{\psi}_u^r(v)$ ограничен равномерно по u и v. Поэтому найдутся такие константы $c(r,\tau) > 0$ и $\varepsilon(r,\tau) > 0$, зависящие только от r и τ, что

$$\left|\widehat{\psi}_u^r(v)\right| \geqslant c(r,\tau) \quad \text{при } v \in [-u-\varepsilon,\ -u+\varepsilon], \text{ если } 0 < \varepsilon < \varepsilon(r,\tau). \tag{30}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}_u^T(x)|^2\, f(x)\,dx \geqslant c^2(r,\tau)\,(T-r)^2 \int\limits_{|x-u|\leqslant\varepsilon} \frac{\sin^2(T-r)(x-u)}{(T-r)^2(x-u)^2}\, f(x)\,dx.$$

Отсюда, при $T > 2\,r$ и $\varepsilon = 1/T$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}_u^T(x)|^2\, f(x)\,dx \geqslant \frac{2\,c^2(r,\tau)\,T}{\pi^2}\,\frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{|x-u|\leqslant\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Таким образом, мы получили нижнюю оценку в (28). $\square$

Лемма 4.3. *Пусть выполнено условие* (26) *и величина* $\tau = \tau(\Lambda) > 0$. *Тогда найдется такая константа* $c(\tau, r, \lambda) > 0$, *зависящая только от* λ, r *и* τ, *что для любого конечного набора* $\{a(v),\, v \in \Lambda\}$

$$\mathbf{E}\,|X_u - \sum_{v \neq u} a(u) X_v|^2 \geqslant c(\tau, r, \lambda)\,\mathbf{E}\,|X_u|^2. \tag{31}$$

Доказательство. Напомним, что отображение $x\left[\varphi\right] \to \widehat{\varphi}$ является изометрией из пространства $L^2(dP)$, построенного по вероятностной мере P, индуцированной процессом $x\left[\,\cdot\,\right]$, в пространство L^2_f. Поэтому достаточно установить, что для любого конечного набора $\{a(v),\, v \in \Lambda\}$

$$\left\|\widehat{g}^{\,T}_u - \sum_{v \neq u} a(u)\,\widehat{g}^{\,T}_v\right\|^2_f \geqslant c(\tau, \lambda)\,\|\|\widehat{g}^{\,T}_u\|^2_f. \tag{32}$$

Здесь $\widehat{g}^{\,T}_u$ – преобразование Фурье функции g^T_u, L^2_f – L^2–пространство, построенное по мере с плотностью $f \geqslant 0$, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_f$, $|\cdot|_f$ – скалярное произведение и норма в L^2_f. Достаточно указать такую функцию $h \in L^2_f$, что

$$\left(\widehat{g}^{\,T}_v, h\right)_f = 0 \quad \text{при } v \neq u \quad \text{и} \quad \left|\left(\widehat{g}^{\,T}_u, h\right)_f\right|^2 \geqslant c(\tau, \lambda)\;\|\widehat{g}^{\,T}_u\|^2_f\,\|h\|^2_f\,. \tag{33}$$

Пусть q – преобразование Фурье функции $\varphi_u(T;\,\cdot\,)$,

$$q(x) = \frac{\sin T(x-u)}{x-u}.$$

Положим $h = q/f$. Заметим, что (здесь мы используем (24))

$$\left(\widehat{g}^{\,T}_v, h\right)_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}^{\,T}_v(x)\,\overline{q(x)}\,dx = 4\,\pi T\,\left(g^T_v, \varphi_v(T;\,\cdot\,)\right)_T = 4\,\pi T\,\delta_{u,v}.$$

Далее, из (28) следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}^{\,T}_u(x)|^2\,f(x)\,dx \leqslant C(\tau, r, \lambda)\,T\,f_\varepsilon(u).$$

Ниже при использовании (27) мы будем учитывать, что $\lambda(f) = \lambda(1/f)$. Так как при $\varepsilon = 1/T$ (см. (27))

$$\left\|h\right\|^2_f = T \int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 T(z-u)}{\pi T\,(z-u)^2}\,\frac{1}{f(z)}\,dz \leqslant T\,b(\lambda)\,\frac{1}{2\,\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{f(u-s)}\,ds,$$

то при $T > 2r$ и $\varepsilon = 1/T$

$$\left\|\widehat{g}_u^{\,T}\right\|_f^2 \left\|h\right\|_f^2 \leqslant T^2\, b(\lambda)\, C(\tau, r, \lambda)\, \lambda(f). \tag{34}$$

Стало быть, при условии (26)

$$\left\|\widehat{g}_u^{\,T}\right\|_f^2 \left\|h\right\|_f^2 \leqslant T^2 \lambda\, b(\lambda)\, C(\tau, r, \lambda).$$

Отсюда следует (31), поскольку $\left(\widehat{g}_v^{\,T}, h\right)_f = \pi T$. □

§5. Асимптотически минимаксная оценка

Перейдем к построению асимптотически минимаксной оценки $\widetilde{s}_T$. Пусть на растущем отрезке $[-T, T]$ наблюдается гауссовсий процесс $y(t)$,

$$dy(t) = s(t)\, dt + dx(t), \quad t \in [-T, T]. \tag{35}$$

Здесь $s(t)$ – неизвестная функция, лежащая в заданном выпуклом центрально-симметричном подмножестве $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$, $x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями, с нулевым средним и неизвестной спектральной плотностью f, лежащей в заданном классе $\mathscr{K}$. Таким образом, в рассматриваемой задаче функция f является мешающим параметром. Мы планируем построить оценку $\widetilde{s}_T$, используя лишь информацию о том, что $s \in \mathscr{L}_*$ и $f \in \mathscr{K}$.

Интересующий нас класс $\mathscr{L}_*$ выделяется из функционального класса $\mathscr{L}(\Lambda)$ (подробнее см. §2) условием

$$\sum_{u \in \Lambda} |a(u)|^2 (|u| + 1)^{2\beta} \leqslant L. \tag{36}$$

Здесь предполагается, что Λ – счетное множество, удовлетворяющее условию отделимости: $\tau(\Lambda) = \inf_{u,v \in \Lambda,\, u \neq v} |u - v| \geqslant \tau > 0$. Мы также будем предполагать, что при некотором положительном a для достаточно больших m, $m > m_0$,

$$a\, m^{2\beta+1} \leqslant \sum_{u \in \Lambda,\, |u| \leqslant m} (1 + |u|)^{2\beta}. \tag{37}$$

Введем в рассмотрение класс спектральных плотностей $A(\alpha,\beta;b,B)$, определив его для $\alpha>-1$, $\beta>1$ и положительных $b\leqslant B$ условиями

$$b\,\varepsilon^{\alpha}\leqslant\frac{\sum\limits_{u\in\Lambda,|u|\leqslant m}f_{\varepsilon}(u)\,(1+|u|)^{2\beta}}{\sum\limits_{u\in\Lambda,|u|\leqslant m}(1+|u|)^{2\beta}},\qquad\frac{1}{N(m)}\sum_{u\in\Lambda,|u|\leqslant m}f_{\varepsilon}(u)\leqslant B\,\varepsilon^{\alpha}.\quad(38)$$

Здесь $N(m)$ – число точек из Λ, содержащихся в отрезке $[-m,m]$. Очевидно, $\tau\,(N(m)-1)\leqslant 2m$.

Интересующий нас класс $\mathscr{K}=\mathscr{K}(\alpha,\beta;b,B);\lambda)$ спектральных плотностей выделяется из класса $A(\alpha,\beta;b,B)$ условием

$$\lambda(f)\leqslant\lambda<\infty.\tag{39}$$

Несколько другой класс был рассмотрен С. В. Решетовым в [9].

Обозначим $Y(u)=y\big[g_u^T\big]/T$, $X(u)=x\big[g_u^T\big]/T$. Используя соотношение (см. (13) и (24))

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\overline{g_u^T(t)}\,s(t)\,dt=a(u),\tag{40}$$

перейдем к эквивалентной (см. [10]) дискретной задаче оценивания неизвестного вектора $a=(a(u),\ u\in\Lambda)$

$$Y(u)=a(u)+X(u),\quad u\in\Lambda.\tag{41}$$

Здесь вектор $a=(a(u),\ u\in\Lambda)$ лежит в центрально симметричном множестве Θ, определяемом условием (36), $X=(X(u),\ u\in\Lambda)$ – гауссовский вектор с нулевым средним. При этом

$$\sigma_u^2=\mathbf{E}|X(u)|^2=\frac{1}{4T^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{g}_u^T(x)|^2\,f(x)\,dx.$$

Заметим, что по лемме 4.2, если $f\in\mathscr{K}$, то

$$c(\tau,r,\lambda)\,\frac{1}{4T}\,f_{\varepsilon}(u)\leqslant\mathbf{E}|X(u)|^2\leqslant C(\tau,r,\lambda)\,\frac{1}{4T}\,f_{\varepsilon}(u).\tag{42}$$

Согласно же лемме 4.3, если $f\in\mathscr{K}$, то

$$\mathbf{E}\,|X(u)-\sum_{v\neq u}a(u)X(v)|^2\geqslant c(\tau,r,\lambda)\,\mathbf{E}|X(u)|^2.\tag{43}$$

Пусть $\widehat{a}_T = (\widehat{a}_T(u),\ u \in \Lambda)$ – оценка неизвестного вектора a по наблюдениям (41). Примем обозначения

$$R_T(\widehat{a}_T;\Theta) = \sup_{a\in\Theta} \mathbf{E} \sum_{u\in\Lambda} |\widehat{a}_T(u) - a(u)|^2, \quad R_T(\Theta) = \inf_{\widehat{a}_T} R_T(\widehat{a}_T;\Theta).$$

По оценке $\widehat{a}_T = (\widehat{a}_T(u),\ u \in \Lambda)$ неизвестного вектора $a = (a_T(u), u\in\Lambda)$ построим оценку $\widehat{s}_T(t) = \sum\limits_{u\in\Lambda} \widehat{a}_T(u)\, e^{iut}$ неизвестной функции s. Пусть $\widetilde{s}_T$ – оценка, соответствующая специальному выбору оценки $\widehat{a}_T = \widetilde{a}_T$, $\widetilde{a}_T = (\widetilde{a}_T(u),\ u \in \Lambda)$, когда

$$\widetilde{a}_T(u) = Y(u) \text{ при } |u| \leqslant m \text{ и } \widetilde{a}_T(u) = 0 \text{ при } |u| > m,\ m = T^{\frac{1+\alpha}{1+2\beta}}.$$

Величины риска $\mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T;\mathscr{L}_*)$ и минимаксного риска $\mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*)$ определенные в (10) и (11), конечно, отличаются от величин $R_T(\widehat{a}_T;\Theta)$ и $R_T(\Theta)$, однако, (см. §2) при условии $\tau(\Lambda) > 0$ существуют такие положительные константы $0 < c(\tau) \leqslant C(\tau) < \infty$, что

$$c(\tau)\, R_T(\widehat{a};\Theta) \leqslant \mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T;\mathscr{L}_*) \leqslant C(\tau)\, R_T(\widehat{a};\Theta),$$

$$c(\tau)\, R_T(\Theta) \leqslant \mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*) \leqslant C(\tau)\, R_T(\Theta).$$

Поэтому утверждения следующих двух теорем эквивалентны.

Теорема 5.1. *Пусть $\tau = \tau(\Lambda) > 0$, $f \in \mathscr{K}$, спектральное множество Λ удовлетворяет условию* (37)*. Тогда найдутся такая положительная константа $T_0 = T_0(r,\mathscr{K})$ и такие положительные $\kappa_1 = \kappa_1(r,\mathscr{K},\Lambda) \leqslant \kappa_2 = \kappa_2(r,\mathscr{K},\Lambda) < \infty$, что при $T > T_0$*

$$\kappa_1\, T^{-\frac{(1+\alpha)(2\beta)}{1+2\beta}} \leqslant \mathscr{R}_T(\mathscr{L}_*) \leqslant \mathscr{R}_T(\tilde{s}_T;\mathscr{L}_*) \leqslant \kappa_2\, T^{-\frac{(1+\alpha)(2\beta)}{1+2\beta}}. \tag{44}$$

Теорема 5.2. *Пусть $\tau = \tau(\Lambda) > 0$, $f \in \mathscr{K}$, спектральное множество Λ удовлетворяет условию* (37)*. Тогда найдутся такая положительная константа $T_0 = T_0(r,\mathscr{K})$ и такие положительные $\kappa_1(r,\mathscr{K},\Lambda) \leqslant \kappa_2(r,\mathscr{K},\Lambda) < \infty$, что*

$$\kappa_1\, T^{-\frac{(1+\alpha)(2\beta)}{1+2\beta}} \leqslant R_T(\Theta) \leqslant R_T(\tilde{a}_T;\Theta) \leqslant \kappa_2\, T^{-\frac{(1+\alpha)(2\beta)}{1+2\beta}}. \tag{45}$$

Доказательство. Величины риска $R_T(\widetilde{a}_T;\Theta)$ оценки $\widetilde{a}_T$ и минимаксного риска $R_T(\Theta)$, вообще говоря, существенно зависят от совместного распределения координат вектора $X = (X(u),\ u \in \Lambda)$. Однако, по лемме 1.1 при условии (43) найдутся такие константы $0 < d(\tau,r,\lambda) \leqslant D(\tau,r,\lambda)$, что

$$d(\tau,r,\lambda)\, R_T^*(\Theta) \leqslant R_T(\Theta) \leqslant D(\tau,r,\lambda)\, R_T^*(\tilde{a}_T,\Theta) \tag{46}$$

где $R_T^*(\Theta)$ – величина минимаксного риска в случае, когда координаты вектора $X = (X(u),\ u \in \Lambda)$ – независимые (при тех же маргинальных распределениях). Оценка снизу величины $R_T^*(\Theta)$ представляется задачей более простой.

Мы будем опираться на оценку снизу в лемме 1.1

$$C_1 \sum_{u \in \Lambda} \tau_u^2 \wedge \sigma_u^2 \leqslant R_T^*(\Theta). \tag{47}$$

Здесь $\tau = \left(\tau_u^2,\ u \in \Lambda\right)$ – произвольный вектор, удовлетворяющий условию (36). Далее для простоты обозначений будем писать в индексах суммирования вместо $\{u : u \in \Lambda,\ |u| \leqslant m\}$ просто $\{|u| \leqslant m\}$. Положим $\varepsilon = 1/T$ и выберем величины τ_u^2 следующим образом

$$\tau_u^2 = L\, \frac{f_\varepsilon(u)}{\sum\limits_{|u| \leqslant m} f_\varepsilon(u)\,(1 + |u|)^{2\beta}}, \quad \text{если } |u| \leqslant m, \tag{48}$$

полагая остальные величины τ_u^2 (то есть при $|u| > m$) равными нулю. Величину $m > 0$ мы выберем так, чтобы в отрезке $[-m, m]$ была хотя бы одна точка из Λ. Именно, выберем $m > m_0$, исходя из соотношения

$$\varepsilon^{1+\alpha}\, m^{1+2\beta} = 1. \tag{49}$$

Из условия (38) следует, что при $m > m_0$ (то есть при $T > T_0$)

$$\varepsilon \sum_{|u| < m} f_\varepsilon(u)\,(1 + |u|)^{2\beta} \leqslant (1 + m)^{2\beta}\, N(m)\, B\, \varepsilon^{1+\alpha} \leqslant \kappa_3$$

с константой $\kappa_3 = \kappa_3(\tau, m_0, B)$. Поэтому при $m > m_0$ величина $\tau_u^2 \geqslant \kappa_4\, \varepsilon\, f_\varepsilon(u)$, где $\kappa_4 = \kappa_4(\tau, m_0, B, \kappa, L) = L\kappa_3$. Из условия (42) следует, что $\kappa_5\, \varepsilon\, f_\varepsilon(u) \leqslant \sigma_u^2$ с константой $\kappa_5 = \kappa_5(\tau, r, \lambda)$. Поэтому

$$\sigma_u^2 \wedge \tau_u^2 \geqslant \kappa_6\, \varepsilon\, f_\varepsilon(u), \quad \text{где} \quad \kappa_6 = \kappa_5 \wedge \kappa_4.$$

Стало быть, в силу (47)

$$R_T^*(\Theta) \geqslant \kappa_7\, \varepsilon \sum_{|u| \leqslant m} f_\varepsilon(u),\ \ \kappa_7 = \kappa_7(\tau, r, m_0, B, \lambda).$$

Поскольку по условиям (37), (38) при $m > m_0$

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{|u| \leqslant m} f_\varepsilon(u) &\geqslant \frac{\varepsilon}{(1 + m)^{2\beta}} \sum_{|u| \leqslant m} f_\varepsilon(u)\,(1 + |u|)^{2\beta} \\ &\geqslant ab\,(m + 1)^{-2\beta}\, m^{2\beta+1} \varepsilon^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

то при $m > m_0$

$$\varepsilon \sum_{|u|\leqslant m} f_\varepsilon(u) \geqslant \kappa_8\, T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{2\beta+1}}, \quad \kappa_8 = \kappa_8(\lambda, m_0, a, b).$$

Так что мы приходим к оценке снизу величины $R_T^*(\Theta)$ вида

$$R_T^*(\Theta) \geqslant \kappa_1^*(r, \mathscr{K}, \Lambda)\, T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{2\beta+1}},$$

и, стало быть, (см. (46)) к требуемой оценке снизу величины $R_T(\Theta)$ с константой $\kappa_1(r, \mathscr{K}, \Lambda) = d(\tau, r, \lambda)\, \kappa_1^*(r, \mathscr{K}, \Lambda)$.

Подходящая оценка сверху для величины $R_T(\Theta)$ следует из неравенства $R_T(\Theta) \leqslant R_T(\widetilde{a}_T; \Theta)$ и соответветствующей оценки для величины $R_T(\widetilde{a}_T; \Theta)$. Поскольку $\widetilde{a}_T = a(u) + X(u)$, при $|u| \leqslant m$ и $\widetilde{a}_T = 0$, при $|u| > m$, то

$$R_T(\widetilde{a}_T; \Theta) = \sup_{a\in\Theta} \Big\{ \sum_{|u|\leqslant m} \mathbf{E}|X(u)|^2 + \sum_{|u|>m} |a(u)|^2 \Big\}.$$

Так как

$$\sum_{|u|>m} |a(u)|^2 \leqslant m^{-2\beta} \sum_{|u|>m} |a(u)|^2\, (1+|u|)^{2\beta} \leqslant m^{-2\beta}\, L$$

и в силу (42)

$$\sum_{|u|\leqslant m} \mathbf{E}|X(u)|^2 \leqslant C(\tau, r, \lambda)\, \frac{1}{4T} \sum_{|u|\leqslant m} f_\varepsilon(u),$$

то для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что при $T > T_0$, $m = T^{\frac{1+\alpha}{1+2\beta}}$, $\varepsilon = 1/T$ при некотором $\kappa_9(r, \mathscr{K}, \Lambda) < \infty$

$$\varepsilon \sum_{|u|\leqslant m} f_\varepsilon(u) \leqslant \kappa_9(r, \mathscr{K}, \Lambda)\, T^{-\frac{2\beta\,(1+\alpha)}{1+2\beta}} \tag{50}$$

Из условия (38) получаем

$$\varepsilon \sum_{|u|\leqslant m} f_\varepsilon(u) \leqslant B\, N(m)\, \varepsilon^{\alpha+1},$$

что приводит к (50), если учесть, что $\tau(N(m) - 1) \leqslant m$, $m = T^{\frac{1+\alpha}{1+2\beta}}$, $\varepsilon = 1/T$. □

Литература

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* Мир, М., 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* Мир, М., 1974.
3. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *О непараметрическом оценивании значения линейного функционала в гауссовском белом шуме.* — Теория вероятн. и ее примен. **29** (1984), 19–32.
4. D. L. Donoho, R. C. Liu, B. MacGibbon, *Minimax Risk over Hyperrectangles, and Implications.* — Ann. Statist. **18** (1990), 1416–1437.
5. W. Stepanoff, *Sur quelques generalisations des fonctions presque-periodiques.* — Comptes Rendus **181** (1925), 90–92.
6. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости.* Наука, М., 1964.
7. B. J. Garnett, *Bounded Analytic Functions.* Academic Press, N-Y, 1981.
8. В. Н. Солев, *Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **278** (2001), 225–247.
9. С. В. Решетов, *Минимаксная оценка псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума.* — Вестник СПбГУ, Серия 1, No. 2 (2010), 106–115.
10. В. Н. Солев, *Оценка функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума: дискретизация.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **441** (2015), 286–298.

Solev V. N. Adaptive estimation of function observed in Gaussian stationary noise.

In the article we propose an adaptive estimation of the unknown pseudo periodic function which observed in stationary noise with the unknown spectral density which belongs to a given class. We compare the accuracy of the proposed estimation with the minimax risk and give a lower bound for the minimax risk.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023;
С.-Петербургский государственный
университет,
Университетская наб. д. 7/9
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: vnsolev@gmail.com

Поступило 20 ноября 2016 г.