Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

Д. Крачун, Ю. Якубович

СЛУЧАЙНЫЕ РАЗБИЕНИЯ, ПОРОЖДАЕМЫЕ СЛУЧАЙНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

§1. Введение

При заданном n определим Π_n как частично упорядоченное множество разбиений множества $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ с отношением порядка $p \preceq p'$ если каждый блок разбиения p' представляет собой объединение некоторых блоков разбиения p (огрубение разбиений). Как принято в комбинаторной литературе, блоками мы называем входящие в разбиение подмножества. Хорошо известно (см. [10]), что это частично упорядоченное множество представляет собой решетку, то есть для любых двух разбиений $p_1, p_2 \in \Pi_n$ однозначно определены инфимум $\inf\{p_1, p_2\}$ и супремум $\sup\{p_1, p_2\}$. А именно, $\inf\{p_1, p_2\}$ представляет собой разбиение на все непустые пересечения блоков p_1 и p_2, тогда как $\sup\{p_1, p_2\}$ является самым точным из разбиений, блоки которого содержат блоки разбиений p_1 и p_2 целиком, то есть его блоки есть объединения тех блоков p_1, в которых находятся элементы, попадающие в один блок p_2.

Всякое отображение $\phi : [n] \to [n]$ порождает разбиение p_ϕ множества $[n]$ на непустые прообразы ϕ: $[n] = \cup_{i:\phi^{-1}(i)\neq\varnothing}\phi^{-1}(i)$. В этой работе мы изучаем случайные разбиения p_ϕ множества $[n]$, индуцированные случайным выбором отображения ϕ с равными вероятностями среди всех отображений $[n] \to [n]$.

Мы изучаем свойства $\inf_{1\leqslant i\leqslant t} p_i$ и $\sup_{1\leqslant i\leqslant t} p_i$ при независимо выбранных разбиениях p_i. В основном мы интересуемся вероятностями того, что $\inf_i p_i$ окажется равным минимальному разбиению $p_{\min} = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ и что $\sup_i p_i$ окажется равным максимальному разбиению $p_{\max} = \{[n]\}$. Аналогичные вопросы для случая, когда разбиения

Ключевые слова: случайное разбиение, случайное отображение, решетка разбиений множества.

Первый автор был поддержан программой социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпром нефть”.

выбираются равномерно среди всех разбиений из Π_n, детально изучены в [8], см. также [1], а также для других конечных решеток с равномерной мерой [2, 3].

Чтобы не загромождать обозначения, мы не используем знак целой части $\lfloor \cdot \rfloor$ в случаях, когда он необходим. Если число a по контексту должно быть целым, скажем, это количество каких-то объектов или граница суммирования, запись a следует понимать как $\lfloor a \rfloor$.

В разделе 2 мы исследуем инфимум нескольких случайных разбиений; частично эти результаты сформулированы Б. Питтелем [8], и мы представляем доказательства для полноты изложения. В разделе 3 представлены некоторые известные факты о числах Стирлинга второго рода. Раздел 4 посвящен супремуму случайных разбиений. В последнем разделе мы изучаем максимальный размер блока в $\sup_{1 \leqslant i \leqslant t} p_i$ при фиксированном t.

§2. Инфимум нескольких разбиений

В этом разделе мы изучаем достаточно простой вопрос о поведении $\inf\{p_{\phi_1}, \dots, p_{\phi_t}\}$, где $\phi_1, \dots, \phi_n$ суть независимо выбранные случайные отображения из $[n]$ в $[n]$. Пороговое значение для t оказывается равным 2: при $t > 2$ вероятность того, что $\inf_i p_{\phi_i} = p_{\min}$ стремится к 1 при $n \to \infty$, тогда как при $t = 2$ эта вероятность сходится к $e^{-1/2}$. Очевидно, первый факт при $t > 3$ следует из этого утверждения при $t = 3$. Сформулируем и докажем эти результаты.

Теорема 1. *Предположим, что три отображения $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : [n] \to [n]$ выбраны независимо и равномерно среди всех таких отображений. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(\inf\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}, p_{\phi_3}\} = p_{\min}) = 1.$$

Доказательство. Если $p := \inf\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}, p_{\phi_3}\} \neq p_{\min}$, то, очевидно, как минимум два элемента $[n]$ лежат в одном блоке разбиения p. Пусть D – множество всех пар $\{i, j\}$, таких что $i \neq j$ и лежат в одном блоке разбиения p. Тогда

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\big[\inf\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}, p_{\phi_3}\} \neq p_{\min}\big] \\ &\qquad \leqslant \mathbf{E}\big[|D|\big] = \binom{n}{2} \mathbf{P}[1 \text{ и } 2 \text{ попадают в один блок разбиения } p]. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем $|D|$ обозначает размер конечного множества D. Последняя вероятность явно находится и равна $(\mathbf{P}\,[\phi_1(1) = \phi_1(2)])^3 = n^{-3}$, что дает

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}[\inf\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}, p_{\phi_3}\} = p_{\min}]\\ &\quad = 1 - \mathbf{P}[\inf\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}, p_{\phi_3}\} \neq p_{\min}] \geqslant 1 - \binom{n}{2} n^{-3} \to 1. \qquad \square\end{aligned}$$

Идея доказательства следующего результата представлена в [8], и мы приводим его здесь для полноты.

Теорема 2. *Предположим, что два отображения $\phi_1, \phi_2 : [n] \to [n]$ выбраны независимо и равномерно среди всех таких отображений. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}[\inf\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}\} = p_{\min}] = \mathrm{e}^{-1/2}.$$

Доказательство. Обозначим $p = \inf\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}\}$. Пусть A – это множество двухэлементных блоков в p, а B – множество троек $\{i, j, k\}$, таких что i, j и k лежат в одном блоке p. Заметим, что

$$\mathbf{E}\,[|B|] = \binom{n}{3} \mathbf{P}[1,\ 2 \text{ и } 3 \text{ лежат в одном блоке } p] = \binom{n}{3} n^{-6} < n^{-3}.$$

Значит, с вероятностью как минимум $1 - n^{-3}$ все блоки разбиения p имеют размер 1 или 2. Найдем теперь факториальные моменты количества $|A|$ блоков длины 2. При любом фиксированном $k \geqslant 0$ получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\binom{|A|}{k}\right] &= \frac{1}{k!} \prod_{s=0}^{k-1} \binom{n-2s}{2} \cdot \mathbf{P}[\{1,2\}, \ldots \{2k-1, 2k\} - \text{блоки в } p]\\ &= \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \frac{n^{2k}}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{1}{n^{2k}} \to \frac{1}{2^k \cdot k!}, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Правая часть представляет собой соответствующие моменты для распределения Пуассона с параметром $1/2$, и в силу [6, теорема 6.7] $|A|$ сходится к нему по распределению. В частности, $\mathbf{P}[|A| = 0] \to \mathrm{e}^{-1/2}$. $\square$

§3. Некоторые свойства чисел Стирлинга второго рода

Напомним, что числом Стирлинга второго рода $S(n, k)$ называется количество разбиений множества $[n]$, в которых в точности k блоков.

Понятно, что количество сюръективных отображений $[n]$ на $[k]$ равняется $S(n,k)\cdot k!$, поскольку каждое такое отображение порождает разбиение $[n]$ на k блоков. Мы не будем напрямую использовать следующий хорошо известный факт и его следствие, но полезно иметь его в виду.

Лемма 3.1 ([7, теорема. 3.2]). *При фиксированном n числа Стирлинга второго рода $S(n,k)$ образуют логарифмически вогнутую последовательность по k, то есть при всех $k=2,\dots,n-1$ выполняется неравенство*

$$S(n,k)^2 \geqslant S(n,k-1)\cdot S(n,k+1).$$

Следствие 3.1. *При любом натуральном n отношение $\frac{S(n,k-1)}{S(n,k)}$ не убывает по k.*

Для доказательство следующей леммы о числах Стирлинга второго рода нам потребуется так называемый принцип многозначных отображений.

Принцип многозначных отображений. Пусть f – многозначное отображение конечного множества S в конечное множество T. При $t\in T$ будем писать $f^{-1}(t):=\{s\in S : t\in f(s)\}$. Тогда

$$\frac{|S|}{|T|}\leqslant\frac{\max_{t\in T}|f^{-1}(t)|}{\min_{s\in S}|f(s)|}.$$

Лемма 3.2. *Для любых натуральных чисел $l\leqslant k$ выполнено неравенство*

$$\frac{S(k,l-1)}{S(k,l)}\leqslant\frac{l(l-1)}{2(k-l+1)}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}_k^l$ есть множество разбиений $[k]$ на l блоков. Рассмотрим многозначное отображение $\tau:\mathbb{A}_k^l\to\mathbb{A}_k^{l-1}$, которое берет разбиение $p\in\mathbb{A}_k^l$ и склеивает каждую пару его блоков. Тогда каждый элемент из $\mathbb{A}_k^l$ имеет $\binom{l}{2}$ образов. Предположим, что размеры блоков разбиения $q\in\mathbb{A}_k^{l-1}$ суть $x_1,x_2,\dots,x_{l-1}$. Тогда $|f^{-1}(q)|$ равняется $\sum\limits_{s=1}^{l-1}(2^{x_s-1}-1)$. Действительно, $|f^{-1}(q)|$ есть количество способов разбить один из блоков q на два, а количество способов разбить блок размера x на два есть $2^{x-1}-1$. Поскольку $\sum\limits_{s=1}^{l-1}(2^{x_s-1}-1)\geqslant\sum\limits_{s=1}^{l-1}(x_s-1)=$

$k-l+1$, принцип многозначных отображений дает

$$\frac{S(k,l-1)}{S(k,l)} = \frac{|\mathbb{A}_k^{l-1}|}{|\mathbb{A}_k^l|} \leqslant \frac{l(l-1)}{2(k-l+1)}. \qquad \square$$

Замечание 1. Неравенство (1) асимптотически точно при $l = o(\sqrt{k})$, см. [5].

Иногда мы будем использовать более слабую оценку, получающуюся как тривиальное следствие.

Следствие 3.2. *Для всех натуральных $l \leqslant k$ выполняется неравенство*

$$\frac{S(k,l-1)}{S(k,l)} \leqslant \frac{k^2}{2}.$$

В доказательстве теоремы 7 нам понадобится следующая лемма, см. [11, следствие 5].

Лемма 3.3. *Пусть k зависит от n так, что $k/n = c + o(1)$ при $n \to \infty$, где $c \in (0,1)$. Тогда для $S(n,k)$ верно асимптотическое соотношение*

$$S(n,k) = n^{n-k} \cdot \mathrm{e}^{g(c)\cdot n + o(n)}, \qquad n \to \infty,$$

где $g(c) = c + \ln\gamma + (\gamma - c)\cdot\ln(\gamma - c) - \gamma\cdot\ln\gamma$, а γ есть единственное решение уравнения $\gamma\cdot(1-\mathrm{e}^{-1/\gamma}) = c$.

Замечание 2. В [11] приводится более точное асимптотическое соотношение при $k = cn + o(n^{2/3})$. Чтобы перейти к случаю $k = cn + o(n)$, можно использовать лемму 3.2.

§4. Супремум нескольких разбиений

Перейдем теперь к изучению супремума нескольких случайных разбиений. Предположим, что отображения $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_t : [n] \to [n]$ выбраны независимо и равномерно среди всех таких отображений. Мы интересуемся вероятностью того, что $p := \sup_{1\leqslant i\leqslant t} p_{\phi_i}$ равняется $p_{\max} = \{[n]\}$. В этом случае пороговым значением t является $\ln(n)$. Это означает, что если $t = t(n) = \ln(n) - w(n)$, где $w(n) \to \infty$ сколь угодно медленно, то $\mathbf{P}[p = p_{\max}] \to 0$, тогда как если $t = t(n) = \ln(n) + w(n)$, то $\mathbf{P}[p = p_{\max}] \to 1$. Начнем со следующего утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть M есть количество одноэлементных блоков в* $\sup\{p_{\phi_1},\dots,p_{\phi_t}\}$. *Тогда*

$$\mathbf{E}[M] = n\cdot \mathrm{e}^{-t} + O\big(t\cdot \mathrm{e}^{-t}\big), \qquad \mathbf{D}[M] = O\big(n\cdot \mathrm{e}^{-t}\big), \qquad n\to\infty,$$

где обе функции $O(\cdot)$ равномерны по $t = 1,\dots,2\ln(n)$.

Доказательство. В силу симметрии

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[M] &= n\cdot \mathbf{P}[\{1\} \text{ образует одноэлементный блок в } p]\\ &= n\cdot\Big(\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n-1}\Big)^{t}.\end{aligned}$$

Поэтому, разлагая разность t–х степеней в произведение, получаем

$$\mathbf{E}[M] - n\mathrm{e}^{-t} = n\Big[\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n-1} - \mathrm{e}^{-1}\Big]\sum_{s=0}^{t-1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{s(n-1)}\mathrm{e}^{s-t+1}.$$

При $n\to\infty$ разность в квадратных скобках имеет порядок $O(1/n)$, тогда как каждое слагаемое ограничено сверху значением

$$\mathrm{e}^{-t+1}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{-s} \sim \mathrm{e}^{-t+1}$$

равномерно по $s < t \leqslant 2\ln n$. Аналогично,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\binom{M}{2}\Big] &= \binom{n}{2}\cdot \mathbf{P}[\{1\} \text{ и } \{2\} \text{ являются одноэлементными блоками в } p]\\ &= \binom{n}{2}\cdot\Big(\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)^{n-2}\Big)^{t} = \binom{n}{2}\cdot \mathrm{e}^{-2t} + O\big(nt\mathrm{e}^{-2t}\big)\end{aligned}$$

при $n\to\infty$, где оценка получается таким же разложением разности t–х степеней. Значит

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[M] &= 2\cdot\mathbf{E}\Big[\binom{M}{2}\Big] + \mathbf{E}[M] - (\mathbf{E}[M])^2\\ &= n(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}) + O(nt\mathrm{e}^{-2t}) + O(t\mathrm{e}^{-t}),\end{aligned}$$

и правая часть может быть записана как $O(n\mathrm{e}^{-t})$ при $1\leqslant t\leqslant 2\ln(n)$. □

Следствие 4.1. *При всех $\varepsilon\in(0,1)$ и $t = t(n)$, таких что $t - \ln(n)\to -\infty$, для количества M одноэлементных блоков в* $\sup\{p_{\phi_1},\dots,p_{\phi_t}\}$ *выполняется*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\big[M\leqslant(1-\varepsilon)n\mathrm{e}^{-t}\big] = 0.$$

Доказательство. Утверждение следует из найденной в лемме 4.1 асимптотики применением неравенства Чебышева: поскольку $\mathbf{E}[M] - n\mathrm{e}^{-t} = O(t\mathrm{e}^{-t})$, то при достаточно больших n

$$\mathbf{P}[M \leqslant (1-\varepsilon)n\mathrm{e}^{-t}] \leqslant \mathbf{P}[|M - \mathbf{E}[M]| \geqslant \varepsilon n\mathrm{e}^{-t}(1 + O(t/n))] \leqslant \frac{\mathbf{D}[M]}{\varepsilon^2 n^2 \mathrm{e}^{-2t}(1 + O(t/n))^2}.$$

Правая часть неравенства есть $O(\mathrm{e}^t/n)$ и стремится к нулю при сделанных в условии следствия предположениях на t. □

Теперь сформулируем и докажем результат для случая

$$t - \ln(n) \to -\infty.$$

Теорема 3. *Пусть функция $w : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такова, что $\lim_{n\to\infty} w(n) = \infty$ и $w(n) < \ln(n)$. Предположим, что $t = t(n) = \ln(n) - w(n)$ является целым, и выберем отображения $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_t : [n] \to [n]$ независимо и равномерно среди всех таких отображений. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}[\sup\{p_{\phi_1}, \ldots, p_{\phi_t}\} = p_{\max}] = 0.$$

Доказательство. Обозначим $p := \sup\{p_{\phi_1}, \ldots, p_{\phi_t}\}$ и пусть M обозначает число одноэлементных блоков в p. Согласно следствию 4.1, вероятность того, что $M = 0$, стремится к нулю, а если $M > 0$, то $p \neq p_{\max}$. □

Чтобы доказать, что при $t = \ln(n) + w(n)$ разбиение

$$p := \sup\{p_{\phi_1}, \ldots, p_{\phi_t}\}$$

с большой вероятностью равняется $p_{\max}$, мы используем следующие три леммы. Первая и вторая утверждают, что мала вероятность наличия в p блоков размера, не превосходящего $\sqrt{n/2}$, и размера от $\sqrt{n/2}$ до $\ln n \cdot \sqrt{n}$, соответственно. Третья показывает, что в p с малой вероятностью найдутся два блока размера более $\ln n \cdot \sqrt{n}$.

Лемма 4.2. *Пусть функция $w : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $\lim_{n\to\infty} w(n) = \infty$ и $w(n) < \ln(n)$. Предположим, что*

$$t = t(n) = \ln(n) + w(n)$$

является целым и выберем отображения $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_t : [n] \to [n]$ независимо и равномерно среди всех таких отображений. Пусть $p :=$

$\sup\{p_{\phi_1}, \ldots, p_{\phi_t}\}$. *Тогда, для достаточно больших* n,

$$\mathbf{P}\left[p \text{ имеет блок не превосходящего } \sqrt{n/2} \text{ размера}\right] < 9 \cdot \mathrm{e}^{-w(n)}. \quad (2)$$

Доказательство. Вероятность того, что p имеет блок размера k, можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[p \text{ имеет блок размера } k] &\leqslant \binom{n}{k} \cdot \mathbf{P}[\{1, 2, \ldots, k\} \text{ является блоком } p] \\ &\leqslant \binom{n}{k} \left(\mathbf{P}[\phi(a) \neq \phi(b) \text{ при всех } a \leqslant k < b]\right)^t.\end{aligned}$$

При фиксированном l количество отображений ϕ, таких что $\phi(a) \neq \phi(b)$ при всех $a \leqslant k < b$ и образ $\{1, 2, \ldots, k\}$ под действием ϕ содержит l элементов, равняется $\binom{n}{l} \cdot l! \cdot S(k, l) \cdot (n-l)^{n-k}$. Поэтому приведенную выше оценку можно переписать в терминах чисел Стирлинга второго рода:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[p \text{ имеет блок размера } k] &\leqslant \binom{n}{k} \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{n^n} \cdot \binom{n}{l} \cdot l! \cdot S(k, l) \cdot (n-l)^{n-k}\right)^t \\ &\leqslant \binom{n}{k} \left(\sum_{l=1}^{k} n^{l-n} \cdot S(k, l) \cdot (n-l)^{n-k}\right)^t. \quad (3)\end{aligned}$$

Оценим сумму в правой части (3). Обозначим $n^{l-n} \cdot S(k, l) \cdot (n-l)^{n-k}$ как $f_k(l)$. Тогда при $k \leqslant \sqrt{n/2}$, используя элементарные неравенства $(1-x)^{1/x} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ и $-k \ln(1-x) \leqslant \alpha k x \leqslant \ln(1 + \beta k x)$, справедливые при $\alpha > 1$, $\beta = 2(\mathrm{e}^{\alpha/2} - 1)$, $0 \leqslant kx \leqslant 1/2$ и достаточно малых $x = k/n$, получаем, что для достаточно больших n выполняется

$$f_k(k) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k} \leqslant \mathrm{e}^{-k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{-k} \leqslant \mathrm{e}^{-k} \left(1 + \frac{2\,k^2}{n}\right).$$

Теперь покажем, что если l убывает от k до 1, то $f_k(l)$ убывает достаточно быстро. А именно, при $2 \leqslant l \leqslant k \leqslant \sqrt{n/2}$ имеем

$$\frac{f_k(l-1)}{f_k(l)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{S(k, l-1)}{S(k, l)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-l}\right)^{n-k} \leqslant \frac{\mathrm{e} \cdot k^2}{2n} < 1. \quad (4)$$

В неравенстве мы использовали следствие 3.2. Собирая эти оценки вместе и вспоминая, что $t = \ln(n) + w(n) \leqslant 2\ln(n)$, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[p \text{ имеет блок размера } k] &\leqslant \binom{n}{k}\left(\sum_{l=1}^{k} n^{l-n}\cdot S(k,l)\cdot(n-l)^{n-k}\right)^t \\
&\leqslant \binom{n}{k}\left(\sum_{s=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-k}\left(1+\frac{2\,k^2}{n}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{e}\cdot k^2}{2n}\right)^s\right)^t \\
&\leqslant \frac{n^k}{k!}\left(\frac{4\,\mathrm{e}^{-k}}{4-\mathrm{e}}\left(1+\frac{2\,k^2}{n}\right)\left(1-\frac{\mathrm{e}\cdot k^2}{2n}\right)^{-1}\right)^t \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-k\cdot w(n)}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\left(1+\frac{5\,k^2}{n}\right)^{2\ln n} \leqslant \frac{5}{k^2}\cdot\mathrm{e}^{-w(n)}.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство выполняется для всех достаточно больших n и любых $k \leqslant \sqrt{n/2}$. Действительно, при $k < n^{1/4}$ и достаточно больших n верно $\left(1+\frac{5k^2}{n}\right)^{2\ln n} \leqslant 2$, и неравенство справедливо. В противном случае при $n^{1/4} \leqslant k \leqslant \sqrt{n/2}$ для достаточно больших n получаем $\frac{1}{(k-2)!}\cdot\left(1+\frac{5k^2}{n}\right)^{2\ln n} \leqslant \frac{1}{(n^{1/4}-2)!}\cdot(7/2)^{2\ln n} < 1$. Суммируя по всем $k \leqslant \sqrt{n/2}$, заключаем, что (2) выполняется. □

Лемма 4.3. *Пусть функция $w : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $\lim_{n\to\infty} w(n) = \infty$ и $w(n) < \ln(n)$. Предположим, что $t = t(n) = \ln(n) + w(n)$ целое, выберем отображения $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_t : [n] \to [n]$ независимо и равномерно среди всех таких отображений и положим $p := \sup\{p_{\phi_1}, \ldots, p_{\phi_t}\}$. Тогда при достаточно больших n*

$$\mathbf{P}\left[p \text{ имеет блок размера не менее } \sqrt{n/2} \text{ и не более } \ln n\cdot\sqrt{n}\right] < \mathrm{e}^{-n^{1/2}}.$$

Доказательство. Мы можем предполагать, что n достаточно велико. Зафиксируем k между $\sqrt{n/2}$ и $\ln(n)\cdot\sqrt{n}$ и оценим вероятность того, что p содержит блок размера k. Аналогично оценке (3), получаем

$$\mathbf{P}[p \text{ имеет блок размера } k] \leqslant \binom{n}{k}\left(\sum_{l=1}^{k} n^{l-n}\cdot S(k,l)\cdot(n-l)^{n-k}\right)^t.$$

Оценим теперь сумму в скобках, на этот раз другим способом. Снова обозначим $n^{l-n} \cdot S(k,l) \cdot (n-l)^{n-k}$ через $f_k(l)$. Тогда

$$f_k(k) = \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{n-k} \leqslant e^{-k} \cdot \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{-k} \leqslant \mathrm{e}^{-k} \cdot \mathrm{e}^{2k^2/n}. \tag{5}$$

Теперь покажем, что если l убывает от k до 1, то $f_k(l)$ не растет слишком долго. А именно, при $2 \leqslant l \leqslant k$ выполняется

$$\begin{aligned} \frac{f_k(l-1)}{f_k(l)} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{S(k,l-1)}{S(k,l)} \cdot \Big(1 + \frac{1}{n-l}\Big)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{\mathrm{e}}{n} \cdot \frac{S(k,l-1)}{S(k,l)} \leqslant \frac{\mathrm{e} \cdot k^2}{2n \cdot (k-l+1)}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство верно по лемме 3.2. Отсюда видим, что $f_k(l-1) \leqslant f_k(l)$ при всех $l \leqslant k - \frac{2k^2}{n}$. Поэтому $\max_l\{f_k(l)\}$ не превосходит $f_k(k) \cdot \big(\frac{\mathrm{e} \cdot s}{2}\big)^{2s}$, где $s := \frac{k^2}{n} \leqslant (\ln n)^2$. Используя эту оценку, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[p \text{ имеет блок размера } k] &\leqslant \binom{n}{k} \Big(\sum_{l=1}^{k} n^{l-n} \cdot S(k,l) \cdot (n-l)^{n-k} \Big)^t \\ &= \binom{n}{k} \Big(\sum_{l=1}^{k} f_k(l) \Big)^t \leqslant \binom{n}{k} \Big(k \cdot \max_l\{f_k(l)\} \Big)^t \\ &\leqslant \frac{n^k}{k!} \Big(\mathrm{e}^{-k+2k^2/n} \cdot k \cdot (2s)^{2s} \Big)^t \\ &= \frac{1}{k!} \big(\mathrm{e}^{2s} \cdot k \cdot (2s)^{2s} \big)^t \cdot \frac{n^k}{\mathrm{e}^{kt}} \\ &\leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{k \ln k/2}} \Big(C \cdot n \cdot \mathrm{e}^{s^2} \Big)^t \\ &\leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{n/2} \ln(n/2)/2}} \Big(C \cdot n \cdot \mathrm{e}^{(\ln n)^4} \Big)^{2 \ln n} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{2n} + 4 \cdot (\ln n)^5} \\ &\leqslant \frac{1}{n} \cdot \mathrm{e}^{-n^{1/2}}. \end{aligned}$$

Эта оценка верна при достаточно больших n; возникшая в ходе вычислений константа C есть максимум $\frac{(2se)^{2s}}{\mathrm{e}^{s^2}}$ по $s \in \mathbb{R}_+$. Наконец, суммируя по всем $k \leqslant \ln n \cdot \sqrt{n}$ и замечая, что $\ln(n)/\sqrt{n} < 1$ при всех n, убеждаемся в справедливости утверждения леммы. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть p' – фиксированное разбиение множества $[n]$, все блоки которого имеют размер не меньше $\ln n \cdot \sqrt{n}$. Если отображение $\phi : [n] \to [n]$ выбрано равномерно среди всех таких отображений, то для достаточно больших n*

$$\mathbf{P}[\sup\{p_\phi, p'\} \neq p_{\max}] < n^2 \cdot \mathrm{e}^{-(\ln n)^2/2}.$$

Доказательство. Если $\sup\{p_\phi, p'\} \neq p_{\max}$, то в p' найдутся два блока $\{x_1, x_2, \ldots, x_a\}$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_b\}$, такие что p_ϕ не "склеивает" их, то есть $\phi(x_i) \neq \phi(y_j)$ при любых $i \leqslant a$ и $j \leqslant b$. Покажем, что это маловероятное событие для фиксированных двух блоков. Достаточно предположить, что размер обоих блоков есть $t = \ln n \cdot \sqrt{n}$. Поскольку в p' не более $\sqrt{n}$ блоков, получаем оценку

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}[\sup\{p_\phi, p'\} \neq p_{\max}] \\ &\quad \leqslant n \cdot \mathbf{P}\big[\phi(\{1, 2, \ldots, t\}) \cap \phi(\{t+1, t+2, \ldots, 2t\}) = \varnothing\big]. \end{aligned} \tag{6}$$

Вероятность в правой части равняется

$$\frac{1}{n^t} \sum_{k=1}^{t} \binom{n}{k} \cdot S(t,k) \cdot k! \cdot \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^t \leqslant \sum_{k=1}^{t} n^{k-t} \cdot S(t,k) \cdot \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^t.$$

Обозначим $n^{k-t} \cdot S(t,k) \cdot \big(1 - \frac{k}{n}\big)^t$ как $s_t(k)$, тогда $s_t(t) = \big(1 - \frac{t}{n}\big)^t$ и, используя лемму 3.2, получаем

$$\frac{s_t(k-1)}{s_t(k)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{S(t,k-1)}{S(t,k)} \cdot \Big(1 + \frac{1}{n-k}\Big)^t \leqslant \frac{2}{n} \cdot \frac{t^2}{2(t-k+1)}.$$

Эта величина меньше 1 при всех $k < t - (\ln n)^2$, поэтому максимальное значение $\max_l\{s_t(l)\}$ достигается при некотором $k = k_0 > t - (\ln n)^2$.

Это дает следующую оценку:

$$\begin{aligned}
\max_{1\leqslant l\leqslant t}\{s_t(l)\} &= s_t(k_0) = s_t(t)\cdot\frac{s_t(t-1)}{s_t(t)}\cdots\frac{s_t(k_0)}{s_t(k_0+1)}\\
&\leqslant s_t(t)\cdot\prod_{l=k_0+1}^{t}\left(\frac{t^2}{n}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n-l}\right)^t}{2(t-l+1)}\right)\\
&= \left(1-\frac{t}{n}\right)^t\cdot\left(1+\frac{t-k_0}{n-t}\right)^t\cdot\left(\frac{t^2}{n}\right)^{t-k_0}\cdot\frac{1}{2^{t-k_0}\cdot(t-k_0)!}\\
&\leqslant \left(1-\frac{k_0}{n}\right)^t\cdot\left(\frac{\mathrm{e}\cdot(\ln n)^2}{2(t-k_0)}\right)^{t-k_0}\\
&= (1+o(1))\cdot\mathrm{e}^{-(\ln n)^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}\cdot(\ln n)^2}{2(t-k_0)}\right)^{t-k_0}
\end{aligned}$$

при $n\to\infty$, поскольку $\ln\left(1-\frac{k_0}{n}\right)^t = -\frac{tk_0}{n}+O(tk_0^2/n^2)$, а $(\ln n)^2 - (\ln n)^3/\sqrt{n}\leqslant tk_0/n\leqslant(\ln n)^2$ в силу определения t и k_0. Положим x равным $\frac{t-k_0}{(\ln n)^2}$; тогда $x\leqslant 1$ и при достаточно больших n можно записать

$$s_t(k_0)\leqslant 2\cdot\mathrm{e}^{-(\ln n)^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}\cdot(\ln n)^2}{2(t-k_0)}\right)^{t-k_0} = 2\cdot\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{e}}{2x}\right)^x}{\mathrm{e}}\right)^{(\ln n)^2}\leqslant 2\cdot\mathrm{e}^{-(\ln n)^2/2},$$

поскольку $\left(\frac{\mathrm{e}}{2x}\right)^x\leqslant\sqrt{\mathrm{e}}$ при $x\geqslant 0$. Отсюда немедленно следует, что вероятность в правой части (6) не превосходит $2t\cdot\mathrm{e}^{-(\ln n)^2/2}$, и значит

$$\mathbf{P}[\sup\{p_\phi,p'\}\neq p_{\max}]\leqslant n\cdot 2t\cdot\mathrm{e}^{-(\ln n)^2/2}<n^2\cdot\mathrm{e}^{-(\ln n)^2/2}. \qquad \square$$

Теперь мы готовы доказать, что супремум существенно большего, чем $\ln n$, набора случайных разбиений с большой вероятностью равняется $p_{\max}$.

Теорема 4. *Пусть функция $w:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ такова, что $\lim_{n\to\infty}w(n)=\infty$. Пусть $t=t(n)=\ln(n)+w(n)$ есть целое число; выберем отображения $\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_t:[n]\to[n]$ независимо и равномерно среди всех таких отображений. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}[\sup\{p_{\phi_1},\dots,p_{\phi_t}\}=p_{\max}]=1.$$

Доказательство. Мы можем предположить, что $w(n)<\ln n$, поскольку чем больше разбиений мы берем, тем больше шансов, что их супремум равняется $p_{\max}$. Леммы 4.2 и 4.3 показывают, что при

$n \to \infty$ в разбиении $p' := \sup\{p_{\phi_2}, \ldots, p_{\phi_t}\}$ нет блоков размера, меньшего $\ln n \cdot \sqrt{n}$, с вероятностью $1 - o(1)$. Поэтому по лемме 4.4 получаем, что $p = \sup\{p', p_{\phi_1}\} = p_{\max}$ с вероятностью $1 - o(1)$. □

§5. Максимальный размер блока

В этом разделе мы изучаем типичный вид разбиения

$$p = \sup\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}, \ldots, p_{\phi_t}\}$$

при фиксированном t и большом n. При $t = 3, 4$, с большой вероятностью в p найдется блок размера $\Omega(n)$, как показано в теоремах 7 и 5, причем первая из них использует значительно более точную асимптотику чисел $S(n, k)$. Теорема 6 утверждает, что при больших t со стремящейся к 1 по n вероятностью в разбиении p найдется блок размера $n - \varepsilon_t \cdot n$, где ε_t экспоненциально убывает по t. Мы также показываем в теореме 8, что, в отличие от случая $t = 3$, супремум двух случайных разбиений большого числа n с близкой к 1 вероятностью не содержит блоков размера $\Omega(n)$.

В дальнейшем нам понадобится понятие k-свободного разбиения. При каждом $k < n$ определим множество E_k как $\{p \,|\, \text{не найдется разбиения } p' \succeq p, \text{ в котором имеется блок размера } k\}$. Будем называть попадающие в множество E_k разбиения *k-свободными*. Сформулируем и докажем несколько свойств k-свободных разбиений.

Лемма 5.1. *Пусть разбиение p множества $[n]$ является k-свободным при всех $k \in [a, b]$, где $a < b < n$ – натуральные числа. Тогда в p найдется блок не меньшего $b - a$ размера.*

Доказательство. Предположим противное: пусть блоки p имеют размеры $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_r < b - a$. Пусть s есть первый индекс, такой что $x_1 + \cdots + x_s \geqslant a$. Тогда $a \leqslant x_1 + \cdots + x_s = (x_1 + \cdots + x_{s-1}) + x_s \leqslant a + (b - a) = b$, что приводит к противоречию, поскольку в этом случае p не является $(x_1 + \cdots + x_s)$-свободным. □

Лемма 5.2. *Пусть разбиение p множества $[n]$ является k-свободным при всех $k \in [a, b]$, где a, b – натуральные числа, такие что $2 \cdot a \leqslant b < n$. Тогда в p найдется блок размера, большего чем b.*

Доказательство. По лемме 5.1 в p найдется блок размера, не меньшего $b - a \geqslant a$. Поскольку в p, очевидно, нет блоков размера $k \in [a, b]$, значит, этот блок содержит больше, чем b элементов. □

Лемма 5.3. *Если в разбиении p множества $[n]$ есть h одноэлементных блоков и оно b-свободно при некотором $b > h$, то в p найдется блок размера как минимум h.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение p' множества из $n-h$ элементов, полученное удалением всех блоков размера 1 из разбиения p. Легко понять, что разбиение p' k-свободно при любом $k \in [b-h, b]$. Действительно, если бы объединение каких-то блоков разбиения p' имело размер $b-k$ при некотором $k \leqslant h$, то добавляя k блоков размера 1, мы бы заключили, что объединение нескольких блоков разбиения p имеет размер b, что противоречит b-свободности. Поэтому по лемме 5.1 один из блоков разбиения p' имеет размер не меньше h. Значит, и p содержит блок размера не менее h. □

Лемма 5.4. *Пусть разбиение p множества $[n]$ k-свободно при всех $k \in [a, b]$, где натуральные a и b удовлетворяют неравенствам $2 \cdot a \leqslant b < n$. Тогда в объединении всех блоков p, размер которых как минимум a, будет не меньше $n-a$ элементов.*

Доказательство. Предположим противное. Будем называть блоки размера, не меньшего a, *большими*, а остальные блоки *маленькими*. Предположим, что во всех больших блоках находятся менее $n-a$ элементов, тогда во все маленькие попадают более a. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – это размеры маленьких блоков, тогда $x_1 + x_2 + \cdots + x_r > a$. Рассмотрим наименьший индекс i, при котором $x_1 + \cdots + x_i \geqslant a$, тогда $a \leqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_i = (x_1 + \ldots x_{i-1}) + x_i \leqslant a + a \leqslant b$, что приводит к противоречию, поскольку p по предположению является $(x_1 + \cdots + x_i)$-свободным. □

Теорема 5. *Пусть четыре отображения $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 : [n] \to [n]$ выбраны независимо и равномерно из всех таких отображений. Если $p = \sup\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}, p_{\phi_3}, p_{\phi_4}\}$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[p \text{ имеет блок с не менее чем } n/3 \text{ элементами}\right] = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим константу $c \in [\frac{1}{11}, \frac{1}{3}]$ и положим $k = c \cdot n$. Проверим, что вероятность того, что $p \notin E_k$, экспоненциально

убывает. Аналогично доказательству леммы 4.2, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[p \notin E_k] &\leqslant \binom{n}{k} \left(\mathbf{P}[\phi(a) \neq \phi(b) \text{ при всех } a \leqslant k < b]\right)^4 \\ &= \binom{n}{k} \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{n^n} \cdot \binom{n}{l} \cdot l! \cdot S(k,l) \cdot (n-l)^{n-k} \right)^4 \\ &\leqslant \binom{n}{k} \left(\sum_{l=1}^{k} n^{l-k} \cdot S(k,l) \cdot \left(1 - \frac{l}{n}\right)^{n-k} \right)^4.\end{aligned}$$

Обозначим снова $n^{l-k} \cdot S(k,l) \cdot \left(1 - \frac{l}{n}\right)^{n-k}$ за $f_k(l)$. Мы хотим оценить $\max_l \{f_k(l)\}$. В силу леммы 3.2 получаем

$$\frac{f_k(l-1)}{f_k(l)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{S(k,l-1)}{S(k,l)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-l}\right)^{n-k} \leqslant \frac{\mathrm{e} \cdot l^2}{2 \cdot n \cdot (k-l+1)},$$

так что максимум $f_k(l)$ по l при фиксированных k, n достигается при некотором $l \geqslant k/2$. Найдем оценку для $f_k(l)$:

$$f_k(l) = f_k(k) \cdot \prod_{r=l+1}^{k} \left(\frac{f_k(r-1)}{f_k(r)}\right) \leqslant f_k(k) \cdot \prod_{r=l+1}^{k} \left(\frac{\mathrm{e} \cdot r^2}{2 \cdot n \cdot (k-r+1)}\right).$$

Заметим, что при $r < k - x \cdot n$ сомножители оказываются меньше 1, где x – наименьшее решение уравнения

$$2 \cdot x = \mathrm{e} \cdot (c-x)^2. \tag{7}$$

Отбрасывая все эти сомножители, заключаем, что

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{k} f_k(l) &\leqslant k \cdot \max_l \{f_k(l)\} \leqslant k \cdot f_k(k) \cdot \prod_{r=(c-x)\cdot n}^{c \cdot n} \left(\frac{\mathrm{e} \cdot r^2}{2 \cdot n \cdot (k-r+1)}\right) \\ &= k \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{\mathrm{e}}{2 \cdot n}\right)^{xn} \cdot \left(\frac{(cn)!}{((c-x) \cdot n)!}\right)^2 \cdot \frac{1}{(xn)!}.\end{aligned}$$

Логарифмируя и деля на n, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{\ln\left(\max_l \{f_k(l)\}\right)}{n} \\ &\quad \leqslant (1-c) \cdot \ln(1-c) + x \cdot (1 - \ln 2) - x \cdot \ln n + 2 \cdot c \ln(cn) - 2 \cdot c \\ &\quad - 2 \cdot (c-x) \ln((c-x)n) + 2 \cdot (c-x) - x \cdot \ln(xn) + x + o(1).\end{aligned}$$

Все слагаемые порядка $\ln n$ магически сокращаются, и мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{\ln\Big(\sum\limits_{l=1}^{k} f_k(l)\Big)}{n} &\leqslant (1-c)\cdot\ln(1-c) + x\cdot(2-\ln 2) + 2\cdot c\ln c - 2\cdot c \\ &\qquad - 2\cdot(c-x)\ln(c-x) + 2\cdot(c-x) - x\cdot\ln x + o(1) \\ &= (1-c)\cdot\ln(1-c) - x\cdot\ln 2 + 2\cdot c\ln c \\ &\qquad - 2\cdot(c-x)\ln(c-x) - x\cdot\ln x + o(1).\end{aligned}$$

Обозначим правую часть как $\mu(c)$. Заметим, что она зависит только от c, поскольку уравнение (7) выражает x через c. Это дает следующую оценку для $\mathbf{P}[p \notin E_k]$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[p \notin E_k] &\leqslant \binom{n}{k}\cdot\left(\sum_{l=1}^{k} n^{l-k}\cdot S(k,l)\cdot\left(1-\frac{l}{n}\right)^{n-k}\right)^4 \\ &\leqslant \mathrm{e}^{n\cdot(H(c)+4\mu(c)+o(1))},\end{aligned}$$

где мы использовали обозначение для энтропии

$$H(c) = -c\cdot\ln c - (1-c)\cdot\ln(1-c). \tag{8}$$

Поэтому $\mathbf{P}[p \notin E_k]$ убывает экспоненциально, если $\lambda(c) := H(c) + 4\cdot\mu(c) < 0$, что имеет место при $c \in [0.087412, 0.340034]$. Более того, поскольку $\lambda(c)$ непрерывна, найдется $\varepsilon > 0$, такое что $\lambda(c) < -\varepsilon$ при всех $c \in [1/11, 1/3]$. Значит,

$$\mathbf{P}\left[p \notin E_k \text{ при некотором } k \in \left[\frac{n}{11}, \frac{n}{3}\right]\right] \leqslant n\cdot\mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot n}.$$

Поэтому из леммы 5.2 следует, что с не меньшей, чем $1 - n\cdot\mathrm{e}^{-\varepsilon\cdot n}$ вероятностью в p найдется блок размера как минимум $\frac{n}{3}$. □

Теорема 6. *При любом $\varepsilon \in (0, \ln(\mathrm{e}/2))$ найдется константа $C > 0$, такая что при $t > C$ выполняется следующее утверждение. Пусть отображения $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_t : [n] \to [n]$ выбираются независимо и равномерно среди всех таких отображений. Рассмотрим*

$$p = \sup\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}, \ldots, p_{\phi_t}\}$$

и обозначим L максимальный размер блока p. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t+3-\varepsilon} \leqslant \frac{L}{n} \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-t-\varepsilon}\right] = 1.$$

Доказательство. То, что $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[L > n - n\cdot \mathrm{e}^{-t-\varepsilon}\right] = 0$, мгновенно получается из следствия 4.1, поскольку оно гарантирует, что при фиксированном t имеет место $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[M \geqslant n\cdot \mathrm{e}^{-t-\varepsilon}\right] = 1$, а максимальный блок, очевидно, имеет размер, не больший, чем $n - M$.

Поэтому остается показать, что $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[L < n - \frac{n}{2}\cdot \mathrm{e}^{3-t-\varepsilon}\right] = 0$. Рассуждение здесь похоже на доказательство теоремы 5, но вычисления проще. Рассмотрим разбиение $p' = \sup\{p_{\phi_2}, p_{\phi_3}, \dots p_{\phi_t}\}$. Выбирая $k = n\cdot \mathrm{e}^{c-t}$ при некотором $c \in [2+\delta, 3]$, с малым и фиксированным $\delta > 0$, мы снова получаем

$$\mathbf{P}[p' \notin E_k] \leqslant \binom{n}{k}\left(\sum_{l=1}^{k} n^{l-k}\cdot S(k,l)\cdot\left(1-\frac{l}{n}\right)^{n-k}\right)^{t-1}.$$

Вспоминая обозначение $f_k(l)$ для l–го слагаемого, на этот раз напишем более грубую оценку: при $1 \leqslant l \leqslant k$ выполняется

$$\frac{f_k(l-1)}{f_k(l)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{S(k,l-1)}{S(k,l)}\cdot\left(1+\frac{1}{n-l}\right)^{n-k} \leqslant \frac{2\cdot k^2}{n\cdot(k-l+1)},$$

и это значение меньше 1 при $l < k - \frac{2\cdot k^2}{n} + 1$. Поэтому, используя оценку (5), при достаточно больших n получаем

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{k} f_k(l) &\leqslant k\cdot\max_l\{f_k(l)\}\\ &\leqslant k\cdot f_k(k)\cdot\prod_{r=k-k^2/n+2}^{k}\left(\frac{2k^2}{n\cdot(k-r+1)}\right)\\ &\leqslant k\cdot \mathrm{e}^{-k}\cdot \mathrm{e}^{2k^2/n}\cdot 2^{k^2/n}\cdot \mathrm{e}^{k^2/n}\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-k+4k^2/n}.\end{aligned}$$

Обозначим $\frac{k}{n} = \mathrm{e}^{c-t}$ как α. Вспоминая определение (8) величины $H(\alpha)$, имеем

$$\mathbf{P}[p' \notin E_k] \leqslant \binom{n}{k}\left(\sum_{l=1}^{k} f_k(l)\right)^{t-1} \leqslant \mathrm{e}^{n\cdot H(\alpha)}\cdot \mathrm{e}^{-(t-1)\cdot n\cdot(\alpha-4\alpha^2)}.$$

Оценка $H(\alpha) \leqslant -\alpha \ln \alpha + \alpha$ позволяет записать

$$H(\alpha) - (t-1)\cdot(\alpha - 4\alpha^2) \leqslant -\alpha \cdot \ln \alpha + \alpha - (t-1)\cdot(\alpha - 4\alpha^2)$$
$$= ((2-c) + 4\cdot(t-1)\cdot\alpha)\cdot\alpha \leqslant \frac{-\delta\cdot\alpha}{2}.$$

Последнее неравенство выполнено лишь для достаточно больших t, поскольку $2 - c < -\delta$, а $\alpha = \mathrm{e}^{c-t}$, и значит $t\cdot\alpha$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

Введем обозначение $E = \cap_{k\in[\mathrm{e}^{2+\delta-t}\cdot n, \mathrm{e}^{3-t}\cdot n]} E_k$. Тогда из доказанной оценки для $\mathbf{P}[p' \notin E_k]$ следует, что $\mathbf{P}[p' \notin E] \leqslant n\cdot \mathrm{e}^{-\delta\alpha\cdot n/2}$. При $\delta < 1 - \ln 2$, скажем, для $\delta = 1 - \ln 2 - \varepsilon$, где ε берется из формулировки теоремы, по лемме 5.4 получаем, что в объединение всех блоков разбиения $p' \in E$, которые имеют размер не меньше $c_1 n$ при $c_1 := \mathrm{e}^{2+\delta-t} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3-t-\varepsilon}$, попадет не менее $(1-c_1)\cdot n$ элементов. Наконец, рассуждая как при доказательстве леммы 4.4, видим, что в $p = \sup\{p', p_1\}$ все эти блоки "склеиваются" с вероятностью $1 - o(1)$, и, следовательно, в p найдется блок размера $(1-c_1)\cdot n$ с вероятностью, стремящейся к 1. □

Теорема 7. *Выберем три отображения $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : [n] \to [n]$ независимо и равномерно среди всех таких отображений и положим $p = \sup\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}, p_{\phi_3}\}$. Тогда при любом $c \in (0, \mathrm{e}^{-3})$ выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[p \text{ содержит блок размера не меньше } c\cdot n\right] = 1.$$

Доказательство. Согласно следствию 4.1, при любом $c \in (0, \mathrm{e}^{-3})$ и при достаточно больших n в p найдется как минимум $c\cdot n$ одноэлементных блоков с вероятностью, близкой к 1. Поэтому в силу леммы 5.3 достаточно показать, что $\mathbf{P}[p \in E_{n/2}]$ стремится к 1 при $n \to \infty$. Рассуждением, аналогичным примененному при доказательстве теоремы 5, получаем

$$\mathbf{P}[p \notin E_{n/2}] \leqslant \binom{n}{n/2} \left(\mathbf{P}[\phi(a) \neq \phi(b) \text{ при любых } a \leqslant n/2 < b]\right)^3$$
$$= \binom{n}{n/2}\left(\sum_{l=1}^{n/2} \frac{1}{n^n}\cdot\binom{n}{l}\cdot l!\cdot S(n/2, l)\cdot(n-l)^{n/2}\right)^3$$
$$\leqslant n^2\cdot\left(\sum_{l=1}^{n/2}\left(2^{n/3}\cdot\frac{n!}{n^{n/2}\cdot(n-l)!}\cdot S(n/2,l)\cdot\left(1-\frac{l}{n}\right)^{n/2}\right)^3\right).$$

В последнем неравенстве мы использовали соотношение

$$(x_1 + \cdots + x_m)^3 \leqslant m^2 \cdot (x_1^3 + \cdots + x_m^3)$$

и оценку $\binom{n}{n/2} \leqslant 2^n$. Мы хотим показать, что

$$h(l) = 2^{n/3} \cdot \frac{n!}{n^{n/2} \cdot (n-l)!} \cdot S(n/2, l) \cdot \left(1 - \frac{l}{n}\right)^{n/2}$$

экспоненциально убывает по n равномерно по l. Чтобы проверить это, запишем $l = c \cdot n/2$ при $c \in (0,1)$ и используем лемму 3.3 и асимптотическое выражение $n! = n^n \cdot \mathrm{e}^{-n+o(n)}$. Это дает

$$\begin{aligned}
\frac{\ln h(l)}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \ln\left(2^{n/3} \cdot \frac{n!}{n^{n/2} \cdot (n-l)!} \cdot S(n/2, l) \cdot \left(1 - \frac{l}{n}\right)^{n/2}\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \ln\left(2^{n/3} \cdot \left(1 - \frac{c}{2}\right)^{-n \cdot (1-c/2)} \cdot 2^{-n/2+l} \cdot \mathrm{e}^{-cn/2} \cdot \mathrm{e}^{g(c) \cdot n/2 + o(n)} \cdot \left(1 - \frac{c}{2}\right)^{n/2}\right) \\
&= \ln 2 \cdot \left(\frac{c}{2} - \frac{1}{6}\right) - \left(1 - \frac{c}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{c}{2}\right) - \frac{c}{2} + \frac{g(c)}{2} + \frac{\ln\left(1 - \frac{c}{2}\right)}{2} + o(1) \\
&= \mu(c) + o(1).
\end{aligned}$$

Здесь $g(c) = c + \ln\gamma + (\gamma - c) \cdot \ln(\gamma - c) - \gamma \cdot \ln\gamma$ и γ определяется из уравнения $\gamma \cdot (1 - \mathrm{e}^{-1/\gamma}) = c$. Остается заметить, что $\mu(c) < -\varepsilon$ при всех $c \in (0,1)$, при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$. □

Замечание 3. Оказывается, что $\max_c \mu(c)$ близок к 0, а именно: $0 > \max_c \mu(c) > -\frac{1}{500}$.

Теорема 8. *При любом $\varepsilon > 0$, если отображения $\phi_1, \phi_2 : [n] \to [n]$ выбраны независимо и равномерно среди всех таких отображений и $p = \sup\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}\}$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}[p \text{ содержит блок размера не меньше } n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}] = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим граф G на n вершинах с ребрами двух типов. Между вершинами i и j проведем ребро первого типа, если $\phi_1(i) = \phi_1(j)$, и ребро второго типа, если $\phi_2(i) = \phi_2(j)$. Возможно, вершины i и j соединены ребрами обоих типов. Из построения ясно, что блоки разбиения $p = \sup\{p_{\phi_1}, p_{\phi_2}\}$ представляют собой компоненты связности графа G. Нетрудно видеть, что, поскольку ребра каждого из типов образуют непересекающиеся клики, то если в G найдется соединяющий вершины i и j путь, то найдется и простой путь между этими вершинами, в котором типы ребер чередуются.

Зафиксируем теперь две вершины i и j в G и оценим вероятность того, что такой простой чередующийся путь существует. При заданном k вероятность того, что найдется простой чередующийся путь длины k между i и j, ограничена сверху значением $2 \cdot \frac{(n-2)!}{(n-k-1)!} \cdot n^{-k}$. Действительно, $\frac{(n-2)!}{(n-k-1)!}$ есть количество последовательностей неповторяющихся вершин $\gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}$, таких что $i = \gamma_0$ и $j = \gamma_k$, а при заданной последовательности γ вероятность того, что γ образует чередующийся путь в G есть $2 \cdot (n^{-1})^k$, поскольку вероятность того, что две вершины соединены ребром заданного типа есть $\frac{1}{n}$, и эти события независимы для разных пар вершин. Это позволяет получить оценку

$$\mathbf{P}[\text{найдется чередующийся путь между } i \text{ и } j \text{ в } G]$$
$$\leqslant 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(n-k-1)!} \cdot n^{-k} = \frac{2}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{k} \Big(1 - \frac{i}{n}\Big).$$

Сумма, стоящая в правой части, с точностью до слагаемого 1 (возникающего при $k = 0$) известна как $Q(n)$-функция Рамануджана [4], и для нее известно асимптотическое разложение [9, раздел 1.2.11.3], из которого нам нужен только главный член $Q(n) \sim \sqrt{\pi n/2}$ при $n \to \infty$. Вспоминая обозначение D из теоремы 1 для множества всех пар $\{i, j\}$, таких что $i \neq j$ и лежат в одном блоке разбиения p, видим, что $\mathbf{E}\big[|D|\big] = O(n^{3/2})$ при $n \to \infty$. Но если разбиение содержит блок размера k, то $|D| \geqslant k(k-1)/2$. Поэтому

$$\mathbf{P}\big[p \text{ содержит блок размера не меньше } n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\big] \leqslant \frac{O\big(n^{\frac{3}{2}}\big)}{\big(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\big)^2} = O(n^{-2\varepsilon}). \qquad \square$$

Литература

1. E. R. Canfield, *Meet and join within the lattice of set partitions.* — Electron. J. Combin. **8**, No. 1 (2001), Research Paper 15, 8 pp.
2. W. Y. C. Chen, D. G. L. Wang, *Minimally intersecting set partitions of type B.* — Electron. J. Combin. **17**, No. 1 (2010), Research Paper 22, 16 pp.
3. J. Engbers, A. Hammett, *Trivial meet and join within the lattice of monotone triangles.* — Electron. J. Combin. **21**, No. 3 (2014), Paper 3.13, 15 pp.
4. P. Flajolet, P. J. Grabner, P. Kirschenhofer, H. Prodinger, *On Ramanujan's Q-function.* — J. Comput. Appl. Math. **58**, No. 1 (1995), 103–116.
5. L. C. Hsu, *Note on an asymptotic expansion of the nth difference of zero.* — Ann. Math. Statist. **19** (1948), 273–277.

6. S. Janson, T. Łuczak, A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 2000.
7. O. Johnson, C. Goldschmidt, *Preserving of log-concavity on summation.* — ESAIM: Probab. Statist. **10** (2006), 206–215.
8. B. Pittel, *Where the typical set partitions meet and join.* — Electron. J. Combin. **7** (2000), Research Paper 5, 15 pp.
9. Д. Кнут, *Искусство программирования. Том* 1. *Основные алгоритмы*, Вильямс, М., 2015.
10. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, Мир, М., 1990.
11. Е. Г. Цылова, *Вероятностные методы получения асимптотических формул для обобщенных чисел Стирлинга.* — Статист. сборник, вып. 8 (1991), 165–178.

Krachun D., Yakubovich Yu. Random partitions induced by random maps.

The lattice of the set partitions of $[n]$ ordered by refinement is studied. Given a map $\phi : [n] \to [n]$, by taking preimages of elements we construct a partition of $[n]$. Suppose t partitions $p_1, p_2, \dots, p_t$ are chosen independently according to the uniform measure on the set of mappings $[n] \to [n]$. The probability that the coarsest refinement of all p_i's is the finest partitions $\{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ is shown to approach 1 for any $t \geqslant 3$ and $e^{-1/2}$ for $t=2$. The probability that the finest coarsening of all p_i's is the one-block partition is shown to approach 1 if $t(n) - \log n \to \infty$ and 0 if $t(n) - \log n \to -\infty$. The size of the maximal block of the finest coarsening of all p_i's for a fixed t is also studied.

Лаборатория им. П.Л. Чебышева
С.-Петербургский государственный университет
14 линия В.О., д. 29Б
С.-Петербург 199178, Россия
E-mail: dmitrykrachun@gmail.com

Поступило 1 ноября 2016 г.

С.-Петербургский государственный университет
Университетская наб. 7/9
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: y.yakubovich@spbu.ru