Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

А. Карлова, Л. Б. Клебанов

ОЦЕНИВАНИЕ ХВОСТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

§1. Введение

Существуют весьма широкие классы вероятностных распределений, заданные посредством своих характеристических функций. Достаточно отметить:

- устойчивые распределения (см. [9]);
- ν-устойчивые распределения (см. [3]);
- дискретные устойчивые распределения (см. [2]);
- темперированные устойчивые распределения (см. [1]).

Ниже мы приводим метод получения оценок хвоста произвольного распределения, базирующийся на знании характеристической функции этого распределения.

§2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Пусть*

$$P(\theta) = \sum_{j=0}^{k} a_k \cos(j\theta) + \sum_{j=1}^{k} b_k \sin(j\theta) \tag{2.1}$$

– неотрицательный тригонометрический полином степени k. Предположим, что $F(x)$ – некоторая функция распределения а $f(t)$ – ее характеристическая функция. Тогда для любого $s > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &1 - F(2\pi/s) + F(-2\pi/s) \\ &\le \frac{2}{sa_0}\Big(\sum_{j=0}^{k} a_j \int_0^s \mathtt{Re}\, f(ju)\, du + \sum_{j=1}^{k} b_j \int_0^s \mathtt{Im}\, f(ju)\, du\Big). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ключевые слова: характеристическая функция; хвост распределения.
Эта работа была поддержана грантом GAČR 16-03708S.

Доказательство. Обозначим $F_1(x) = F(x) - F(-x)$, и рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_0^s \Big(\int_{-\infty}^{\infty} P(xu)\, dF(x) \Big)\, du &= \int_0^s \Big(\int_0^{\infty} P(xu)\, dF_1(x) \Big)\, du \\ &= \int_0^{\infty} \Big(\int_0^{s} P(xu)\, du \Big)\, dF_1(x). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^s \Big(\int_{-\infty}^{\infty} P(xu)\, dF(x) \Big)\, du \\ &= \sum_{j=0}^{k} a_j \int_0^s \mathtt{Re}\, f(ju)\, du + \sum_{j=1}^{k} b_j \int_0^s \mathtt{Im}\, f(ju)\, du, \end{aligned} \tag{2.4}$$

что совпадает с выражением в скобках в правой части (2.2).

С другой стороны,

$$\int_0^{\infty} \Big(\int_0^{s} P(xu)\, du \Big)\, dF_1(x) = \int_0^{\infty} \Big(\frac{1}{x} \int_0^{sx} P(v)\, dv \Big)\, dF_1(x) \tag{2.5}$$

Ясно, что полином P имеет число 2π своим периодом (не обязательно минимальным). Определим числа $A_m = 2\pi m/s$, $m = 1, 2, \ldots$. Также ясно, что

$$\int_0^{2\pi} P(\theta)\, d\theta = 2\pi a_0.$$

Из соотношений (2.3) и (2.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_0^s \Big(\int_{-\infty}^{\infty} P(xu)\, dF_1(x) \Big)\, du &\geq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_m}^{A_{m+1}} \frac{1}{x} \Big(\int_0^{s} P(v)\, dv \Big)\, dF_1(x) \\ &\geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{A_{m+1}} \int_0^{A_m s} P(v)\, dv \Big(F_1(A_{m+1}) - F_1(A_m) \Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{A_{m+1}} \Big(\sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{A_j s}^{A_{j+1} s} P(v)\, dv \Big) \Big(F_1(A_{m+1} - F_1(A_m)) \Big) \\
&\qquad\qquad \geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sm}{2\pi(m+1)}\, 2\pi a_0 \Big(F_1(A_{m+1} - F_1(A_m)) \Big) \\
&\geq \frac{sa_0}{2} \Big(1 - F_1(A_1) \Big) = \frac{sa_0}{2} \Big(1 - F(2\pi/s) + F(-2\pi/s) \Big).
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Требуемый результат вытекает теперь из (2.4) и (2.6). □

Выбирая разные тригонометрические полиномы $P(\theta)$, мы получим разнообразные оценки хвоста. Именно, в случае

$$
P(\theta) = \sin^{2k}\theta = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} + \frac{1}{2^{2k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \binom{2k}{j} \cos(2(k-j)\theta)
$$

получим следующее

Следствие 2.1. (*см.* [8]) *Для функции распределения F справедлива следующая оценка*

$$
F(-2\pi/s) + 1 - F(2\pi/s) \leq \frac{(-1)^k\, 2\, ((2k)!!)}{4^k\, (2k-1)!!} \int\limits_0^s \Delta_u^{(2k)}(\mathtt{Re}\, f, 0)\, du, \tag{2.7}
$$

где

$$
\Delta_u^{(2k)}(g,t) = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} g\big(t - (k-j)\, u\big)
$$

и $s > 0$.

Замечание 2.1. Отметим, что если характеристическая функция $f(t)$ имеет производную порядка $2k$ в точке $t = 0$, то

$$
|\Delta_u^{(2k)}(\mathtt{Re}\, f, 0)| \leq u^{2k} |f^{(2k)}(0)|. \tag{2.8}
$$

Легко видеть, что следствие 2.1 дает правильный порядок хвостов симметричного устойчивого закона, а также симметричного геометрически устойчивого распределения при $s \to 0$.

Теорема 2.1 и ее следствие хорошо работают в случае распределений со степенным порядком хвостов. Однако многие встречающиеся в приложениях вероятностные распределения имеют экспоненциальные хвосты. Это так, скажем, для темперированных устойчивых распределений. Поэтому представляется интересным получение экспоненциальных границ для хвостов аналитических характеристических функций.

Теорема 2.2. *Допустим, что $F(x)$ – функция распределения закона, характеристическая функция $f(t)$ которого является аналитической в круге $|t| < R$ $(0 < R \le \infty)$. Тогда для любого $A > 0$ и произвольного $s \in (0, R)$ справедливо следующее неравенство:*

$$1 - F(A) + F(-A) \le \frac{\int\limits_0^s \Big(\frac{f(iu)+f(-iu)}{2} - 1\Big)\,du}{s\,\big(\sinh(As)/(As) - 1\big)}. \tag{2.9}$$

Доказательство. По теореме Райкова (см., например, [4]) характеристическая функция $f(t)$ аналитична в полосе $|\mathtt{Im}\, t| < R$, и функция распределения $F(x)$ имеет экспоненциальные моменты всех порядков, меньших чем R. Рассмотрим следующее выражение:

$$\int\limits_0^s \Big(\int\limits_0^\infty (\cosh(xu) - 1)\,dF_1(x)\Big)\,du = \int\limits_0^s \Big(\frac{f(iu)+f(-iu)}{2} - 1\Big)\,du, \tag{2.10}$$

где, как и раньше, $F_1(x) = F(x) - F(-x)$. Левая часть уравнения (2.10) может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^s \Big(\int_0^\infty (\cosh(xu) - 1)\,dF_1(x)\Big)\,du &= \int\limits_0^\infty \Big(\int_0^s (\cosh(xu) - 1)\,du\Big)\,dF_1(x)\\
&= s\int\limits_0^\infty \Big(\frac{\sinh(sx)}{sx} - 1\Big)\,dF_1(x) \ge s\int\limits_A^\infty \Big(\frac{\sinh(sx)}{sx} - 1\Big)\,dF_1(x)\\
&\ge s\,\Big(\frac{\sinh(sA)}{sA} - 1\Big)(1 - F_1(A)).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Неравенства (2.11) и (2.10) приводят нас к (2.9). □

Интересно отметить одно следствие теоремы 2.2.

Следствие 2.2. *Предположим, что характеристическая функция $f(t)$ является целой функцией конечного экспоненциального типа.*

Тогда соответствующая функция распределения $F(x)$ сосредоточена на компактном подмножестве вещественной оси.

Доказательство. Напомним, что целая функция $f(t)$ имеет конечный экспоненциальный тип не выше чем ρ, если

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} \leq \rho, \tag{2.12}$$

где

$$M(r) = \max_{|z|\leq r} |f(z)|.$$

Для любого $\rho_1 > \rho$ существует положительная постоянная C, такая что

$$M(r) < C\exp(\rho_1 r)$$

и, для достаточно больших $s > 0$, интеграл в правой части (2.9) меньше, чем $C_2\, s\exp(\rho_1 s)$, где $C_2 > 0$ – положительная постоянная. Для $A > \rho_1$ правая часть (2.9) стремится к нулю, когда s стремится к бесконечности. Это показывает, что левая часть (2.9) равна нулю для любого $A > \rho$, и, значит, носитель функции распределения $F(x)$ содержится в интервале $[-\rho, \rho]$. $\square$

Разумеется, если носитель $F(x)$ является компактным подмножеством вещественной оси, то характеристическая функция представляет собой целую функцию конечного экспоненциального типа.

Отметим, что следствие 2.2 вытекает из теоремы Пэли–Винера (см. [6]).

§3. Односторонние оценки хвоста

Здесь мы приводим одностороннюю оценку хвоста распределения с характеристической функцией, аналитической в области, содержащей интервал вида $t \in (0, a\,i)$ или $t \in (-b\,i, 0)$ $(a, b > 0)$ на мнимой оси. В этом случае характеристическая функция аналитична в полосе $0 < \mathtt{Im}\, t < a$ или $-b < \mathtt{Im}\, t < 0$ соответственно, и она может быть продолжена туда как соответствующий интеграл (см. [5]).

Теорема 3.1. *Предположим, что $F(x)$ – вероятностный закон, характеристическая функция $f(t)$ которого является аналитической в полосе $-b < \mathtt{Im}\, t < 0$ (соответственно, $0 < \mathtt{Im}\, t < b$) для некоторого положительного b. Тогда для любого $A > 0$ и любого $s \in (0, b)$*

справедливо следующее неравенство:

$$1 - F(A) \leq \frac{A}{\exp(sA) - sA - 1} \int\limits_0^s (f(-iu) + F(+0) - 1)\, du, \qquad (3.1)$$

(*соответственно,*

$$F(-A) \leq \frac{A}{\exp(sA) - sA - 1} \int\limits_0^s (f(iu) - F(-0))\, du\ ). \qquad (3.2)$$

Доказательство. Достаточно повторить доказательство теоремы 2.2, используя функцию $e^{ux} - 1$ (соответственно, $e^{-ux} - 1$) вместо $\cosh(xu) - 1$. □

Предположим, что $b = \infty$. Из (3.1) (соответственно, из (3.2)) следует, что если $f(-iu) \leq \exp(au)$ (соответственно, $f(iu) \leq \exp(au)$) для достаточно больших u, то соответствующий хвост равен нулю для больших значений A. Это снова известный результат (см. [7]).

Отметим, что оценки (3.1) и (3.2) не работают при малых значениях s, т.е. при $s \to 0$. В этом состоит существенное отличие от случаев (2.2) и (2.9).

Литература

1. Y. S. Kim, S. T. Rachev, D. M. Chung, M. L. Bianchi, *The modified tempered stable distribution, GARCH models and option pricing.* — Probab. Math. Statist. **29** (2009), 91–117.
2. L. B. Klebanov, L. Slámová, *Integer valued stable random variables.* — Statist. Probab. Letters **83**, No. 6 (2013), 1513–1519.
3. L. B. Klebanov, T. J. Kozubowski, S. T. Rachev, *Ill-Posed Problems in Probability and Stability of Random Sums*, Nova Science Publishers, Inc, New York, 2006.
4. Ю. В. Линник, *Разложения вероятностных законов*, ЛГУ, Л., 1960.
5. Ю. В. Линник, И. В. Островский, *Разложения случайных величин и векторов*, Наука, М., 1972.
6. R. Paley, N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, AMS Coll. Publ. XIX, New York, 1934.
7. D. Polya, *Remarks on characteristic functions.* — In: Proc. of the Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab., Berkeley (1949), 115–123.
8. Н. А. Сапогов, *Проблема устойчивости для теоремы единственности характеристической функции, аналитической в окрестности нуля.* — В кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей, ВНИИ системных исследований, Москва (1980), 88–94.
9. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, М., 1983.

Karlová A., Klebanov L. B. Estimation of the tail of probability distribution through its characteristic function.

There is given a method for estimation of a probability distribution tail in terms of characteristic function.

Department of Probability and Mathematical
Statistics Charles University,
Prague, Czech Republic
E-mail: andrea.karlova@gmail.com
E-mail: levbkl@gmail.com

Поступило 27 сентября 2016 г.