

М. В. Платонова

**ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО
УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = \varphi(x) \quad (1)$$

можно представить как математическое ожидание функционала от винеровского процесса. Именно,

$$u(t, x) = \mathbf{E} \varphi(x - w(t)), \quad (2)$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Если в задаче Коши рассмотреть дифференциальный оператор порядка $m > 2$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_m}{m!} \frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad (3)$$

то представление решения задачи Коши, аналогичное (2), но с заменой $w(t)$ на некоторый другой случайный процесс, невозможно, так как в этом случае фундаментальное решение уравнения (3) уже не является вероятностной мерой. Тем не менее, в работах [1, 4, 5, 8, 10, 11] были построены некоторые аналоги представления (2).

Существует два основных подхода к построению аналога формулы (2). Первый подход, ведущий свое начало с работ Ю. Л. Далецкого (см. [1]), основан на использовании в (2) вместо винеровского процесса так называемого псевдопроцесса. Одномерные распределения псевдопроцесса задаются фундаментальным решением (3). Всякий псевдопроцесс, в отличие от обычного вероятностного процесса, порождает

Ключевые слова: эволюционное уравнение, задача Коши, пуассоновская случайная мера.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант No. 14-21-00035.

в пространстве траекторий только конечно-аддитивную меру на алгебре цилиндрических множеств, которая не может быть продолжена на соответствующую σ -алгебру. Отметим также работу [8], в которой был предложен вероятностный подход к псевдопроцессам.

Второй подход основан на использовании комплекснозначных стохастических процессов (см. [4, 10]).

Этот подход ведет начало с работы Фунаки [10], в которой было построено вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования четвёртого порядка ($m = 4$) при некоторых дополнительных условиях аналитичности на начальную функцию φ . Вместо винеровского процесса в [10] использовался комплексный стохастический процесс $X(t), t \geq 0$, определяемый как

$$X(t) := \begin{cases} B(w(t)), & w(t) \geq 0, \\ iB(w(t)), & w(t) < 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $B(t)$ и $w(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы. Этот же подход может быть распространён и на оператор дифференцирования порядка 2^n (см. [5]).

В работе [4] был предложен способ, позволяющий использовать метод Фунаки для построения вероятностного представления решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{a}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial^4 x}, \quad u(0, x) = \varphi(x),$$

где a – комплексная константа, а от начальной функции φ также требуется аналитичность. Как и в [10], решение основано на построении комплекснозначного стохастического процесса, аналогичного $X(t)$.

Далее, в работах [7, 9] был предложен вероятностный подход к определению понятия симметричного устойчивого распределения с показателем устойчивости $\alpha > 2, \alpha \notin \mathbf{N}$, основанный на использовании теории обобщенных функций. Симметричное устойчивое распределение определялось как обобщенная функция l (над некоторым классом основных функций), которая на основную функцию φ действует как

$$(l, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} \varphi * \omega_\varepsilon(\eta_\varepsilon), \quad (5)$$

где ω_ε – специальным образом подобранное семейство быстро осциллирующих функций, $\eta_\varepsilon = \int_{|x| > \varepsilon} x \nu(dx)$, а ν – пуассоновская случайная мера на \mathbf{R} с интенсивностью $\frac{C_\alpha dx}{|x|^{1+\alpha}}$.

С использованием методов [7, 9] и некоторых методов комплексного анализа, в работе [6] были построены аналоги устойчивых процессов с независимыми приращениями. С помощью этих процессов было построено вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дробного дифференцирования порядка больше двух.

В данной работе, используя идеи и методы работы [6], мы построим вероятностные представления и вероятностные аппроксимации решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования порядка $m > 2$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_m}{m!} \frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad (6)$$

где

$$c_m = \begin{cases} \pm 1, & m = 2k + 1, \\ (-1)^{k+1}, & m = 2k. \end{cases}$$

Отметим, что для различных значений m применяемые методы могут существенно отличаться. Мы выделяем четыре класса ($k \in \mathbf{N}$): $m = 4k - 1$, $m = 4k$, $m = 4k + 1$, $m = 4k + 2$. Внутри одного класса применяемые методы совершенно аналогичны. Случай, наиболее близкий к уравнению теплопроводности, отвечает $m = 4k + 2$. Именно с этого случая мы и начнем.

Основные результаты данной работы содержатся в теоремах 1, 2, 3, 4.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Константы мы всегда обозначаем буквой C , причем одна и та же буква C может обозначать разные константы, даже в пределах одной выкладки.

Прямое преобразование Фурье определяется как

$$\widehat{\varphi}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{ipx} dx, \quad (7)$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(p) e^{-ipx} dp.$$

Для любого $M > 0$ через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на подпространство функций, таких что носитель функции $\widehat{\psi}$ содержится в отрезке $[-M, M]$. Именно, для $\psi \in L_2(\mathbf{R})$ имеем

$$P_M \psi(x) = \psi * D_M(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \widehat{\psi}(p) e^{-ipx} dp, \quad (8)$$

где $\widehat{\psi}$ – прямое преобразование Фурье функции ψ , а D_M – ядро Дирихле

$$D_M(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin Mx}{x}.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ будем обозначать соболевское пространство функций, определенных на \mathbf{R} и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно. В пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ выберем норму (эквивалентную стандартной)

$$\|\psi\|_{W_2^k(\mathbf{R})}^2 = \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|^{2k}) |\widehat{\psi}(p)|^2 dp.$$

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbf{R}) \rightarrow W_2^l(\mathbf{R})$ через

$$\|A\|_{W_2^k \rightarrow W_2^l}$$

будем обозначать соответствующую операторную норму.

Через $C_b^\infty(\mathbf{R})$ будем обозначать множество бесконечно дифференцируемых функций с ограниченными производными любого порядка.

Далее, напомним определение классов Харди H_+^2 и H_-^2 . Функция F , аналитическая в верхней (нижней) полуплоскости комплексной плоскости принадлежит классу H_+^2 (соответственно, H_-^2), если существует константа C , $C < \infty$, такая что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dx \leq C,$$

при всех $y > 0$ ($y < 0$). Хорошо известно, что если $F(t) \in L^2(\mathbf{R})$ – функция, являющаяся граничным значением функции из H_+^2 (или H_-^2), то $\widehat{F}(\lambda) = 0$ при почти всех $\lambda \geq 0$ ($\lambda \leq 0$). Кроме того, верно и обратное утверждение. Если $\Phi \in L_2(\mathbf{R})$ и $\Phi(\lambda) = 0$ почти всюду при $\lambda \geq 0$ ($\lambda \leq 0$), то существует функция F из H_+^2 (или H_-^2), для которой $\widehat{F}(\lambda) = \Phi(\lambda)$.

§3. СЛУЧАЙ $m = 4k + 2$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m u}{\partial x^m}. \quad (9)$$

Для уравнения (9) рассмотрим задачу Коши

$$u(0, x) = \varphi(x). \quad (10)$$

Пусть $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0, T] \times \mathbf{R}^+$ с интенсивностью

$$\mathbf{E} \nu(dt, dx) = dt \Lambda(dx) = \frac{dt dx}{x^{1+m}}. \quad (11)$$

Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$ мы обозначим случайный процесс, заданный стохастическим интегралом по мере ν , вида

$$\xi_\varepsilon(t) = \iint_{[0, t] \times [\varepsilon, e\varepsilon]} x \nu(ds, dx), \quad (12)$$

где e – основание натурального логарифма. Заметим, что такой выбор интервала интегрирования обеспечивает нам выполнение соотношения

$$\int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} x^m \frac{dx}{x^{1+m}} = 1.$$

По теореме Кэмпбелла (см. [3]) характеристическая функция случайной величины $\xi_\varepsilon(t)$ для любого t равна

$$\mathbf{E} \exp(ip\xi_\varepsilon(t)) = \exp\left(t \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} (e^{ipx} - 1) \frac{dx}{x^{1+m}}\right).$$

Отметим, что для каждого $\varepsilon > 0$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ является сложным пуассоновским процессом, но при таком выборе m и $t > 0$ у семейства случайных величин $\xi_\varepsilon(t)$ не существует предела при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем не менее, процесс $\xi_\varepsilon(t)$ может быть использован для представления решения задачи Коши (9), (10).

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t, x)$

$$u_\varepsilon(t, x) = \mathbf{E} \left[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon(t)) \right], \quad (13)$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp \left(-t \int_\varepsilon^{e\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(ipy)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{1+m}} \right). \quad (14)$$

Заметим, что функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geq 0$, $u(t, x)$ – решение задачи Коши (9), (10), а функция $u_\varepsilon(t, x)$ задается формулой (13). Тогда существует положительная константа $C = C(m)$, такая что справедливо неравенство

$$\|u_\varepsilon(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leq Ct\varepsilon \|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geq 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B – некоторое возмущение оператора A , такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [2], гл. IX, §2, п. 1, с. 614)

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A} d\tau. \quad (15)$$

Определим оператор A_ε , полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon \psi(x) = \int_\varepsilon^{e\varepsilon} \left(\psi(x-y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\psi^{(k)}(x) \cdot (-y)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{1+m}}.$$

Положим теперь в (15)

$$A = A_\varepsilon, \quad B = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} - A_\varepsilon.$$

Тогда $A + B = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m}$.

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k} \leq 1. \quad (16)$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi$. Получим

$$\begin{aligned} \widehat{B\varphi}(p) &= \frac{(-ip)^m}{m!} \widehat{\varphi}(p) - \widehat{\varphi}(p) \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(ipy)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{1+m}} \\ &= -\widehat{\varphi}(p) \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^m \frac{(ipy)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{1+m}}. \end{aligned}$$

При $|p| \leq \frac{1}{e\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leq C\varepsilon |\widehat{\varphi}(p)| |p|^{m+1}, \quad (17)$$

а при $|p| > \frac{1}{e\varepsilon}$ — неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leq C |\widehat{\varphi}(p)| |p|^m. \quad (18)$$

С учетом (17) и (18) имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{B\varphi}\|_{W_2^l}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |p|^{2l}) |\widehat{B\varphi}(p)|^2 dp \\ &\leq \int_{|p| \leq \frac{1}{e\varepsilon}} C\varepsilon^2 (1 + |p|^{2(l+m+1)}) |\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \\ &\quad + \int_{|p| > \frac{1}{e\varepsilon}} C (1 + |p|^{2(l+m)}) |\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \\ &\leq C\varepsilon^2 \|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}}^2. \quad (19) \end{aligned}$$

Оценим теперь преобразование Фурье функции $e^{tA}\varphi(x)$. Имеем

$$\widehat{e^{tA}\varphi}(p) = \widehat{\varphi}(p) \exp \left(t \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(ipy)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{1+m}} \right).$$

Легко показать, что для всех $z \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \left(\exp(iz) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(iz)^k}{k!} \right) = \cos z - 1 + \frac{z^2}{2!} - \dots - \frac{z^{4k}}{(4k)!} \leq 0.$$

Откуда вытекает

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k} \leq 1. \tag{20}$$

Утверждение теоремы следует теперь из (16), (19) и (20). \square

Итак, мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l \geq 0$, то функция $u_\varepsilon(t, x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближает решение $u(t, x)$ задачи Коши (9), (10).

Таким образом, для решения задачи Коши (9), (10) при $m = 4k + 2$ мы получили следующее вероятностное представление

$$u(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon(t))].$$

§4. СЛУЧАЙ $m = 4k + 1$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm \frac{1}{m!} \frac{\partial^m u}{\partial x^m}. \tag{21}$$

Для уравнения (21) рассмотрим задачу Коши (10).

Как и раньше, через $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$ мы обозначаем случайный процесс, определяемый формулой (12).

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon^\pm(t, x)$

$$u_\varepsilon^\pm(t, x) = \mathbf{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^{\pm, t})(x \pm \xi_\varepsilon(t))], \tag{22}$$

где функции $\omega_\varepsilon^{\pm, t}(x)$ определяются своими преобразованиями Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^{\pm, t}(p) = \exp\left(-t \int_{\varepsilon}^{\varepsilon p} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(\mp i p y)^k}{k!}\right) \frac{dy}{y^{1+m}}\right). \tag{23}$$

Заметим, что функции $\widehat{\omega}_\varepsilon^{\pm, t}(p)$ являются быстро убывающими.

Функция $u_\varepsilon^+(t, x)$ аппроксимирует решение $u^+(t, x)$ задачи Коши (21), (10) со знаком "плюс", а функция $u_\varepsilon^-(t, x)$ аппроксимирует решение $u^-(t, x)$ задачи Коши (21), (10) со знаком "минус".

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geq 0$, $u^\pm(t, x)$ – решения задачи Коши (21), (10), а функции $u_\varepsilon^\pm(t, x)$ определяются (22). Тогда существует положительная константа $C = C(m)$, такая что справедливо неравенство

$$\|u_\varepsilon^\pm(t, \cdot) - u^\pm(t, \cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leq Ct\varepsilon \|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Будем рассматривать только уравнение (21) со знаком минус. При этом вместо $u_{\varepsilon}^{-}(t, x)$ и $u^{-}(t, x)$ будем писать просто $u_{\varepsilon}(t, x)$ и $u(t, x)$.

Определим оператор A_{ε} , полагая для $\psi \in C_b^{\infty}(\mathbf{R})$

$$A_{\varepsilon}\psi(x) = \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\psi(x-y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\psi^{(k)}(x) \cdot (-y)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{1+m}}.$$

Снова воспользуемся формулой (15). Положим в (15)

$$A = A_{\varepsilon}, \quad B = -\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} - A_{\varepsilon}.$$

Тогда $A + B = -\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m}$.

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k} \leq 1. \quad (24)$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi$. Получим

$$\begin{aligned} \widehat{B\varphi}(p) &= -\frac{(-ip)^m}{m!} \widehat{\varphi}(p) - \widehat{\varphi}(p) \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(ipy)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{1+m}} \\ &= -\widehat{\varphi}(p) \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^m \frac{(ipy)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{1+m}}. \end{aligned}$$

При $|p| \leq \frac{1}{e\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leq C\varepsilon |\widehat{\varphi}(p)| |p|^{m+1}, \quad (25)$$

а при $|p| > \frac{1}{e\varepsilon}$ — неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leq C |\widehat{\varphi}(p)| |p|^m. \quad (26)$$

С учетом (25) и (26) имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{B\varphi}\|_{W_2^l}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |p|^{2l}) |\widehat{B\varphi}(p)|^2 dp \\ &\leq \int_{|p| \leq \frac{1}{\varepsilon}} C\varepsilon^2 (1 + |p|^{2(l+m+1)}) |\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \\ &\quad + \int_{|p| > \frac{1}{\varepsilon}} C(1 + |p|^{2(l+m)}) |\widehat{\varphi}(p)|^2 dp \\ &\leq C\varepsilon^2 \|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Так же как это было сделано при доказательстве теоремы 1, можно показать, что справедливо неравенство

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k} \leq 1. \quad (28)$$

Утверждение теоремы следует из (24), (27) и (28). \square

§5. СЛУЧАЙ $m = 4k$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{m!} \frac{\partial^m u}{\partial x^m}. \quad (29)$$

Для уравнения (29) рассмотрим задачу Коши (10).

Отметим, что в данном случае предложенный выше метод не работает, так как для таких значений m функция (14) сверхэкспоненциально возрастает на бесконечности и, соответственно, для нее не определено обратное преобразование Фурье. Следуя [6], для построения вероятностного представления решения задачи Коши мы привлечем некоторые идеи комплексного анализа.

Пусть $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, – случайный процесс, определенный формулой (12), а σ – комплексная константа. По теореме Кэмпбелла (см. [3]) имеем

$$\mathbf{E} \exp(ip\sigma\xi_\varepsilon(t)) = \exp\left(t \int_{\varepsilon}^{\varepsilon\varepsilon} (e^{i\sigma p x} - 1) \frac{dx}{x^{m+1}}\right).$$

Заметим, что интеграл сходится, если $p \geq 0$ и $\text{Im } \sigma \geq 0$ или $p \leq 0$ и $\text{Im } \sigma \leq 0$.

Через P_{\pm} обозначим проекторы Рисса, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди H_{\pm}^2 . Для любой функции $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ справедливо представление

$$\varphi(x) = P_+ \varphi(x) + P_- \varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x),$$

где

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-ipx} \widehat{\varphi}(p) dp,$$

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ipx} \widehat{\varphi}(p) dp.$$

Заметим, что $P_+ \varphi$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, а $P_- \varphi$ – аналитическая функция в нижней.

Возьмем два комплексных числа $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{m})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{m})$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, σ_- лежит в нижней полуплоскости и, кроме того, $\sigma_+^m = \sigma_-^m = -1$. Вместо одного случайного процесса $\xi_{\varepsilon}(t)$ мы теперь рассмотрим два комплексных процесса $\sigma_+ \xi_{\varepsilon}(t)$ и $\sigma_- \xi_{\varepsilon}(t)$.

Далее, сначала мы по начальному данному φ построим новую функцию φ_M , полагая $\varphi_M = P_M \varphi$. Функция φ_M уже будет целой аналитической функцией экспоненциального типа. Число M мы будем выбирать в зависимости от ε , а именно: $M = M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$.

Имеем

$$\varphi_M = \varphi_M^+ + \varphi_M^-.$$

Функция φ_M^+ имеет ограниченное аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, а функция φ_M^- – в нижнюю. Соответственно, в функцию φ_M^- мы будем подставлять процесс $\sigma_+ \xi_{\varepsilon}(t)$, а в функцию φ_M^+ – процесс $\sigma_- \xi_{\varepsilon}(t)$.

Итак, для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_{\varepsilon}(t, x)$

$$u_{\varepsilon}(t, x) = \mathbf{E} \left[(\varphi_M^- * \omega_{\varepsilon}^t)(x - \sigma_+ \xi_{\varepsilon}(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_{\varepsilon}^t)(x - \sigma_- \xi_{\varepsilon}(t)) \right], \quad (30)$$

где функция $\omega_{\varepsilon}^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_{\varepsilon}^t(p) = \begin{cases} \exp \left(-t \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(ip)^k \sigma_+^k x^k}{k!} \right) \frac{dx}{x^{m+1}} \right), & p \geq 0, \\ \exp \left(-t \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(ip)^k \sigma_-^k x^k}{k!} \right) \frac{dx}{x^{m+1}} \right), & p < 0. \end{cases} \quad (31)$$

Так как $P_- \varphi$ – аналитическая функция в нижней полуплоскости, а функция $P_+ \varphi$ аналитична в верхней полуплоскости, то функция $u_\varepsilon(t, x)$ корректно определена. Заметим также, что при таком выборе σ_\pm и m функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geq 0$, $M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$, $u(t, x)$ – решение задачи Коши (29), (10), а функция $u_\varepsilon(t, x)$ определяется формулой (30). Тогда существует положительная константа $C = C(m)$, такая что справедливо неравенство

$$\|u_\varepsilon(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leq C(t + \varepsilon^m)\varepsilon \|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Определим операторы A_ε^\pm , полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon^\pm \psi(x) = \int_\varepsilon^{e\varepsilon} \left(\psi^\pm(x - \sigma_\mp y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\psi^\pm)^{(k)}(x) \cdot (-\sigma_\mp y)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{m+1}}.$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A^\pm = A_\varepsilon^\pm, \quad B^\pm = -\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} P_\pm - A_\varepsilon^\pm.$$

Тогда $A^\pm + B^\pm = -\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} P_\pm$.

Заметим, что из условия $m = 4k$ следует справедливость неравенства

$$\|e^{t(A^\pm + B^\pm)} P_\pm\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k} \leq 1.$$

Далее, представим

$$\begin{aligned} e^{tA^\pm} P_M \varphi^\pm(x) - e^{t(A^\pm + B^\pm)} \varphi^\pm(x) &= (e^{tA^\pm} - e^{t(A^\pm + B^\pm)}) P_M \varphi^\pm(x) \\ &\quad - e^{t(A^\pm + B^\pm)} (I - P_M) \varphi^\pm(x) = V_1^\pm + V_2^\pm. \end{aligned}$$

Для оценки нормы слагаемого V_1^- воспользуемся формулой (15) с $A = A^-$ и $B = B^-$, а для оценки нормы слагаемого V_1^+ воспользуемся формулой (15) с $A = A^+$ и $B = B^+$. Оценим только норму слагаемого V_1^- , норма слагаемого V_1^+ оценивается аналогично.

Вычислим преобразование Фурье функции $B^- \varphi_M(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{B^- \varphi_M}(p) &= -\frac{(-ip)^m}{m!} \widehat{\varphi_M^-}(p) \\ &= -\widehat{\varphi_M^-}(p) \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\exp(ip\sigma_+ y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(ip\sigma_+ y)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{m+1}} \\ &= -\widehat{\varphi_M^-}(p) \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\exp(ip\sigma_+ y) - \sum_{k=0}^m \frac{(ip\sigma_+ y)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{m+1}}. \end{aligned}$$

Из последней формулы следует справедливость оценки

$$|\widehat{B^- \varphi_M}(p)| \leq C\varepsilon |\widehat{\varphi_M^-}(p)| |p|^{m+1}. \quad (32)$$

Далее, имеем

$$\|B^- P_M \widehat{\varphi^-}\|_{W_2^l}^2 = \int_{|p| < M} dp (1 + |p|^{2l}) |\widehat{B^- \varphi^-}(p)|^2 \leq C\varepsilon^2 \|\varphi^-\|_{W_2^{l+m+1}}^2.$$

Осталось оценить

$$\begin{aligned} e^{tA^-} P_M \widehat{\varphi^-}(p) &= \widehat{\varphi_M^-}(p) \\ &\times \exp\left(t \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\exp(ip\sigma_+ y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(ip\sigma_+ y)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{m+1}}\right). \quad (33) \end{aligned}$$

Воспользуемся следующей элементарной леммой.

Лемма 1. Пусть $m = 4k - 1$ или $m = 4k$. Тогда для любого $z \geq 0$ справедливы неравенства

1. $\operatorname{Re} \left(\exp(iz\sigma_+) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(iz\sigma_+)^k}{k!} \right) \leq 0,$
2. $\operatorname{Re} \left(\exp(-iz\sigma_-) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-iz\sigma_-)^k}{k!} \right) \leq 0.$

Из (33) и леммы 1 следует неравенство

$$\|e^{tA^-} P_M\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k} \leq 1.$$

Таким образом, мы показали, что существует константа C , такая что

$$\|V_1^-\|_{W_2^l}^2 \leq Ct^2 \varepsilon^2 \|\varphi^-\|_{W_2^{l+m+1}}^2. \quad (34)$$

Аналогичным образом может быть получено неравенство

$$\|V_1^+\|_{W_2^l}^2 \leq Ct^2\varepsilon^2\|\varphi^+\|_{W_2^{l+m+1}}^2. \quad (35)$$

Завершает доказательство неравенство

$$\begin{aligned} \|V_2^\pm\|_{W_2^l}^2 &\leq \int_{|p|>M} (1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}_\pm(p)|^2 dp \\ &\leq \frac{1}{M^{2(m+1)}} \int_{|p|>M} (1+|p|^{2(l+m+1)})|\widehat{\varphi}_\pm(p)|^2 dp \\ &\leq \frac{1}{M^{2(m+1)}}\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}}^2 \leq C\varepsilon^{2(m+1)}\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}}^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Утверждение теоремы следует теперь из формул (34)–(36). \square

§6. СЛУЧАЙ $m = 4k - 1$

Мы рассматриваем задачу Коши (21), (10).

Как и раньше, через $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, мы обозначаем случайный процесс, определенный формулой (12).

Снова возьмем два комплексных числа $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{m})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{m})$ из верхней и нижней полуплоскости соответственно. Ясно, что $\sigma_+^m = \sigma_-^m = -1$.

Опишем сначала приближающую функцию для решения задачи Коши (21), (10) с оператором со знаком “плюс”. Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon^+(t, x)$, полагая

$$u_\varepsilon^+(t, x) = \mathbf{E} \left[\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t(x - \sigma_+ \xi_\varepsilon(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_- \xi_\varepsilon(t)) \right], \quad (37)$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp \left(-t \int_\varepsilon^{e\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(ip)^k \sigma_+^k x^k}{k!} \right) \frac{dx}{x^{m+1}} \right), & p \geq 0, \\ \exp \left(-t \int_\varepsilon^{e\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(ip)^k \sigma_-^k x^k}{k!} \right) \frac{dx}{x^{m+1}} \right), & p < 0. \end{cases} \quad (38)$$

Так как $P_- \varphi$ – аналитическая функция в нижней полуплоскости, а функция $P_+ \varphi$ аналитична в верхней полуплоскости, то функция $u_\varepsilon^+(t, x)$ корректно определена. Заметим также, что при таком выборе σ_\pm и m функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Приближающая функция для решения задачи Коши с оператором со знаком “минус” строится следующим образом. Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon^-(t, x)$

$$u_\varepsilon^-(t, x) = \mathbf{E} \left[(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x + \sigma_- \xi_\varepsilon(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x + \sigma_+ \xi_\varepsilon(t)) \right], \quad (39)$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp \left(-t \int_\varepsilon^{e\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-ip)^k \sigma_-^k x^k}{k!} \right) \frac{dx}{x^{m+1}} \right), & p \geq 0, \\ \exp \left(-t \int_\varepsilon^{e\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-ip)^k \sigma_+^k x^k}{k!} \right) \frac{dx}{x^{m+1}} \right), & p < 0. \end{cases} \quad (40)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geq 0$, $M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$, $u^\pm(t, x)$ – решения задач Коши (21), (10) со знаком “плюс” и “минус” соответственно, функция $u_\varepsilon^+(t, x)$ определяется формулой (37), а $u_\varepsilon^-(t, x)$ – формулой (39). Тогда существует положительная константа $C = C(m)$, такая что справедливо неравенство

$$\|u_\varepsilon^\pm(t, \cdot) - u^\pm(t, \cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leq C(t + \varepsilon^m) \varepsilon \|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Мы докажем утверждение только для уравнения (21) со знаком “плюс”, для уравнения со знаком “минус” оно доказывается аналогично. Вместо $u_\varepsilon^+(t, x)$ и $u^+(t, x)$ будем писать просто $u_\varepsilon(t, x)$ и $u(t, x)$.

Определим операторы A_ε^\pm , полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon^\pm \psi(x) = \int_\varepsilon^{e\varepsilon} \left(\psi^\pm(x - \sigma_\mp y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\psi^\pm)^{(k)}(x) \cdot (-\sigma_\mp y)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{m+1}}.$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A^\pm = A_\varepsilon^\pm, \quad B^\pm = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} P_\pm - A_\varepsilon^\pm.$$

Тогда $A^\pm + B^\pm = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} P_\pm$.

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A^\pm + B^\pm)} P_\pm\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k} \leq 1. \quad (41)$$

Далее, представим

$$e^{tA^\pm} P_M \varphi^\pm(x) - e^{t(A^\pm+B^\pm)} \varphi^\pm(x) = (e^{tA^\pm} - e^{t(A^\pm+B^\pm)}) P_M \varphi^\pm(x) - e^{t(A^\pm+B^\pm)} (I - P_M) \varphi^\pm(x) = V_1^\pm + V_2^\pm.$$

Для оценки нормы слагаемого V_1^- воспользуемся формулой (15) с $A = A^-$ и $B = B^-$, а для оценки нормы слагаемого V_1^+ – формулой (15) с $A = A^+$ и $B = B^+$. Оценим только норму слагаемого V_1^- , норма слагаемого V_1^+ оценивается аналогично.

Вычислим преобразование Фурье функции $B^- \varphi_M(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{B^- \varphi_M}(p) &= \frac{(-ip)^m}{m!} \widehat{\varphi_M^-}(p) \\ &= -\widehat{\varphi_M^-}(p) \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\exp(ip\sigma+y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(ip\sigma+y)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{m+1}}. \\ &= -\widehat{\varphi_M^-}(p) \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\exp(ip\sigma+y) - \sum_{k=0}^m \frac{(ip\sigma+y)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{m+1}}. \end{aligned}$$

Тогда справедлива оценка

$$|\widehat{B^- \varphi_M}(p)| \leq C\varepsilon |\widehat{\varphi_M^-}(p)| |p|^{m+1}, \tag{42}$$

из которой следует

$$\|B^- P_M \varphi^-\|_{W_2^i}^2 = \int_{|p| < M} dp (1 + |p|^{2l}) |\widehat{B^- \varphi^-}(p)|^2 \leq C\varepsilon^2 \|\varphi^-\|_{W_2^{l+m+1}}^2.$$

Осталось оценить

$$e^{tA^-} P_M \varphi^-(p) = \widehat{\varphi_M^-}(p) \times \exp \left(t \int_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(\exp(ip\sigma+y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(ip\sigma+y)^k}{k!} \right) \frac{dy}{y^{m+1}} \right). \tag{43}$$

Из леммы 1 следует справедливость неравенства

$$\|e^{tA^-} P_M\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k} \leq 1.$$

Таким образом, мы показали, что существует константа C , такая что

$$\|V_1^-\|_{W_2^l}^2 \leq Ct^2\varepsilon^2\|\varphi^-\|_{W_2^{l+m+1}}^2. \quad (44)$$

Аналогичным образом может быть получено неравенство

$$\|V_1^+\|_{W_2^l}^2 \leq Ct^2\varepsilon^2\|\varphi^+\|_{W_2^{l+m+1}}^2. \quad (45)$$

Завершает доказательство неравенство

$$\begin{aligned} \|V_2^\pm\|_{W_2^l}^2 &\leq \int_{|p|>M} (1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}_\pm(p)|^2 dp \\ &\leq \frac{1}{M^{2(m+1)}} \int_{|p|>M} (1+|p|^{2(l+m+1)})|\widehat{\varphi}_\pm(p)|^2 dp \\ &\leq \frac{1}{M^{2(m+1)}}\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}}^2 \leq C\varepsilon^{2(m+1)}\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}}^2. \end{aligned} \quad (46)$$

Утверждение теоремы следует теперь из формул (44)–(46). \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах*. Наука, М., 1983.
2. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*. Мир, М., 1972.
3. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы*. МЦНМО, М., 2007.
4. S. Mazzucchi, *Probabilistic representations for the solution of higher order differential equations*. — Intern. J. Part. Differ. Eq., **2013** (2013).
5. E. Orsingher, X. Zhao, *Iterated processes and their applications to higher order differential equations*. — Acta. Sin. (Engl. Ser.) **15**, No. 2 (1999), 173–180.
6. М. В. Платонова, *Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана–Лиувилля*. — Теория вероятн. и ее примен. **61**, No. 3 (2016), 417–438.
7. Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Представление Леви–Хинчина одного класса знакопеременных устойчивых мер*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **361** (2008), 145–166.
8. Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностное представление решений некоторого класса эволюционных уравнений*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **384** (2010), 238–266.
9. N. V. Smorodina, M. M. Faddeev, *The Levy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications* — Acta Appl. Math. **110** (2010), 1289–1308.
10. Т. Funaki, *Probabilistic construction of the solution of some higher order parabolic differential equation*. — Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **55**, No. 5 (1979), 176–179.

11. K. Hochberg, *A signed measure on path space related to Wiener measure.* — Ann. Probab. **6**, No. 3 (1978), 433–458.

Platonova M. V. A probabilistic representation of the Cauchy problem solution for an evolution equation with the differential operator of the order greater than 2.

Let m be a positive integer. We construct a probabilistic representation of the Cauchy problem solution for the high-order heat-type equation $\frac{\partial u}{\partial t} = c_m \frac{\partial^m u}{\partial x^m}$.

Санкт-Петербург, Россия,
199178, 14 линия В.О., дом 29Б СПбГУ,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева
E-mail: mariyaplat@rambler.ru

Поступило 24 октября 2016 г.