Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

Л. В. Розовский

ВЕРОЯТНОСТИ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ОБЩЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОТОРЫХ УБЫВАЕТ В НУЛЕ НЕ БЫСТРЕЕ СТЕПЕНИ

1. Введение и результаты. Пусть X обозначает некоторую положительную случайную величину с функцией распределения $V(x)$, а $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ являются ее независимыми копиями.

Целью настоящей работы, в первую очередь, является обобщение некоторых результатов из [1], где изучались вероятности малых уклонений суммы $X_1+\dots+X_n$ при $n \to \infty$ и был исследован случай медленно меняющейся в нуле функции $V(x)$, отсутствующий в литературе. Точнее, в [1] предполагалось, что

$$\nu(y) = \frac{1}{y}\int_0^y u\,dV(u) \sim l(y), \quad y \to +0, \tag{1.1}$$

где функция $l(y)$ медленно меняется в нуле, откуда следует, что $l(+0) = 0$ и $V(y) \sim \widetilde{l}(y) = \int_0^y l(u)/u\ du$, $y \to +0$, причем функция $\widetilde{l}(y)$ также медленно меняется в нуле.

В наших исследованиях предположение (1.1) будет заменено нижеследующим существенно более слабым условием ($\mathbf{R}$), введенным в [2]:

существуют постоянные $b \in (0,1)$, $c_1 > b$, $c_2 > 1$ *и* $\varepsilon > 0$, *такие что при каждом* $r \leqslant \varepsilon$

$$c_1\,\nu(b\,r) \leqslant \nu(r) \leqslant c_2\,\nu(b\,r). \tag{1.2}$$

Ключевые слова: малые уклонения, сумма независимых положительных случайных величин, медленно меняющиеся функции, правильно меняющиеся функции.

Работа поддержана грантом РФФИ 16-01-00367.

Там же показано, что $(\mathbf{R})$ предпочтительнее известного условия $(\mathbf{L})$ из работы [3], а именно $(\mathbf{L}) \Longleftrightarrow (\mathbf{R})\Big|_{c_1>1}$ и, дополнительно, позволяет $V(r)$ убывать в нуле медленнее любой степени r, в частности, удовлетворять (1.1).

Приведем результаты. Нам понадобятся дополнительные обозначения. Пусть $\{\lambda_j\}$ – некоторые положительные числа. Обозначим $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j X_j$, $n \geqslant 1$; $L(h) = \mathbf{E} e^{-h X}$, $h \geqslant 0$, и

$$\Lambda_n(\gamma) = \prod_{j=1}^{n} L(\gamma \lambda_j), \quad m_n(\gamma) = -\left(\ln \Lambda_n(\gamma)\right)', \quad \sigma_n^2(\gamma) = \left(\ln \Lambda_n(\gamma)\right)'';$$

$$\widetilde{\nu}(y) = \int\limits_0^y \nu(u)\, du/u, \quad \kappa(y) = \nu(y)/\widetilde{\nu}(y), \quad y > 0. \tag{1.3}$$

Теорема 1. *Если выполнено условие* $(\mathbf{R})$, *то при всех положительных* r, s, δ *и* $\gamma > \delta \big/ \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j$

$$\mathbf{P}\big(r - s < S_n \leqslant r\big) = e^{-Q_n(\gamma)}\, \frac{1 - e^{-\gamma s}}{\tau \sqrt{2\pi}} \times \left(e^{-\beta^2/2} + \theta \left(\tau^{-1} + \left(\frac{\ln(1+\tau)}{\tau^2}\right)^{1/\alpha} \left(1 + (\gamma s)^{-1}\right)\right)\right).$$

Здесь

$$Q_n(\gamma) = -\ln \Lambda_n(\gamma) - \gamma r, \quad \beta = (r - m_n(\gamma))/\sigma_n(\gamma), \quad \tau = \gamma \sigma_n(\gamma), \tag{1.4}$$

$\alpha = \ln c_2/|\ln b|$ *(см.* (1.2)), *а* $|\theta|$ *ограничено некоторой постоянной, зависящей лишь от* V *и* δ.

Теорема 1 является обобщением одного результата из [4, замечание 2] (условие $(\mathbf{L})$ заменяется условием $(\mathbf{R})$).

При формулировке последующих результатов настоящего параграфа будем предполагать, что условие $(\mathbf{R})$ выполнено, а веса $\{\lambda_j\}$ при некотором $\delta > 0$ удовлетворяют условию

$$\delta \leqslant \lambda_j \leqslant 1/\delta, \quad j \geqslant 1, \tag{1.5}$$

т.е. равномерно отделены от нуля и бесконечности (например, являются единицами).

Следствие 1. *Пусть ε – произвольная положительная постоянная. Тогда равномерно по $\gamma > \varepsilon$, $r > 0$ и $s > 0$*

$$\mathbf{P}(r - s < S_n \leqslant r) = e^{-Q_n(\gamma)}\, \frac{1 - e^{-\gamma s}}{\tau\sqrt{2\pi}} \times \left(e^{-\beta^2/2} + O\left(1/\sqrt{\lambda} + (|\ln\lambda|/\lambda)^{1/\alpha}\big(1 + (\gamma s)^{-1}\big)\right)\right), \quad n \to \infty.$$

Здесь использованы обозначения теоремы 1, *а* $\lambda = n\kappa(1/\gamma)$ (*см.* (1.3)).

Поскольку при условии ($\mathbf{L}$) величина λ имеет порядок n равномерно по $\gamma > \varepsilon$ (см. [3] или [4, (4.4.b)]), следствие 1 является обобщением основного результата работы [5]. Из него также вытекает теорема 2(1) из [1].

Понятно, что следствие 1 представляет основной интерес тогда, когда параметр γ выбирается таким образом, чтобы λ вместе с n стремилось к бесконечности, а β – к нулю. В частности, из него вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Если последовательность $\gamma_n \leqslant \infty$ стремится к бесконечности так, что*

$$n \inf_{1 \leqslant \gamma < \gamma_n} \kappa(1/\gamma) \to \infty, \tag{1.6}$$

то соотношение

$$\mathbf{P}(S_n < r) = \frac{\Lambda_n(\gamma)\, e^{\gamma r}}{\tau\sqrt{2\pi}}\, \big(1 + o(1)\big), \quad n \to \infty, \tag{1.7}$$

выполняется равномерно по $r \in (n\,\kappa(1/\gamma_n)/\gamma_n,\ \mu\, n\,\overline{\lambda}_n)$, где постоянная $\mu < \mathbf{E}X$, $\overline{\lambda}_n = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)/n$, а величина γ удовлетворяет уравнению

$$m_n(\gamma) = r. \tag{1.8}$$

Отметим, что в случае выполнения условия ($\mathbf{L}$) соотношение (1.6) имеет место при $\gamma_n = \infty$ и, следовательно, (1.7) справедливо *для всех* $0 < r \leqslant \mu\, n\,\overline{\lambda}_n$. Если же ($\mathbf{L}$) нарушается (скажем, выполнено условие (1.1) и, следовательно, $\kappa(+0) = 0$), то условие (1.6) становится нетривиальным и асимптотика (1.7) при достаточно малых r уже не работает. В подтверждение сказанного, приведем некоторые результаты.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma \geqslant 1 \geqslant \gamma r > 0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n < r) = \Lambda_n(\gamma)\left(1 + \theta\left(\gamma r + \lambda/(\gamma r)^{1-\varepsilon}\right)\right), \quad |\theta| \leqslant A, \tag{1.9}$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ *и* A – *некоторые постоянные, не зависящие от* n, γ *и* r.

Теорема 2 обобщает и уточняет теорему 2(3) из [1].

Заметим, что равенство (1.9) становится нетривиальным лишь тогда, когда $\lambda(= n\kappa(1/\gamma)) \to 0$.

Следствие 3. *Если* $\kappa(+0) = 0$ (*см.* (1.3)), *то*

$$\mathbf{P}(S_n < r) = \Lambda_n(\gamma)\left(1 + o(1)\right), \; n \to \infty, \tag{1.10}$$

равномерно по $r \to +0$, *таким что* λ (*или* γr) $\to 0$ *при* $n \to \infty$, *где* γ *удовлетворяет уравнению* (1.8) *или, более общим образом,* $\lambda \asymp \gamma r$.

Заметим, что в условиях следствия 3 знаменатель в правой части (1.6) стремится к бесконечности (см. (2.4)), т.е. при $\lambda \to \infty$ и $\lambda \to 0$ вероятность $\mathbf{P}(S_n < r)$ имеет *различные* асимптотические представления.

В заключение, приведем еще один справедливый при условии ($\mathbf{R}$) (и (3.5)) результат, который может быть полезным в том случае, когда условие $\lambda \to 0/\infty$ нарушается.

Теорема 3. *Пусть* $r \in (0, \mu\, n\, \overline{\lambda}_n)$, *где постоянная* $\mu < \mathbf{E}X$. *Тогда*

$$-\ln \mathbf{P}(S_n < r) = Q_n(\gamma) + 0.5\ln(1 + \gamma r) + \theta, \quad |\theta| \leqslant A, \tag{1.11}$$

где γ *удовлетворяет уравнению* (1.8), $Q_n(\gamma)$ *и* $\overline{\lambda}_n$ *определены в* (1.4) *и следствии* 2, *соответственно, а величина* A *не зависит от* n *и* r.

Отметим (см. (1.3)), что

$$0 < c < \frac{Q_n(u)}{n\,|\ln \widetilde{\nu}(1/u)|} < 1/c < \infty, \quad u > u_0 > 0, \tag{1.12}$$

причем c не зависит от n и u.

Следствие 4. *Пусть постоянная* $\mu < \mathbf{E}X$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n < r) \asymp \frac{e^{-Q_n(u)}}{\sqrt{1 + u\,r}}, \quad n \to \infty, \tag{1.13}$$

равномерно по $r \in (0,\ \mu\,\delta\,n)$ *(см.* (1.5)*), где произвольное положительное* $u = u_n(r)$ *удовлетворяет условиям*

$$m_n(u) \asymp r, \quad \frac{u\,(m_n(u) - r)}{\sqrt{u\,r}} = O\,(1), \quad n \to \infty. \tag{1.14}$$

Заметим, что если $u\,r$ достаточно велико, первое условие в (1.14) является следствием второго.

2. Доказательства. Теорема 1 проверяется так же, как теорема 2 из [2] (с заметными упрощениями). При этом задействована формула (4.15) из [5].

Докажем теорему 2. Положим

$$L(h) = \mathbf{E}e^{-hX}, \quad m(h) = -\big(\ln L(h)\big)', \quad \sigma^2(h) = \big(\ln L(h)\big)'', \quad h \geqslant 0.$$

Имеем при $h,\, u > 0$,

$$\ln L(u) - \ln L(h) = -\int\limits_h^u m(t)\,dt, \quad \ln\frac{m(u)}{m(h)} = -\int\limits_h^u \frac{\sigma^2(t)}{m(t)}\,dt. \tag{3.1}$$

Из [2, лемма 2] следует, что в случае выполнения условия ($\mathbf{R}$), при всех $h \geqslant h_0 > 0$, где h_0 произвольное фиксированное число,

$$c_1\,\kappa(1/h) \leqslant h\,m(h), \quad h^2\,\sigma^2(h) \leqslant c_2\,\kappa(1/h), \tag{3.2}$$

где величины $c_1, c_2 > 0$ не зависят от h.

Отсюда и из (3.1) получим при $c = c_1/c_2$ и $u, h \geqslant h_0$,

$$\frac{m(u)}{m(h)} = \Big(\frac{u}{h}\Big)^{-\theta}, \quad c \leqslant \theta = \theta(u,h,V) \leqslant 1/c. \tag{3.3}$$

Согласно [6, теорема 2 и (1.8)], при $r,\, \gamma,\, u > 0$

$$\Lambda_n(\gamma)\,e^{\gamma\,r} \geqslant \mathbf{P}(S_n < r) \geqslant \Lambda_n(u)\,(1 - m_n(u)/r). \tag{3.4}$$

Пусть $K \geqslant 1$ – некоторый параметр, который будет выбран позже, и $u = K\,\gamma$. Имеем, с учетом (3.1) и того, что функция $m(h)$ убывает,

$$\ln\frac{\Lambda_n(u)}{\Lambda_n(\gamma)} = \sum_{j=1}^n (\ln L(\lambda_j u) - \ln L(\lambda_j\gamma)) \geqslant -\sum_{j=1}^n \lambda_j(u-\gamma)\,m(\lambda_j\gamma).$$

Воспользовавшись (3.1)–(3.3) и (1.5), в предположении $\delta\gamma \geqslant h_0$ получим

$$\begin{aligned}\lambda_j(u-\gamma)\, m(\lambda_j\gamma) &< \frac{u\, m(\delta\gamma)}{\delta m(\gamma)}\, m(\gamma)\\ &\leqslant \frac{K}{\delta}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/c}\gamma\, m(\gamma)\\ &\leqslant c_2\, K\, \delta^{-(1+1/c)}\, \kappa(1/\gamma),\end{aligned}$$

и, следовательно, при $\lambda = n\kappa(1/\gamma)$

$$\Lambda_n(u) \geqslant \Lambda_n(\gamma)\, e^{-A\,k\,\lambda}, \quad A = c_2\, \delta^{-(1+1/c)}. \tag{3.5}$$

Аналогично,

$$m_n(u) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, m(\lambda_j u) \leqslant c_2 \frac{\lambda}{\delta\gamma}\, \frac{m(\delta\gamma)}{m(\gamma)} \leqslant A\, k^{-c}\, \lambda/\gamma. \tag{3.6}$$

Из (3.4)–(3.6) следует, что если $\delta\gamma \geqslant h_0$, то

$$\begin{aligned}\Lambda_n(\gamma)\, e^{\gamma\, r} &\geqslant \mathbf{P}(S_n < r)\\ &\geqslant \Lambda_n(\gamma)\, e^{-A\,k\,\lambda}\, (1 - A\, k^{-c}\, \lambda/(\gamma\, r))\\ &\geqslant \Lambda_n(\gamma)\, \bigl(1 - A\,(k\,\lambda + k^{-c}\, \lambda/(\gamma\, r)\bigr).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Оценка (1.9) является следствием (3.7) при $h_0 = \delta$, $k = (\gamma\, r)^{-1/(1+c)}$ и $\varepsilon = c/(1+c)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 и проверка следствия 4 осуществляются вполне аналогично теореме 3 и замечанию 3 из [7] (см. также [8]).

Литература

1. Л. В. Розовский, *Вероятности малых уклонений сумм независимых положительных случайных величин с медленно меняющимся в нуле распределением.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **412** (2013), 237–251.
2. Л. В. Розовский, *Малые уклонения взвешенной суммы независимых положительных случайных величин с общим распределением, убывающем в нуле не быстрее степени.* — Теория вероятн. и ее примен. **60**, No. 1 (2015), 178–186.
3. M. A. Lifshits, *On the lower tail probabilities of some random series.* — Ann. Probab. **25** (1997), 424–442.
4. Л. В. Розовский, *О вероятностях малых уклонений сумм независимых положительных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **341** (2007), 151–167.
5. Л. В. Розовский, *Вероятности малых уклонений для одного класса распределений со степенным убыванием в нуле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **328** (2005), 182–190.

6. L. V. Rozovsky, *Remarks on a link between Laplace transform and distribution function of a nonnegative random variable.* — Statist. Probab. Letters **79** (2009), 1501–1508.
7. Л. В. Розовский, *Вероятности малых уклонений взвешенной суммы независимых случайных величин с общим распределением, убывающем в нуле не быстрее степени.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **431** (2014), 178–185.
8. L. V. Rozovsky, *Small deviation probabilities of weighted sums under minimal moment assumptions.* — Statist. Probab. Letters **86** (2014), 1–6.

Rozovsky L. V. Small deviation probabilities for sum of independent positive random variables, which have a common distribution, decreasing at zero not faster than a power.

In the note we investigate small deviation probabilities of cumulative sum of independent positive random variables, which have a common distribution, decreasing at zero not faster than a power.

С.-Петербургская
химико-фармацевтическая академия;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 12 сентября 2016 г.