Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

Е. Л. Майстренко

ОЦЕНКА АБСОЛЮТНОЙ ПОСТОЯННОЙ В НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ РАВНОМЕРНОГО РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В настоящей работе оценивается сверху абсолютная постоянная в оценке близости распределений последовательных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением F, причем 0 является q-квантилью распределения F, т.е. выполнены неравенства $F\{(-\infty, 0)\} \leqslant q$ и $F\{(0, \infty)\} \leqslant 1 - q$, где $0 \leqslant q \leqslant 1$. В работе [1] приведена следующая оценка равномерного расстояния между функциями распределения (степени распределений понимаются в смысле свертки):

$$\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant \frac{c}{\sqrt{n \min\{q, 1-q\}}} \leqslant \frac{c}{\sqrt{nq(1-q)}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $\rho(F, G) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)|$, а c – абсолютная постоянная. Зависимость от q в данном неравенстве является правильной, так как в случае

$$\mathbf{P}(\xi = -1) = 1 - \mathbf{P}(\xi = 1) = q$$

справедлива аналогичная нижняя оценка, см. [1, с. 111]. Отметим, что F^n является распределением суммы $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Первоначально неравенство (1) было опубликовано сразу для многомерного случая (см. [2]), для распределений с нулевой медианой оно появилось в работе [3].

Данная оценка основана на частном случае неравенства Колмогорова–Рогозина:

$$Q(F^n, \tau) \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n(1 - Q(F, \tau))}}, \quad \tau \geqslant 0, \tag{2}$$

Ключевые слова: равномерное расстояние, последовательные суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, оценка абсолютной постоянной.

где $Q(F,\tau) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} F\{(x, x+\tau)\}$ – функция концентрации распределения F. Значение абсолютной постоянной c_1 в соотношении (2) для более общего случая получено в работе [4]: $c_1 = 8.1320\ldots$.

Для симметричных распределений в монографии [1] имеется оценка равномерного расстояния между свертками порядка n и $n+m$, $m \in \mathbb{N}$ $\big($при фиксированном m ее порядок также $O\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)\big)$.

В монографии [1] получен еще один интересный результат: если ограничиться множеством симметричных распределений с отделенной от -1 характеристической функцией, то величина $\rho(F^n, F^{n+1})$ убывает значительно быстрее, чем в случаях выше $\big($удается заменить $\frac{1}{\sqrt{n}}$ на $O\big(\frac{1}{n}\big)\big)$. Но вычисление постоянных в этом случае весьма трудоемко, и они могут оказаться значительно больше, чем c, т.е. при достаточно небольших n оценка (1) может дать лучший результат.

Утверждение 1. *В неравенстве* (1) *в качестве абсолютной постоянной c можно взять $c_1 = 8.1320\ldots$.*

Для доказательства утверждения обратимся к доказательству неравенства (1). В нем рассматривается разность $\big|F^n(x) - F^{n+1}(x)\big|$ в предположении (с последующим избавлением от него), что $F = F_1\,\Phi_\varepsilon$, где Φ_ε – нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией $\varepsilon > 0$, F_1 – некоторое распределение, и, применяя формулу свертки к $F^{n+1}(x)$ и неравенство (2), получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
&\big|F^n(x) - F^{n+1}(x)\big| = \Big|F^n(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} F^n(x-y)\,F\{dy\}\Big| \\
&\leqslant \max\Big\{\int\limits_{y\leqslant 0} \big|F^n(x-y) - F^n(x)\big| F\{dy\}, \int\limits_{y>0} \big|F^n(x-y) - F^n(x)\big| F\{dy\}\Big\} \\
&\qquad \leqslant \max\Big\{\int\limits_{y\leqslant 0} Q\,(F^n, |y|)\,F\{dy\}, \int\limits_{y>0} Q\,(F^n, y)\,F\{dy\}\Big\} \\
&\qquad \leqslant c_1 \max\Big\{\int\limits_{y\leqslant 0} \frac{F\{dy\}}{\sqrt{n(1-Q\,(F,|y|))}}, \int\limits_{y>0} \frac{F\{dy\}}{\sqrt{n(1-Q\,(F,y))}}\Big\}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Предположим, что $q \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда

$$\int\limits_{y\leqslant 0} \frac{F\{dy\}}{\sqrt{1-Q(F,|y|)}} \leqslant \int\limits_{y\leqslant 0} \frac{dF(y)}{\sqrt{F(y)}},$$

.

$$\int\limits_{y>0} \frac{F\{dy\}}{\sqrt{1-Q(F,y)}} \leqslant \int\limits_{q<F(y)<1-q} \frac{dF(y)}{\sqrt{q}} + \int\limits_{F(y)>1-q} \frac{dF(y)}{\sqrt{1-F(y)}}.$$

Произведем замену $x = F(y)$, тогда

$$\max\Big\{\int\limits_{y\leqslant 0} \frac{F\{dy\}}{\sqrt{1-Q(F,y)}}, \int\limits_{y>0} \frac{F\{dy\}}{\sqrt{1-Q(F,y)}}\Big\}$$

$$\leqslant \max\Big\{\int\limits_{0}^{q} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \int\limits_{q}^{1-q} \frac{dx}{\sqrt{q}} + \int\limits_{1-q}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}\Big\}$$

$$= \max\Big\{2\sqrt{q}, \frac{1}{\sqrt{q}}\Big\} = \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

В случае $q > \frac{1}{2}$ можно рассмотреть распределение случайной величины $-\xi$. Для него 0 будет являться $(1-q)$-квантилью, тогда

$$\max\Big\{\int\limits_{y\leqslant 0} \frac{F\{dy\}}{\sqrt{1-Q(F,y)}}, \int\limits_{y>0} \frac{F\{dy\}}{\sqrt{1-Q(F,y)}}\Big\} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-q}}.$$

Подставляя это неравенство в соотношение (3), получаем утверждение теоремы. □

Полученный результат позволяет судить о состоятельности оценки (1). Он показывает, насколько велико должно быть n, чтобы неравенство давало содержательную оценку. Например для симметричных распределений, неравенство (1) начинает быть информативным при $n = 133$, поскольку его правая часть становится меньше единицы.

Оценка (1) может быть использована, например, при оценке равномерного расстояния между распределениями сумм случайного (не зависящего от ξ_1, ξ_2, ...) числа независимых одинаково распределенных случайных величин, см. [1, с. 110].

Аналогичная неравенству (1) оценка справедлива и для произвольного распределения, но свертка порядка n при этом сдвинута на медиану этого распределения. Также для произвольных распределений

имеется оценка вида $\frac{c(F)}{\sqrt{n}}$, но постоянная в этой оценке зависит от распределения, и вопрос о правильности этой зависимости является открытым [1].

Для конкретных распределений $c(F)$ может быть значительно меньше, чем c_1 в оценке, описанной выше. Например, если F имеет конечный третий абсолютный момент, оценку можно получить с помощью применения неравенства Берри–Эссеена (см. [5]).

Литература

1. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986).
2. А. Ю. Зайцев, *Оценка близости распределений последовательных сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **97** (1981), 83–87.
3. А. Ю. Зайцев, *Некоторые свойства n-кратных сверток распределений.* — Теория вероятн. и ее примен. **26**, No. 1 (1981), 152–156.
4. Г. Зигель, *Верхние оценки для функции концентрации в гильбертовом пространстве.* — Теория вероятн. и ее примен. **26**, No. 2 (1981), 335–349.
5. И. Г. Шевцова, *Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена–Каца.* — Теория вероятн. и ее примен. **57**, No. 2 (2010), 271–304.

Maistrenko E. L. Estimation of the constant in the inequality for the uniform distance between distributions of sequential sums of i.i.d. random variables.

Some of the known inequalities for the uniform distance between distributions of sequential sums of independent identically distributed random variables are considered. In the case where distribution F has 0 as q-quantile an upper bound for the absolute constant in the inequality is given.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: glmeist@gmail.com

Поступило 25 ноября 2016 г.