Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

В. М. Корчевский

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§1. Введение

Рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$. Положим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ для $n \geqslant 1$. Следуя [3], будем использовать обозначение Ψ_c для множества функций $\psi(x)$, таких что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\sum \frac{1}{n\psi(n)}$ сходится.

В работе [2] В. В. Петровым было найдено достаточное условие применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям независимых случайных величин с конечными дисперсиями.

Теорема A ([2]). *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями, удовлетворяющая условию*

$$\mathbf{D}\,(S_n) = O\biggl(\frac{n^2}{\psi(n)}\biggr) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c. \tag{1}$$

Тогда

$$\frac{S_n - \mathbf{E}\,S_n}{n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{2}$$

Также В. В. Петровым [5, 6] было показано, что при введении некоторых дополнительных предположений условие (1) является достаточным для (2) в отсутствие каких-либо предположений о зависимости между случайными величинами рассматриваемой последовательности.

Ключевые слова: усиленный закон больших чисел, скорость сходимости в УЗБЧ, теорема Баума–Каца, зависимые случайные величины.

Работа выполнена в рамках государственного заказа Минобрнауки России С.-Петербургскому государственному университету аэрокосмического приборостроения, проектная часть.

Теорема B ([5]). *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями. Если выполнены условия* (1) *и*

$$\mathbf{E}\,(S_n - S_m) \leqslant C(n-m) \qquad \text{для всех достаточно больших } n-m, \quad (3)$$

где C *– некоторая постоянная, то имеет место соотношение* (2).

В работе [1] получено следующее обобщение теоремы B:

Теорема C ([1]). *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность неотрицательных случайных величин с конечными моментами некоторого порядка* $p \geqslant 1$. *Если выполнены условия* (3) *и*

$$\mathbf{E}\,|S_n - \mathbf{E}\,S_n|^p = O\biggl(\frac{n^p}{\psi(n)}\biggr) \quad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c,$$

то имеет место соотношение (2).

Обобщение теоремы C с заменой классической нормировки произвольной нормирующей последовательностью получено в работе [8].

Теорема D ([8]). *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность неотрицательных случайных величин с конечными моментами некоторого порядка* $p \geqslant 1$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел. Если выполнены условия*

$$\mathbf{E}\,S_n = O(a_n)$$

и

$$\mathbf{E}\,|S_n - \mathbf{E}\,S_n|^p = O\biggl(\frac{a_n^p}{\psi(a_n)}\biggr) \quad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c, \quad (4)$$

то

$$\frac{S_n - \mathbf{E}\,S_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.}$$

Чень и Сунг [7] обобщили теорему D, заменив условие (4) следующим предположением: существует такая последовательность неотрицательных чисел $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\mathbf{E}\,|S_n - \mathbf{E}\,S_n|^p \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i$ для всех $n \geqslant 1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n / a_n^p < \infty$.

Вопрос о скорости сходимости в усиленном законе больших чисел для последовательностей случайных величин, удовлетворяющих условиям аналогичным условию (4), изучался в работах [9, 10]. Прежде чем перейти к формулировке соответствующих результатов, приведем классический результат Баума–Каца.

Теорема E (см., напр., [4]). *Пусть $p \geqslant 1$, $\alpha > 1/2$ и $\alpha p \geqslant 1$. Предположим, что $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, такая что $\mathbf{E}\,|X_1|^p < \infty$ и $\mathbf{E}\,X_1 = 0$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\mathbf{P}(|S_n| > n^{\alpha}\varepsilon) < \infty \qquad \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

Следуя [9], обозначим через Ψ_c^r множество функций $\psi(x)$, таких что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\sum n^{r-2}/\psi(n)$ сходится. Из этого определения следует, что $\Psi_c^1 = \Psi_c$. Кроме того, если $r_1 > r_2$, то $\Psi_c^{r_1} \subset \Psi_c^{r_2}$ и $\Psi_c^r \subset \Psi_c$ для любого $r \geqslant 1$.

Теорема F ([9]). *Пусть $p \geqslant 1$, $\alpha > 1/2$ и $\alpha p \geqslant 1$. Предположим, что $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных случайных величин с конечными моментами порядка p, удовлетворяющая условиям*

$$\frac{\mathbf{E}\,S_n}{n^{\alpha}} \to A \qquad \text{при } \ n \to \infty \tag{5}$$

и

$$\mathbf{E}\,|S_n - \mathbf{E}\,S_n|^p = O\biggl(\frac{n^p}{\psi(n)}\biggr) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c^p. \tag{6}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\mathbf{P}(|S_n - \mathbf{E}\,S_n| > n^{\alpha}\varepsilon) < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0. \tag{7}$$

В [9] также показано, что условие (6) в теореме F нельзя заменить более слабым условием, соответствующим замене слов "для некоторой функции $\psi(x) \in \Psi_c^p$" словами "для некоторой функции $\psi(x) \in \Psi_c$".

В настоящей работе мы обобщаем теорему F. Кроме того, мы показываем, что в случае $\alpha = 1$ условие (5) в теореме F можно ослабить.

В доказательствах теорем настоящей работы используются методы, развитые в работах [7, 9].

§2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $p \geqslant 1$, $\alpha > 1/2$ и $\alpha p \geqslant 1$. Предположим, что $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных случайных величин с конечными моментами порядка p, удовлетворяющая условию* (5). *Если существует такая последовательность неотрицательных чисел $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, что*

$$\mathbf{E}\,|S_n - \mathbf{E}\,S_n|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \quad \textit{для всех } n \geqslant 1 \tag{8}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} < \infty, \tag{9}$$

то имеет место соотношение (7).

Покажем, что теорема F является следствием теоремы 1. Предположим, что имеет место условие (6) с некоторой функцией $\psi \in \Psi_c^p$. Не умаляя общности, можем считать, что функция ψ определена в области $x > x_0$, где $0 < x_0 < 1$. Для $n \geqslant 1$ имеем

$$\mathbf{E}\,|S_n - \mathbf{E}\,S_n|^p \leqslant C\frac{n^p}{\psi(n)} \leqslant C\sum_{i=1}^{n}\frac{i^p - (i-1)^p}{\psi(i)}.$$

Положим $\gamma_n = C\left(n^p - (n-1)^p\right)/\psi(n)$, для $n \geqslant 1$. Тогда мы получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n} = C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p - (n-1)^p}{n\psi(n)} \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p-2}}{\psi(n)} < \infty.$$

Следующая теорема показывает, что в случае $\alpha = 1$ условие (5) в теореме 1 можно заменить более слабым условием $\mathbf{E}\,S_n = O(n)$.

Теорема 2. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных случайных величин с конечными моментами порядка $p \geqslant 1$, удовлетворяющая условию*

$$\mathbf{E}\,S_n = O(n). \tag{10}$$

Если существует последовательность неотрицательных чисел $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая что выполнены условия (8) *и* (9), *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}\mathbf{P}(|S_n - \mathbf{E}\,S_n| > n\varepsilon) < \infty \quad \textit{для всех } \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Следствие 1. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность неотрицательных случайных величин с конечными моментами порядка* $p \geqslant 1$*, удовлетворяющая условиям* (10) *и* (6)*. Тогда имеет место соотношение* (11).

§3. Доказательства.

Доказательство теоремы 1. Пусть $b > 1$, $\varepsilon > 0$. Положим

$$m_1 = \inf\{m \geqslant 0 : b^m \leqslant n < b^{m+1} \text{ для некоторого } n\},$$

$$m_l = \inf\{m > m_{l-1} : b^m \leqslant n < b^{m+1} \text{ для некоторого } n\} \quad \text{для } l \geqslant 2.$$

Таким образом, $\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$ – целочисленная последовательность, такая что $0 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots$ и $m_l \to \infty$ $(l \to \infty)$.

Далее, для любого $n \geqslant 1$ существует такое $l = l(n)$, что

$$b^{m_{l(n)}} \leqslant n < b^{m_{l(n)}+1}.$$

Для каждого $l \geqslant 1$ положим

$$k_l^- = \inf\{k : b^{m_l} \leqslant k < b^{m_l+1}\},$$

$$k_l^+ = \sup\{k : b^{m_l} \leqslant k < b^{m_l+1}\}.$$

По определению k_l^- и k_l^+

$$b^{m_{l(n)}} \leqslant k_{l(n)}^- \leqslant n \leqslant k_{l(n)}^+ < b^{m_{l(n)}+1} \tag{12}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{b} < \frac{k_{l(n)}^{\pm}}{n} < b. \tag{13}$$

Из условия (5) следует, что для достаточно больших n

$$\left| \frac{\mathbf{E}\, S_n}{n^{\alpha}} - \frac{\mathbf{E}\, S_{k_{l(n)}^{\pm}}}{(k_{l(n)}^{\pm})^{\alpha}} \right| < \varepsilon$$

и существует такая постоянная M, что $0 < \mathbf{E}\, S_n / n^{\alpha} < M$.

Для достаточно больших n имеем

$$\begin{aligned}\frac{S_n-\mathbf{E}\,S_n}{n^\alpha}\leqslant\frac{S_{k^+_{l(n)}}-\mathbf{E}\,S_{k^+_{l(n)}}}{(k^+_{l(n)})^\alpha}\cdot\frac{(k^+_{l(n)})^\alpha}{n^\alpha}-\frac{\mathbf{E}\,S_n}{n^\alpha}\\+\frac{\mathbf{E}\,S_{k^+_{l(n)}}}{(k^+_{l(n)})^\alpha}+\frac{\mathbf{E}\,S_{k^+_{l(n)}}}{(k^+_{l(n)})^\alpha}\cdot\left(\frac{(k^+_{l(n)})^\alpha}{n^\alpha}-1\right)\\\leqslant\frac{S_{k^+_{l(n)}}-\mathbf{E}\,S_{k^+_{l(n)}}}{(k^+_{l(n)})^\alpha}\cdot b^\alpha+\varepsilon+M(b-1).\end{aligned}\tag{14}$$

Аналогично получаем нижнюю оценку

$$\begin{aligned}\frac{S_n-\mathbf{E}\,S_n}{n^\alpha}\geqslant\frac{S_{k^-_{l(n)}}-\mathbf{E}\,S_{k^-_{l(n)}}}{(k^-_{l(n)})^\alpha}\cdot\frac{(k^-_{l(n)})^\alpha}{n^\alpha}-\frac{\mathbf{E}\,S_n}{n^\alpha}\\+\frac{\mathbf{E}\,S_{k^-_{l(n)}}}{(k^-_{l(n)})^\alpha}+\frac{\mathbf{E}\,S_{k^-_{l(n)}}}{(k^-_{l(n)})^\alpha}\cdot\left(\frac{(k^-_{l(n)})^\alpha}{n^\alpha}-1\right)\\\geqslant\frac{S_{k^-_{l(n)}}-\mathbf{E}\,S_{k^-_{l(n)}}}{(k^-_{l(n)})^\alpha}\cdot\frac{1}{b^\alpha}-\varepsilon-M\Big(1-\frac{1}{b}\Big).\end{aligned}\tag{15}$$

Мы можем выбрать b таким образом, чтобы $1<b<1+\varepsilon/M$. Тогда из (14) и (15) следует, что

$$\frac{S_{k^-_{l(n)}}-\mathbf{E}\,S_{k^-_{l(n)}}}{(k^-_{l(n)})^\alpha}\cdot\frac{1}{b^\alpha}-2\varepsilon\leqslant\frac{S_n-\mathbf{E}\,S_n}{n^\alpha}\leqslant\frac{S_{k^+_{l(n)}}-\mathbf{E}\,S_{k^+_{l(n)}}}{(k^+_{l(n)})^\alpha}\cdot b^\alpha+2\varepsilon.$$

Отсюда мы получаем, что

$$\left|\frac{S_n-\mathbf{E}\,S_n}{n^\alpha}\right|\leqslant\max\left\{\left|\frac{S_{k^-_{l(n)}}-\mathbf{E}\,S_{k^-_{l(n)}}}{(k^-_{l(n)})^\alpha}\right|\cdot\frac{1}{b^\alpha}+2\varepsilon,\left|\frac{S_{k^+_{l(n)}}-\mathbf{E}\,S_{k^+_{l(n)}}}{(k^+_{l(n)})^\alpha}\right|\cdot b^\alpha+2\varepsilon\right\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\{|S_n-\mathbf{E}\,S_n|>3\varepsilon\cdot n^\alpha\}\subset\Big\{|S_{k^-_{l(n)}}-\mathbf{E}\,S_{k^-_{l(n)}}|>\varepsilon\cdot(k^-_{l(n)})^\alpha\cdot b^\alpha\Big\}\\\cup\Big\{|S_{k^+_{l(n)}}-\mathbf{E}\,S_{k^+_{l(n)}}|>\varepsilon\cdot(k^+_{l(n)})^\alpha\cdot b^{-\alpha}\Big\}.\end{aligned}\tag{16}$$

Таким образом, в силу (12), (13) и неравенства Чебышева, получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\mathbf{P}(|S_n - \mathbf{E}\, S_n| > 3\varepsilon \cdot n^{\alpha}) \\
&\quad\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\mathbf{P}\left(\left|S_{k^-_{l(n)}} - \mathbf{E}\, S_{k^-_{l(n)}}\right| > \varepsilon \cdot (k^-_{l(n)})^{\alpha} \cdot b^{\alpha}\right) \\
&\quad+ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}\mathbf{P}\left(\left|S_{k^+_{l(n)}} - \mathbf{E}\, S_{k^+_{l(n)}}\right| > \varepsilon \cdot (k^+_{l(n)})^{\alpha} \cdot b^{-\alpha}\right) \\
&\quad= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{k^-_{l(n)}}\right)^{\alpha p} \cdot \left(\frac{k^-_{l(n)}}{n}\right)^{2} \cdot (k^-_{l(n)})^{\alpha p-2} \\
&\quad\times \mathbf{P}\left(\left|S_{k^-_{l(n)}} - \mathbf{E}\, S_{k^-_{l(n)}}\right| > \varepsilon \cdot (k^-_{l(n)})^{\alpha} \cdot b^{\alpha}\right) \\
&\quad+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{k^+_{l(n)}}\right)^{\alpha p} \cdot \left(\frac{k^+_{l(n)}}{n}\right)^{2} \cdot (k^+_{l(n)})^{\alpha p-2} \\
&\quad\times \mathbf{P}\left(\left|S_{k^+_{l(n)}} - \mathbf{E}\, S_{k^+_{l(n)}}\right| > \varepsilon \cdot (k^+_{l(n)})^{\alpha} \cdot b^{-\alpha}\right) \\
&\quad\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b^{\alpha p+2} \cdot (k^-_{l(n)})^{\alpha p-2} \cdot \frac{\mathbf{E}\left|S_{k^-_{l(n)}} - \mathbf{E}\, S_{k^-_{l(n)}}\right|^p}{\varepsilon^p \cdot (k^-_{l(n)})^{\alpha p} \cdot b^{\alpha p}} \\
&\quad+ \sum_{n=1}^{\infty} b^{\alpha p+2} \cdot (k^+_{l(n)})^{\alpha p-2} \cdot \frac{\mathbf{E}\left|S_{k^+_{l(n)}} - \mathbf{E}\, S_{k^+_{l(n)}}\right|^p}{\varepsilon^p \cdot (k^+_{l(n)})^{\alpha p}} \cdot b^{\alpha p} \\
&\quad\leqslant b^2\varepsilon^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} (k^-_{l(n)})^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k^-_{l(n)}} - \mathbf{E}\, S_{k^-_{l(n)}}\right|^p \\
&\quad+ b^{2\alpha p+2}\varepsilon^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} (k^+_{l(n)})^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k^+_{l(n)}} - \mathbf{E}\, S_{k^+_{l(n)}}\right|^p \\
&\quad\leqslant b^2\varepsilon^{-p} \sum_{l=1}^{\infty} (k^-_{l})^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k^-_{l}} - \mathbf{E}\, S_{k^-_{l}}\right|^p (b^{m_l+1} - b^{m_l}) \\
&\quad+ b^{2\alpha p+2}\varepsilon^{-p} \sum_{l=1}^{\infty} (k^+_{l})^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k^+_{l}} - \mathbf{E}\, S_{k^+_{l}}\right|^p (b^{m_l+1} - b^{m_l}). \qquad (17)
\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\sum_{l=1}^{\infty}(k_l^-)^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k_l^-}-\mathbf{E}\,S_{k_l^-}\right|^p(b^{m_l+1}-b^{m_l})<\infty. \tag{18}$$

Из условия (8) следует, что

$$\sum_{l=1}^{\infty}(k_l^-)^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k_l^-}-\mathbf{E}\,S_{k_l^-}\right|^p(b^{m_l+1}-b^{m_l})$$
$$\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}(k_l^-)^{-2}\sum_{i=1}^{k_l^-}\gamma_i(b^{m_l+1}-b^{m_l})\leqslant(b-1)\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i\sum_{l:k_l^-\geqslant i}b^{m_l}(k_l^-)^{-2}.$$

Оценим выражение $\sum\limits_{l:k_l^-\geqslant i}b^{m_l}(k_l^-)^{-2}$. Пусть $l_0=\min\{l:k_l^-\geqslant i\}$. Тогда $k_{l_0}^-\geqslant i$ и $b^{m_{l_0}}\leqslant k_{l_0}^-<b^{m_{l_0}+1}$. Таким образом,

$$\sum_{l:k_l^-\geqslant i}b^{m_l}(k_l^-)^{-2}\leqslant\sum_{l=l_0}^{\infty}b^{-m_l}\leqslant Cb^{-(m_{l_0}+1)}\leqslant Ci^{-1}.$$

Следовательно, в силу условия (9)

$$\sum_{l=1}^{\infty}(k_l^-)^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k_l^-}-\mathbf{E}\,S_{k_l^-}\right|^p(b^{m_l+1}-b^{m_l})\leqslant C\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_i}{i}<\infty.$$

Таким образом, соотношение (18) доказано. С помощью аналогичных рассуждений можно доказать, что

$$\sum_{l=1}^{\infty}(k_l^+)^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k_l^+}-\mathbf{E}\,S_{k_l^+}\right|^p(b^{m_l+1}-b^{m_l})<\infty. \tag{19}$$

Из (17), (18) и (19) следует (7). □

Доказательство теоремы 2. В силу условия (10) существует постоянная M, такая что неравенство $\mathbf{E}\,S_n/n\leqslant M$ выполнено для любого $n\geqslant 1$. Пусть $b>1$, $\varepsilon>0$, $L=[M/\varepsilon]$ – целая часть от M/ε. Положим

$$m_1=\inf\{m\geqslant 0: b^m\leqslant n<b^{m+1}\ \text{для некоторого}\ n\},$$
$$m_l=\inf\{m>m_{l-1}: b^m\leqslant n<b^{m+1}\ \text{для некоторого}\ n\}\qquad \text{для}\ l\geqslant 2.$$

Таким образом, $\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$ – целочисленная последовательность, такая что $0 \leqslant m_1 < m_2 < \dots$ и $m_l \to \infty$ $(l \to \infty)$.

Для каждой пары чисел l и s, таких что $l = 1, 2, \dots$, $s = 0, 1, \dots, L$, положим

$$A_s(l) = \Big\{k : b^{m_l} \leqslant k < b^{m_l+1},\ \frac{\mathbf{E}\, S_k}{k} \in [s\varepsilon, (s+1)\varepsilon)\Big\}.$$

Положим $k_s^-(l) = \inf A_s(l)$, $k_s^+(l) = \sup A_s(l)$, если множество $A_s(l)$ не пусто, и $k_s^-(l) = k_s^+(l) = \inf\{k : b^{m_l} \leqslant k < b^{m_l+1}\}$ в противном случае.

По определению $k_s^{\pm}(l)$ для любого $l \geqslant 1$ имеем

$$b^{m_l} \leqslant \max_{1 \leqslant s \leqslant L} k_s^{\pm}(l) < b^{m_l+1}. \tag{20}$$

Для любого $n \geqslant 1$ существуют такие $l = l(n)$ и $s = s(n)$,

$$\lim_{n\to\infty} l(n) = \infty, \quad 0 \leqslant s(n) \leqslant L,$$

что

$$b^{m_{l(n)}} \leqslant n < b^{m_{l(n)}+1}, \qquad \frac{\mathbf{E}\, S_n}{n} \in [s\varepsilon, (s+1)\varepsilon).$$

По определению $k_s^{\pm}(l)$ имеем

$$k_s^-(l) \leqslant n \leqslant k_s^+(l), \qquad \left|\frac{\mathbf{E}\, S_{k_s^{\pm}(l)}}{k_s^{\pm}(l)} - \frac{\mathbf{E}\, S_n}{n}\right| < \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
-\varepsilon &- \Big(1 - \frac{1}{b}\Big) M + \frac{1}{b}\frac{1}{k_s^-(l)}(S_{k_s^-(l)} - \mathbf{E}\, S_{k_s^-(l)}) \\
&\leqslant -\varepsilon - \Big(1 - \frac{1}{b}\Big)\frac{\mathbf{E}\, S_{k_s^-(l)}}{k_s^-(l)} + \frac{1}{b}\frac{1}{k_s^-(l)}(S_{k_s^-(l)} - \mathbf{E}\, S_{k_s^-(l)}) \\
= -\varepsilon &- \frac{\mathbf{E}\, S_{k_s^-(l)}}{k_s^-(l)} + \frac{1}{b}\frac{S_{k_s^-(l)}}{k_s^-(l)} \leqslant -\varepsilon - \frac{\mathbf{E}\, S_{k_s^-(l)}}{k_s^-(l)} + \frac{S_{k_s^-(l)}}{n} \leqslant \frac{S_{k_s^-(l)}}{n} - \frac{\mathbf{E}\, S_n}{n} \\
&\leqslant \frac{S_n - \mathbf{E}\, S_n}{n} \leqslant \frac{S_{k_s^+(l)}}{n} - \frac{\mathbf{E}\, S_n}{n} \leqslant \frac{S_{k_s^+(l)}}{n} - \frac{\mathbf{E}\, S_{k_s^+(l)}}{k_s^+(l)} + \varepsilon \\
\leqslant b&\frac{S_{k_s^+(l)}}{k_s^+(l)} - \frac{\mathbf{E}\, S_{k_s^+(l)}}{k_s^+(l)} + \varepsilon = b\frac{(S_{k_s^+(l)} - \mathbf{E}\, S_{k_s^+(l)})}{k_s^+(l)} + (b-1)\frac{\mathbf{E}\, S_{k_s^+(l)}}{k_s^+(l)} + \varepsilon \\
&\leqslant b\frac{(S_{k_s^+(l)} - \mathbf{E}\, S_{k_s^+(l)})}{k_s^+(l)} + (b-1)M + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{21}$$

Мы можем выбрать b таким образом, чтобы $1 < b < 1+\varepsilon/M$. Тогда из (21) следует, что для любого $s = 0, 1, \ldots, L$

$$\frac{S_{k_s^-(l)} - \mathbf{E}\, S_{k_s^-(l)}}{k_s^-(l)} \cdot \frac{1}{b} - 2\varepsilon \leqslant \frac{S_n - \mathbf{E}\, S_n}{n} \leqslant \frac{S_{k_s^+(l)} - \mathbf{E}\, S_{k_s^+(l)}}{k_s^+(l)} \cdot b + 2\varepsilon.$$

Отсюда мы получаем, что

$$\left|\frac{S_n - \mathbf{E}\, S_n}{n}\right| \leqslant \max\left\{\left|\frac{S_{k_s^-(l)} - \mathbf{E}\, S_{k_s^-(l)}}{k_s^-(l)}\right| \cdot \frac{1}{b} + 2\varepsilon, \left|\frac{S_{k_s^+(l)} - \mathbf{E}\, S_{k_s^+(l)}}{k_s^+(l)}\right| \cdot b + 2\varepsilon\right\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\{|S_n - \mathbf{E}\, S_n| > 3\varepsilon \cdot n\} \subset \Big\{|S_{k_s^-(l)} - \mathbf{E}\, S_{k_s^-(l)}| > \varepsilon \cdot k_s^-(l) \cdot b\Big\} \\ \cup \Big\{|S_{k_s^+(l)} - \mathbf{E}\, S_{k_s^+(l)}| > \varepsilon \cdot k_s^+(l) \cdot b^{-1}\Big\}. \qquad (22)\end{aligned}$$

Таким образом, в силу (20) и неравенства Чебышева, получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} \mathbf{P}(|S_n - \mathbf{E}\, S_n| > 3\varepsilon \cdot n) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \max_{1 \leqslant s \leqslant L} \left[n^{p-2} \mathbf{P}\left(\left| S_{k_s^-(l(n))} - \mathbf{E}\, S_{k_s^-(l(n))} \right| > \varepsilon \cdot \left(k_s^-(l(n))\right) \cdot b \right) \right] \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \max_{1 \leqslant s \leqslant L} \left[n^{p-2} \mathbf{P}\left(\left| S_{k_s^+(l(n))} - \mathbf{E}\, S_{k_s^+(l(n))} \right| > \varepsilon \cdot \left(k_s^+(l(n))\right) \cdot b^{-1} \right) \right] \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{1 \leqslant s \leqslant L} \left[\left(\frac{n}{k_s^-(l(n))} \right)^p \cdot \left(\frac{k_s^-(l(n))}{n} \right)^2 \cdot \left(k_s^-(l(n))\right)^{p-2} \right. \\
&\qquad \left. \times \mathbf{P}\left(\left| S_{k_s^-(l(n))} - \mathbf{E}\, S_{k_s^-(l(n))} \right| > \varepsilon \cdot \left(k_s^-(l(n))\right) \cdot b \right) \right] \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \max_{1 \leqslant s \leqslant L} \left[\left(\frac{n}{k_s^+(l(n))} \right)^p \cdot \left(\frac{k_s^+(l(n))}{n} \right)^2 \cdot \left(k_s^+(l(n))\right)^{p-2} \right. \\
&\qquad \left. \times \mathbf{P}\left(\left| S_{k_s^+(l(n))} - \mathbf{E}\, S_{k_s^+(l(n))} \right| > \varepsilon \cdot \left(k_s^+(l(n))\right) \cdot b^{-1} \right) \right] \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \max_{1 \leqslant s \leqslant L} \left[b^{p+2} \cdot \left(k_s^-(l(n))\right)^{p-2} \cdot \frac{\mathbf{E}\left| S_{k_s^-(l(n))} - \mathbf{E}\, S_{k_s^-(l(n))} \right|^p}{\varepsilon^p \cdot \left(k_s^-(l(n))\right)^p \cdot b^p} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=1}^{\infty}\max_{1\leqslant s\leqslant L}\left[b^{p+2}\cdot\big(k_s^+(l(n))\big)^{p-2}\cdot\frac{\mathbf{E}\left|S_{k_s^+(l(n))}-\mathbf{E}\,S_{k_s^+(l(n))}\right|^p}{\varepsilon^p\cdot\big(k_s^+(l(n))\big)^p}\cdot b^p\right]\\
&\leqslant b^2\varepsilon^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}\max_{1\leqslant s\leqslant L}\left[\big(k_s^-(l(n))\big)^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k_s^-(l(n))}-\mathbf{E}\,S_{k_s^-(l(n))}\right|^p\right]\\
&+b^{2p+2}\varepsilon^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}\max_{1\leqslant s\leqslant L}\left[\big(k_s^+(l(n))\big)^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k_s^+(l(n))}-\mathbf{E}\,S_{k_s^+(l(n))}\right|^p\right]\\
&\leqslant b^2\varepsilon^{-p}\sum_{l=1}^{\infty}\max_{1\leqslant s\leqslant L}\left[\big(k_s^-(l)\big)^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k_s^-(l)}-\mathbf{E}\,S_{k_s^-(l)}\right|^p(b^{m_l+1}-b^{m_l})\right]\\
&+b^{2p+2}\varepsilon^{-p}\sum_{l=1}^{\infty}\max_{1\leqslant s\leqslant L}\left[\big(k_s^+(l)\big)^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k_s^+(l)}-\mathbf{E}\,S_{k_s^+(l)}\right|^p(b^{m_l+1}-b^{m_l})\right].
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Учитывая (20), мы можем доказать, что

$$
\sum_{l=1}^{\infty}\max_{1\leqslant s\leqslant L}\left[\big(k_s^-(l)\big)^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k_s^-(l)}-\mathbf{E}\,S_{k_s^-(l)}\right|^p(b^{m_l+1}-b^{m_l})\right]<\infty \tag{24}
$$

и

$$
\sum_{l=1}^{\infty}\max_{1\leqslant s\leqslant L}\left[\big(k_s^+(l)\big)^{-2}\mathbf{E}\left|S_{k_s^+(l)}-\mathbf{E}\,S_{k_s^+(l)}\right|^p(b^{m_l+1}-b^{m_l})\right]<\infty, \tag{25}
$$

дословно повторяя доказательство соотношения (18). Из (23)–(25) следует (11). □

Литература

1. В. М. Корчевский, В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин.* — Вестник СПбГУ. Сер. 1, Вып. 3, (2010) 26–30.
2. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел.* — Теория вероятн. и ее примен. **14** (1969), 193–202.
3. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин*, Наука, М., 1972.
4. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, Наука, М., 1987.
5. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **53** (2008), 379–382.

6. В. В. Петров, *Об устойчивости сумм неотрицательных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **361** (2008), 78–82.
7. P. Chen, S. H. Sung, *A strong law of large numbers for nonnegative random variables and applications.* — Statist. Probab. Letters **118** (2016), 80–86.
8. V. Korchevsky, *A generalization of the Petrov strong law of large numbers.* — Statist. Probab. Letters **104** (2015), 102–108.
9. A. Kuczmaszewska, *Convergence rate in the Petrov SLLN for dependent random variables.* — Acta Math. Hungar. **148** (2016), 56–72.
10. G. Stoica, *Rate of convergence in Petrov's strong law of large numbers.* — Adv. Appl. Statist. Sci. **4** (2010), 57–60.

Korchevsky V. M. On the rate of convergence in the strong law of large numbers for non-negative random variables.

We study the rate of convergence in the strong law of large numbers for sequences of non-negative random variables without the independence assumption. We obtain conditions for which an analog of the Baum–Katz theorem holds.

С.-Петербургский
государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
ул. Большая Морская, д.67,
С.-Петербург, 190000, Россия
E-mail: valery_ko@list.ru

Поступило 28 октября 2016 г.