Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев

ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

§1. Введение

В статьях авторов [4, 5] был доказан вариант предельной теоремы, в котором предельное распределение было абсолютно непрерывным с (невероятностной) плотностью

$$p_{t,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}},$$

где $t > 0$, а σ является комплексным числом, удовлетворяющим условиям $\operatorname{Re}\sigma \geqslant 0$ и $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$.

Интерес к этой проблематике связан с тем, что при каждом σ функция $p_{t,\sigma}(x)$ является фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

При $\sigma \in \mathbb{R}$ уравнение (1) является уравнением теплопроводности, а при $\operatorname{Re}\sigma^2 = 0$ – уравнением Шрёдингера.

Тот факт, что функция $p_{t,\sigma}(x)$ является фундаментальным решением (1) означает, что решение задачи Коши

$$u(0, x) = \varphi(x) \tag{2}$$

представляется в виде свертки фундаментального решения $p_{t,\sigma}(x)$ с начальной функцией $\varphi(x)$.

Ключевые слова: предельная теорема, случайное блуждание, уравнение Шрёдингера, интеграл Фейнмана.

Работа первого автора выполнена при поддержке Программы ОМ РАН "Проблемы современной математики" и РФФИ (грант No. 16-01-00258). Работа второго автора выполнена при поддержке Программы ОМ РАН "Проблемы современной математики", РФФИ (грант No. 15-01-01453) и СПбГУ (грант No. 11.38.263.2014). Работа третьего автора выполнена при поддержке РФФИ (грант No. 16-01-00443) и СПбГУ (грант No. 11.38.263.2014).

В работе [4] было показано, что для всякой функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ носитель преобразования Фурье которой содержится в интервале $[-M, M]$ для некоторого $M > 0$ (и, тем самым, допускающей аналитическое продолжение, являющееся целой функцией экспоненциального типа M), для решения задачи Коши (1), (2) справедливо представление

$$u(t,x) = \varphi * p_{t,\sigma}(x) = \mathbf{E}\varphi\bigl(x - \sigma w(t)\bigr), \tag{3}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, а подстановка комплексной величины $x - \sigma w(t)$ в функцию вещественной переменной φ понимается как подстановка в аналитическое продолжение φ. Произвольную функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ можно аппроксимировать функциями указанного вида. Именно, положим

$$\varphi_M(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-M}^{M} \widehat{\varphi}(p)\, e^{-ipx}\, dp, \tag{4}$$

тогда

$$\|\varphi - \varphi_M\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|p|>M} |\widehat{\varphi}(p)|^2\, dp \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Если в представлении (3) заменить винеровский процесс его аппроксимацией нормированными суммами независимых случайных величин, то соответствующее утверждение естественно трактовать как некоторую предельную теорему.

Итак, пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общим симметричным распределением $\mathcal{P}$, причем $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$. Далее, пусть $\eta(t)$, $t \geqslant 0$, – стандартный ($\mathbf{E}\eta(t) = t$) пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}$. Для каждого натурального n определим сложный пуассоновский процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0, T]$, полагая

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j. \tag{5}$$

Процесс $\zeta_n(t)$ использовался в [4, 5] в качестве аппроксимации винеровского процесса $w(t)$. Отметим, что выбор в [4, 5] схемы со случайным числом слагаемых (вместо более распространенного способа суммирования до $[nt]$) является вполне естественным, так как $\zeta_n(t)$ является процессом Леви и, соответственно, порождает полугруппу операторов, генератор которой легко выписывается.

В данном случае утверждение центральной предельной теоремы эквивалентно утверждению о том, что при фиксированном $t > 0$ для любой непрерывной ограниченной функции φ

$$\mathbf{E}\varphi\big(\zeta_n(t)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}\varphi\big(w(t)\big),$$

что в частности означает, что для любого фиксированного x

$$\mathbf{E}\varphi\big(x-\zeta_n(t)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}\varphi\big(x-w(t)\big). \tag{6}$$

В случае $\operatorname{Re}\sigma^2 = 0$ (уравнение Шрёдингера) в силу "физической" мотивации более естественной является другая постановка задачи. Именно, в [4, 5] для функций $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, таких что $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \in [-M, M]$, доказывалась сходимость (при фиксированном $t > 0$) функций $u_n(t,\cdot)$, где

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}\varphi\big(x-\sigma\zeta_n(t)\big), \tag{7}$$

к функции $u(t,\cdot)$, где

$$u(t,x) = \mathbf{E}\varphi\big(x-\sigma w(t)\big), \tag{8}$$

в $L_2(\mathbb{R})$ (или в метрике пространства Соболева $W_2^k(\mathbb{R})$, см. ниже).

Заметим, что использование формулы (7) автоматически предполагает, что у случайной величины ξ_1 есть экспоненциальный момент. Как известно, целые функции экспоненциального типа M, ограниченные на вещественной оси, по большинству направлений непараллельных вещественной оси растут экспоненциально, что означает, что в формулах (7) и (8) вычисляется математическое ожидание экспоненциально растущей функции.

Мы в настоящей работе для простоты рассматриваем только уравнение Шрёдингера

$$-i\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{9}$$

и предлагаем другой способ аппроксимации решения задачи Коши (9), (2), существенно отличный от (7). Вместо аппроксимации начальной функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ целой аналитической функцией экспоненциального типа M (формула (4)) мы будем разлагать начальную функцию в сумму двух функций, первая из которых аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а вторая – в нижнюю. Будет предложено два типа аппроксимации. Первый из них в качестве случайного процесса использует стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере, а второй – построенный выше процесс $\zeta_n(t)$. При этом, в отличие от [4, 5], не предполагается симметричность распределения ξ_1, а напротив, предполагается, что ξ_1 неотрицательна и имеет конечный четвертый момент.

§2. Основные обозначения.

Встречающиеся в выкладках константы обычно обозначаются буквой C, одна и та же буква C может обозначать разные константы.

Через $W_2^k(\mathbb{R})$ мы будем обозначать пространство Соболева функций, определенных на $\mathbb{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно. В пространстве $W_2^k(\mathbb{R})$ мы выберем норму (эквивалентную стандартной, см., например, [8], 3.I.8)

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} (1 + |p|^{2k})|\widehat{\psi}(p)|^2 \, dp,$$

где через $\widehat{\psi}$ обозначено прямое преобразование Фурье функции ψ, которое в данной работе определяется как

$$\widehat{\psi}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipx}\psi(x) \, dx.$$

Соответственно, в обратном преобразовании Фурье появляется множитель $1/2\pi$, именно

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\widehat{\psi}(p) \, dp.$$

Далее, через $\mathcal{R}_0(\mathbb{R})$ мы будем обозначать множество всех функций ψ вещественного аргумента, являющихся обратными преобразованиями Фурье зарядов конечной полной вариации:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\widehat{\Psi}(dp).$$

В случае, когда функция $\widehat{\psi}(p)$ будет суммируемой на $\mathbb{R}$ функцией, заряд $\widehat{\Psi}$ будет абсолютно непрерывен относительно меры Лебега на оси, причем $\widehat{\Psi}(A) = \int\limits_A \widehat{\psi}(p) \, dp$. Ниже преобразованием Фурье функции класса $\mathcal{R}_0(\mathbb{R})$ мы будем называть как функцию $\widehat{\psi}(p)$, так и заряд $\widehat{\Psi}(A)$.

Если H_1, H_2 – два гильбертовых пространства, а линейное отображение $A : H_1 \to H_2$ ограничено, то под $\|A\|_{H_1 \to H_2}$ мы будем понимать операторную норму: $\|A\|_{H_1 \to H_2} = \sup\limits_{\{u : \|u\|_{H_1} = 1\}} \|Au\|_{H_2}$.

Далее мы будем неоднократно рассматривать операторы A, действующие по правилу

$$(Au)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx} A(p)\, \widehat{u}(p)\, dp.$$

Эти операторы являются псевдодифференциальными операторами (п.д.о.) с символом $A(p)$. Вопрос об области определения A будет нами рассматриваться в зависимости от свойств символа $A(p)$.

§3. Случайные величины и отвечающие им линейные функционалы и операторы.

В этом параграфе вводятся определения и понятия, позволяющие проще описать процедуру аппроксимации решения задачи Коши, изложенную в следующих двух параграфах. Фактически, мы несколько расширим понятие случайной величины, с тем, чтобы иметь возможность проводить над этими объектами операции, которые невозможно проводить над обычными случайными величинами. Примером такой операции может служить, например, "второе центрирование" – операция, делающая равной нулю третий семиинвариант.

Мы не претендуем здесь на построение завершенной теории, речь скорее идет о выборе удобной формы изложения. Более того, пока мы имеем дело только с невозмущенным уравнением Шрёдингера, эта форма изложения не дает значимого выигрыша. Если же мы рассмотрим уравнение Шрёдингера с потенциалом (этот материал не вошел в текст настоящей работы), то такая форма изложения будет иметь уже значительное преимущество.

Итак, пусть ξ – случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, а $f_\xi(p) = \mathbf{E} e^{ip\xi}$ – ее характеристическая функция.

Каждая случайная величина ξ определяет линейный функционал l_ξ, действующий на непрерывную ограниченную функцию φ как

$$(l_\xi, \varphi) = \mathbf{E}\varphi(-\xi), \tag{10}$$

и линейный оператор Q_ξ, действующий как

$$Q_\xi \varphi(x) = \mathbf{E}\varphi(x-\xi). \tag{11}$$

Заметим, что полагая в (10) (при фиксированном $p \in \mathbb{R}$) $\varphi(x) = e^{-ipx}$, получим

$$(l_\xi, \varphi) = \mathbf{E}e^{ip\xi} = f_\xi(p). \tag{12}$$

Далее, если дополнительно предположить, что преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ функции φ принадлежит $L_1(\mathbb{R})$, то в этом случае линейный функционал l_ξ действует на функцию φ как

$$(l_\xi, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(p)\,\mathbf{E}e^{ip\xi}dp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(p) f_\xi(p)dp, \tag{13}$$

а оператор Q_ξ действует как

$$Q_\xi\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)\,\mathbf{E}e^{ip\xi}dp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p) f_\xi(p)dp. \tag{14}$$

Последняя формула показывает, что Q_ξ – п.д.о. с символом $f_\xi(p)$.

Заметим, что формулы (13), (14) остаются справедливыми и для случай, когда функция φ принадлежит классу $\mathcal{R}_0(\mathbb{R})$ (с естественной заменой $\widehat{\varphi}(p)dp$ на $\widehat{\varphi}(dp)$).

Это не единственные интересующие нас функционал и оператор, определяемые фиксированной случайной величиной ξ. Ниже мы определим ряд других функционалов и операторов.

Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. Представим функцию φ в виде суммы

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = P_+\varphi + P_-\varphi, \tag{15}$$

где P_+, P_- – проекторы Рисса, определяемые как

$$\varphi_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)dp, \quad \varphi_-(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)dp. \tag{16}$$

Важно отметить, что функция φ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а φ_-, соответственно, в нижнюю.

Определим теперь линейный функционал $l_\xi^\pm$ и линейный оператор $Q_\xi^\pm$, полагая (как и выше, предполагаем, что $\widehat{\varphi} \in L_1(\mathbb{R})$)

$$(l_\xi^\pm, \varphi) = \mathbf{E}\big(\varphi_+(\xi) + \varphi_-(-\xi)\big) \tag{17}$$

и
$$Q_\xi^{\pm}\varphi(x)=\mathbf{E}\bigl(\varphi_+(x+\xi)+\varphi_-(x-\xi)\bigr). \tag{18}$$

Заметим, что оператор $Q_\xi^{\pm}$ является п.д.о. с символом $f_\xi(|p|)$. Действительно
$$Q_\xi^{\pm}\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\left(\mathbf{E}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ip(x+\xi)}\widehat{\varphi}(p)\,dp+\mathbf{E}\int_0^\infty e^{-ip(x-\xi)}\widehat{\varphi}(p)\,dp\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}f_\xi(-p)\,\widehat{\varphi}(p)\,dp+\int_0^\infty e^{-ipx}f_\xi(p)\,\widehat{\varphi}(p)\,dp\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}f_\xi(|p|)\,\widehat{\varphi}(p)\,dp. \tag{19}$$

Далее, имеем
$$(l_\xi^{\pm},\varphi)=Q_\xi^{\pm}\varphi(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(|p|)\,\widehat{\varphi}(p)\,dp, \tag{20}$$
причем (19),(20) остаются справедливыми также и для $\varphi\in\mathcal{R}_0(\mathbb{R})$.

С целью упрощения формул вместо (17) мы будем далее использовать несколько другие обозначения. Именно, значок $\pm$ мы будем добавлять к самой случайной величине ξ, как индикатор того, что речь идет о функционале $l_\xi^{\pm}$. Именно, положим по определению
$$\mathbf{E}\varphi(\xi^{\pm})=\mathbf{E}\bigl(\varphi_+(\xi)+\varphi_-(-\xi)\bigr). \tag{21}$$

Отметим, что в последней формуле $\xi^{\pm}$ уже не является случайной величиной, а является только линейным функционалом (обобщенной функцией) над классом функций φ, таких что $\widehat{\varphi}\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$. Мы будем называть $\xi^{\pm}$ обобщенной случайной величиной.

Заметим, что при некоторых вычислениях с $\xi^{\pm}$ можно обращаться как с обычной случайной величиной. Если мы для фиксированного p положим в (21) $\varphi(x)=e^{-ipx}$ (в этом случае $\widehat{\varphi}$ – единичная масса, сидящая в точке p), то получим, что обобщенная случайная величина $\xi^{\pm}$ имеет “характеристическую функцию” $f_{\xi^{\pm}}$ вида
$$f_{\xi^{\pm}}(p)=\mathbf{E}e^{ip\xi^{\pm}}=f_\xi(|p|). \tag{22}$$

С использованием обобщенной случайной величины $\xi^{\pm}$ формула для определения оператора $Q_{\xi}^{\pm}$ становится такой же, как (11), а именно:

$$Q_{\xi}^{\pm}\varphi(x) = \mathbf{E}\varphi(x - \xi^{\pm}). \tag{23}$$

Посмотрим теперь, как будут меняться функционал $l_{\xi}^{\pm}$ и оператор $Q_{\xi}^{\pm}$ при различных преобразованиях ξ. Предположим, что у случайной величины ξ конечно математическое ожидание. Пусть $a_1 = \mathbf{E}\xi$, через $\xi^{(1)} = \xi - a_1$ обозначим соответствующую центрированную случайную величину. Тогда в силу (19) оператор $Q_{\xi^{(1)}}^{\pm}$ действующий по правилу

$$Q_{\xi^{(1)}}^{\pm}\varphi(x) = \mathbf{E}\Big(\varphi_{+}(x + \xi^{(1)}) + \varphi_{-}(x - \xi^{(1)})\Big),$$

является п.д.о. с символом $e^{i|p|a_1} f_{\xi}(|p|)$, а

$$(l_{\xi^{(1)}}^{\pm}, \varphi) = Q_{\xi^{(1)}}^{\pm}\varphi(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i|p|a_1} f_{\xi}(|p|)\widehat{\varphi}(p)\, dp.$$

С использованием обобщенной случайной величины $(\xi^{(1)})^{\pm}$ формула для определения оператора $Q_{\xi^{(1)}}^{\pm}$ становится такой же, как (11), а именно:

$$Q_{\xi^{(1)}}^{\pm}\varphi(x) = \mathbf{E}\varphi\big(x - (\xi^{(1)})^{\pm}\big).$$

Пусть теперь у случайной величины ξ конечен третий момент. Операция центрирования делает равным нулю первый момент (он же первый семиинвариант). Кроме центрирования нам понадобится еще одна операция, которую мы назовем вторым центрированием. Эта операция делает равным нулю кроме первого также и третий семиинвариант. Опишем эту операцию подробнее. Пусть $a_2 = \mathbf{E}(\xi^{(1)})^2$ – второй, а a_3 – третий семиинвариант. Это означает, что в окрестности нуля для характеристической функции справедливо представление

$$f_{\xi}(p) = \exp\Big(ipa_1 + \frac{(ip)^2}{2}a_2 + \frac{(ip)^3}{6}a_3 + o(p^3)\Big).$$

Операция центрирования соответствует умножению характеристической функции на e^{-ipa_1}, а операция второго центрирования соответствует дополнительному умножению на $e^{-\frac{(ip)^3 a_3}{6}}$ (разумеется, после этого она уже не обязана оставаться характеристической функцией).

Обозначим дважды центрированную случайную величину через $\xi^{(2)}$. Она уже является только обобщенной случайной величиной. Аналогично тому, как это было для обобщенной случайной величины $\xi^{\pm}$, естественно ожидать, что величине $\xi^{(2)}$ соответствует п.д.о. с символом $e^{-(ipa_1+\frac{(ip)^3a_3}{6})}f_\xi(p)$. Таким образом, остается только найти выражение для этого оператора в виде математического ожидания от некоторого функционала. Для этого определим линейный функционал $l_{\xi^{(2)}}$, полагая

$$(l_{\xi^{(2)}},\varphi)=\mathbf{E}(\varphi*A)(-\xi^{(1)}), \tag{24}$$

где функция A является обратным преобразованием Фурье функции $e^{-\frac{(ip)^3a_3}{6}}$ и, соответственно, выражается через функцию Эйри (напомним, что функция Эйри $\mathrm{Ai}(x)$ является обратным преобразованием Фурье функции $\widehat{\mathrm{Ai}}(p)=e^{-\frac{ip^3}{3}}$, см. [9], с. 286). Соответственно, имеем

$$A(x)=\sqrt[3]{\frac{2}{a_3}}\mathrm{Ai}\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{a_3}}x\right).$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, положим по определению

$$\mathbf{E}\varphi(\xi^{(2)})=\mathbf{E}(\varphi*A)(-\xi^{(1)}). \tag{25}$$

Формально полагая в последней формуле $\varphi(x)=e^{-ipx}$, получаем, что обобщенная случайная величина $\xi^{(2)}$ имеет “характеристическую функцию” $f_{\xi^{(2)}}(p)$ вида

$$f_{\xi^{(2)}}(p)=e^{-ipa_1}e^{-\frac{(ip)^3a_3}{6}}f_\xi(p). \tag{26}$$

Определим теперь оператор $Q_{\xi^{(2)}}$, полагая

$$Q_{\xi^{(2)}}\varphi(x)=\mathbf{E}(\varphi*A)(x-\xi^{(1)}), \tag{27}$$

или, если использовать обобщенную случайную величину $\xi^{(2)}$, то

$$Q_{\xi^{(2)}}\varphi(x)=\mathbf{E}\varphi(x-\xi^{(2)}). \tag{28}$$

Аналогичным же образом определяется обобщенная случайная величина $(\xi^{(2)})^{\pm}$. Именно, определим линейный функционал $l^{\pm}_{\xi^{(2)}}$, полагая

$$(l^{\pm}_{\xi^{(2)}},\varphi)=\mathbf{E}(\varphi*A)\big((\xi^{(1)})^{\pm}\big)=\mathbf{E}\big((\varphi*A)_+(\xi^{(1)})+(\varphi*A)_-(-\xi^{(1)})\big), \tag{29}$$

и псевдодифференциальный оператор $Q^{\pm}_{\xi^{(2)}}$, полагая

$$Q^{\pm}_{\xi^{(2)}}\varphi(x) = \mathbf{E}(\varphi{*}A)(x-(\xi^{(2)})^{\pm}) = \mathbf{E}\big((\varphi{*}A)_{+}(x+\xi^{(1)})+(\varphi{*}A)_{-}(x-\xi^{(1)})\big). \tag{30}$$

Важно отметить, что крайние правые части формул (29) и (30) содержат уже математические ожидания только от обычных случайных величин (не обобщенных). Если использовать обобщенные случайные величины, то соответствующие формулы станут короче, а именно:

$$(l^{\pm}_{\xi^{(2)}}, \varphi) = \mathbf{E}\varphi\big(-(\xi^{(2)})^{\pm}\big), \quad Q^{\pm}_{\xi^{(2)}}\varphi(x) = \mathbf{E}\varphi\big(x-(\xi^{(2)})^{\pm}\big). \tag{31}$$

Нетрудно показать, что оператор $Q^{\pm}_{\xi^{(2)}}$ является п.д.о. с символом $f_{(\xi^{(2)})^{\pm}}(p)$, где

$$f_{(\xi^{(2)})^{\pm}}(p) = f_{\xi}(|p|)\cdot e^{-i|p|a_1}\cdot e^{-\frac{(i|p|)^3a_3}{6}}. \tag{32}$$

Следующим шагом мы определим операцию умножения случайных величин (обычных и обобщенных) на комплексную константу σ. Сразу же отметим, что если ξ – обычная (вещественная) случайная величина, то для нее уже определена операция умножения на σ. Случайная величина $\sigma\xi$ является также обычной случайной величиной, только комплекснозначной (т.е. двумерной), причем ее распределение (вероятностное) на комплексной плоскости сосредоточено на прямой $\sigma t,\ t\in\mathbb{R}$. Важно подчеркнуть, что определяемая нами операция не совпадает с этой. В частности, если $\operatorname{Im}\sigma\neq 0$, то $\sigma\xi$ будет обобщенной случайной величиной (то есть соответствующее распределение уже не будет вероятностным), даже если ξ было обычной случайной величиной.

Для наших целей будет достаточно определить обобщенную случайную величину $(\sigma\xi^{(2)})^{\pm}$, где

$$\sigma = e^{i\frac{\pi}{4}},$$

именно этим мы и ограничимся.

Предположим еще дополнительно, что случайная величина ξ неотрицательна и $a_3>0$. Как обычно, чтобы задать обобщенную случайную величину $(\sigma\xi^{(2)})^{\pm}$, достаточно определить функционал $l^{\pm}_{\sigma\xi^{(2)}}$ и оператор $Q^{\pm}_{\sigma\xi^{(2)}}$. Положим по определению

$$(l^{\pm}_{\sigma\xi^{(2)}}, \varphi) = \mathbf{E}\Big((\varphi * B)_{+}(\sigma\xi) + (\varphi * B)_{-}(-\sigma\xi)\Big), \tag{33}$$

$$Q^{\pm}_{\sigma\xi^{(2)}}\varphi(x) = \mathbf{E}\Big((\varphi * B)_{+}(x+\sigma\xi) + (\varphi * B)_{-}(x-\sigma\xi)\Big), \tag{34}$$

где функция B задается своим преобразованием Фурье как

$$\widehat{B}(p) = e^{-i\sigma|p|a_1} \cdot e^{-\frac{(i\sigma|p|)^3 a_3}{6}} = e^{-i\sigma|p|a_1} \cdot e^{-\frac{\sigma|p|^3 a_3}{6}}. \tag{35}$$

Заметим, что по предположению $a_3 > 0$ и, тем самым, выражение (35) определяет быстро убывающую функцию, поэтому обратное преобразование Фурье определено в классическом смысле.

Формула (33) определяет обобщенную случайную величину $(\sigma\xi^{(2)})^{\pm}$ с "характеристической функцией"

$$f_{(\sigma\xi^{(2)})^{\pm}}(p) = \mathbf{E}e^{ip(\sigma\xi^{(2)})^{\pm}} = f_{\xi}(|p|)\, e^{-i\sigma|p|a_1}\, e^{-\frac{\sigma|p|^3 a_3}{6}}. \tag{36}$$

С использованием обобщенной случайной величины $(\sigma\xi^{(2)})^{\pm}$ формула для оператора $Q^{\pm}_{\sigma\xi^{(2)}}$ выглядит как

$$Q^{\pm}_{\sigma\xi^{(2)}}\varphi(x) = \mathbf{E}\varphi\big(x - (\sigma\xi^{(2)})^{\pm}\big). \tag{37}$$

Из (35) следует, что $Q^{\pm}_{\sigma\xi^{(2)}}$ является п.д.о. с символом $f_{(\sigma\xi^{(2)})^{\pm}}(p)$.

§4. Аппроксимация решения задачи Коши средними значениями функционалов от пуассоновской случайной меры

Пусть $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,\infty)\times[0,\infty)$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\nu(dt, dx) = \frac{dt\,dx}{x^3}. \tag{38}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим сложный пуассоновский процесс $\xi_\varepsilon(t)$, полагая

$$\xi_\varepsilon(t) = \int_0^t \int_\varepsilon^{e\varepsilon} x\,\nu(ds, dx) \geqslant 0. \tag{39}$$

Для $p \in \mathbb{R}$ имеем

$$\mathbf{E}e^{ip\xi_\varepsilon(t)} = \exp\left(t\int_\varepsilon^{e\varepsilon} (e^{ipx} - 1)\frac{dx}{x^3}\right). \tag{40}$$

Используя (40), легко найти первый и третий семиинварианты случайной величины $\xi_\varepsilon(t)$. Именно,

$$a_1(t) = t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} x\,\frac{dx}{x^3} = t\varepsilon^{-1}\,\frac{e-1}{e}, \tag{41}$$

$$a_3(t) = t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} x^3\,\frac{dx}{x^3} = t\varepsilon(e-1) > 0. \tag{42}$$

Через $\xi_\varepsilon^{(2)}(t)$ обозначим дважды центрированную (в смысле параграфа 2) случайную величину $\xi_\varepsilon(t)$. Пусть, как и выше $\sigma = e^{i\pi/4}$.

При фиксированном $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P_ε^t, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^t\varphi(x) &= Q^{\pm}_{\sigma\xi_\varepsilon^{(2)}(t)}\varphi(x) = \mathbf{E}\varphi\big(x - (\sigma\xi_\varepsilon^{(2)}(t))^{\pm}\big) \\ &= \mathbf{E}\Big(\varphi_+\big(x + \sigma\xi_\varepsilon^{(2)}(t)\big) + \varphi_-\big(x - \sigma\xi_\varepsilon^{(2)}(t)\big)\Big), \\ &= \mathbf{E}\Big((\varphi * B_\varepsilon^t)_+\big(x + \sigma\xi_\varepsilon(t)\big) + (\varphi * B_\varepsilon^t)_-\big(x - \sigma\xi_\varepsilon(t)\big)\Big), \end{aligned} \tag{43}$$

где функция B_ε^t задается своим преобразованием Фурье, а именно:

$$\widehat{B_\varepsilon^t}(p) = \exp\Big(\frac{-i\sigma t(e-1)|p|}{e\varepsilon}\Big)\,\exp\Big(-\frac{i^3\sigma^3 t\varepsilon(e-1)|p|^3}{6}\Big).$$

Особо подчеркнем, что правая часть (43) содержит только обычные случайные величины.

Из (36) следует, что оператор P_ε^t является п.д.о. с символом

$$\mathbf{E}e^{i\sigma|p|\xi_\varepsilon(t)}\exp\Big(\frac{-i\sigma t(e-1)|p|}{e\varepsilon}\Big)\,\exp\Big(-\frac{i^3\sigma^3 t\varepsilon(e-1)|p|^3}{6}\Big)$$

$$= \exp\Big(t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\big(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{1}{6}(i|p|\sigma x)^3\big)\frac{dx}{x^3}\Big) = e^{-\frac{itp^2}{2}}\,H(t,\varepsilon,p), \tag{44}$$

где

$$H(t,\varepsilon,p) = \exp\Big(t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{1}{2}(i|p|\sigma x)^2 - \frac{1}{6}(i|p|\sigma x)^3\Big)\frac{dx}{x^3}\Big). \tag{45}$$

Заметим, что в силу (44) генератор G_ε полугруппы P_ε^t есть п.д.о. с символом $\widehat{g}_\varepsilon(p)$, где

$$\widehat{g}_\varepsilon(p) = -\frac{ip^2}{2} + \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{1}{2}(i|p|\sigma x)^2 - \frac{1}{6}(i|p|\sigma x)^3\Big)\frac{dx}{x^3}. \quad (46)$$

Далее, обозначим через P^t полугруппу

$$P^t = e^{\frac{it}{2}D}, \quad (47)$$

где D – оператор, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$ по правилу $Du(x) = u''(x)$. Полугруппа P^t переводит начальную функцию φ в решение $u(t,\cdot)$ уравнения Шрёдингера (9) (см., например, [7], X.8.).

Теорема 1. *Существует постоянная $C > 0$, такая что для любой функции $\varphi \in W_2^4(\mathbb{R})$ и всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\|P_\varepsilon^t\varphi - P^t\varphi\|_{L_2} \leqslant C\, t\varepsilon^2 \|\varphi\|_{W_2^4}.$$

Доказательство. Докажем прежде всего справедливость неравенства

$$|H(t,\varepsilon,p)| \leqslant 1. \quad (48)$$

Для доказательства (48) достаточно доказать, что вещественная часть подинтегрального выражения в (45) неположительна. Это утверждение, в свою очередь, следует из следующего элементарного неравенства.

Лемма 1. *Для любого $x \geqslant 0$*

$$\operatorname{Re}\Big(e^{-x(1-i)} - 1 + x(1-i) - \frac{1}{2}x^2(1-i)^2 + \frac{1}{6}x^3(1-i)^3\Big) \leqslant 0.$$

Для доказательства утверждения теоремы мы воспользуемся следующей известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Далее, пусть B – возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [6], гл. IX, §2 п. 1)

$$U_{A+B}(t) = U_A(t) + \int_0^t U_{A+B}(t-\tau)\, B\, U_A(\tau)\, d\tau. \tag{49}$$

Применим эту формулу для случая, когда $A = \frac{i}{2}\frac{d^2}{dx^2}$, а $A+B = G_\varepsilon$ (формула (46)). Соответственно,

$$U_A(t) = P^t, \quad U_{A+B}(t) = P_\varepsilon^t. \tag{50}$$

Очевидно, что в нашем случае

$$\|U_{A+B}(t-\tau)\|_{L_2 \to L_2} \leqslant 1, \tag{51}$$

и

$$\|U_A(\tau)\|_{W_2^4 \to W_2^4} = 1. \tag{52}$$

Таким образом, в силу (49) для доказательства теоремы нам достаточно оценить $\|B\|_{W_2^4 \to L_2}$. Заметим, прежде всего, что оператор B является п.д.о. с символом $\widehat{b}_\varepsilon(p) = \frac{ip^2}{2} + \widehat{g}_\varepsilon(p)$. Для $\varphi \in W_2^4(\mathbb{R})$ имеем

$$\|B\varphi\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int |\widehat{\varphi}(p)|^2 |\widehat{b}_\varepsilon(p)|^2\, dp.$$

Заметим, что при $|p|\varepsilon \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$|\widehat{b}_\varepsilon(p)|^2 \leqslant C|p|^4\varepsilon^2,$$

а при $|p|\varepsilon > 1$ справедливо

$$|\widehat{b}_\varepsilon(p)|^2 \leqslant C|p|^3\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\|B\varphi\|_{L_2}^2 \leqslant C\varepsilon^4 \int\limits_{|p|\varepsilon \leqslant 1} |\widehat{\varphi}(p)|^2 |p|^8 dp + C\varepsilon^2 \int\limits_{|p|\varepsilon > 1} |\widehat{\varphi}(p)|^2 |p|^6 dp \leqslant C\varepsilon^4 \|\varphi\|_{W_2^4}^2.$$

$\square$

Следствие. *Для любой функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо*

$$\|P_\varepsilon^t \varphi - P^t \varphi\|_{L_2} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство. В силу того, что нормы операторов $\|P^t\|_{L_2\to L_2}$ и $\|P^t_\varepsilon\|_{L_2\to L_2}$ не больше 1, а класс Соболева $W^4_2(\mathbb{R})$ плотен в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, утверждение следствия немедленно вытекает из утверждения теоремы 1 и теоремы Банаха–Штейнгауза (см., например, [3], II.1.18). □

§5. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.

В этом параграфе мы построим вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера (9) математическими ожиданиями функционалов от сумм независимых случайных величин.

Итак, пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин с общим распределением $\mathcal{P}$. Мы предположим также, что случайная величина ξ_1 имеет конечный четвертый момент и $\mathbf{E}\xi_1^2=1$.

Далее, пусть $\eta(t)$, $t\geqslant 0$, – стандартный ($\mathbf{E}\eta(t)=t$) пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}$. Обозначим

$$m_1=\mathbf{E}\xi_1>0,\quad m_2=\mathbf{E}\xi_1^2=1,\quad m_3=\mathbf{E}\xi_1^3>0,\quad m_4=\mathbf{E}\xi_1^4. \tag{53}$$

Для каждого натурального n определим сложный пуассоновский процесс $\zeta_n(t)$, $t\in[0,T]$, полагая

$$\zeta_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\eta(nt)}\xi_j. \tag{54}$$

Найдем характеристическую функцию случайной величины $\zeta_n(t)$. Имеем

$$\mathbf{E}e^{ip\zeta_n(t)}=\exp\biggl(nt\int\limits_{\mathbb{R}}\Bigl(e^{\frac{ipy}{\sqrt{n}}}-1\Bigr)\,d\mathcal{P}(y)\biggr). \tag{55}$$

Из (55) легко находится третий семиинвариант случайной величины $\zeta_n(t)$.

Далее, через $\zeta_n^{(2)}(t)$ обозначим дважды центрированный процесс $\zeta_n(t)$ и определим полугруппу операторов P^t_n, полагая для $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$

$$P^t_n\varphi(x)=Q^{\pm}_{\sigma\zeta_n^{(2)}(t)}\varphi(x)=\mathbf{E}\varphi\bigl(x-(\sigma\zeta_n^{(2)}(t))^{\pm}\bigr)$$
$$=\mathbf{E}\biggl(\varphi_+\bigl(x+\sigma\zeta_n^{(2)}(t)\bigr)+\varphi_-\bigl(x-\sigma\zeta_n^{(2)}(t)\bigr)\biggr)$$

$$= \mathbf{E}\Big((\varphi * R_n^t)_+ \big(x + \sigma\zeta_n(t)\big) + (\varphi * R_n^t)_- \big(x - \sigma\zeta_n(t)\big)\Big), \qquad (56)$$

где функция R_n^t задается своим преобразованием Фурье, а именно:

$$\widehat{R_n^t}(p) = \exp(-it\sqrt{n}|p|\sigma m_1)\, \exp\Big(- \frac{i^3\sigma^3 t|p|^3}{6\sqrt{n}}\Big).$$

Из (35) следует, что оператор P_n^t является п.д.о. с символом

$$\mathbf{E}e^{i\sigma|p|\zeta_n(t)} \exp\Big(- it\sqrt{n}\sigma m_1|p|\Big) \exp\Big(- \frac{i^3\sigma^3 t\sigma m_3|p|^3}{6\sqrt{n}}\Big)$$

$$= \exp\bigg(nt\int\limits_0^\infty \Big(e^{\frac{i|p|\sigma y}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6}\Big(\frac{i|p|\sigma y}{\sqrt{n}}\Big)^3\Big) d\,\mathcal{P}(y)\bigg) = e^{-\frac{itp^2}{2}} H_n(t,p), \qquad (57)$$

где

$$H_n(t,p) = \exp\bigg(nt\int\limits_0^\infty \Big(e^{\frac{i|p|\sigma y}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\Big(\frac{i|p|\sigma y}{\sqrt{n}}\Big)^2 - \frac{1}{6}\Big(\frac{i|p|\sigma y}{\sqrt{n}}\Big)^3\Big) d\,\mathcal{P}(y)\bigg). \qquad (58)$$

Заметим, что в силу (58) генератор G_n полугруппы P_n^t есть п.д.о. с символом $\widehat{g}_n(p)$, где

$$\widehat{g}_n(p) = -\frac{ip^2}{2} + n\int\limits_0^\infty \Big(e^{\frac{i|p|\sigma y}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\Big(\frac{i|p|\sigma y}{\sqrt{n}}\Big)^2 - \frac{1}{6}\Big(\frac{i|p|\sigma y}{\sqrt{n}}\Big)^3\Big) d\,\mathcal{P}(y). \qquad (59)$$

Теорема 2. *Существует $C > 0$, такое что для любой функции $\varphi \in W_2^4(\mathbb{R})$ и всех $t > 0$ справедливо*

$$\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{L_2} \leqslant \frac{C\,t}{n}\|\varphi\|_{W_2^4}.$$

Доказательство. Доказательство практически повторяет доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что из леммы 1 немедленно следует справедливость неравенства

$$|H_n(t,p)| \leqslant 1.$$

Далее снова воспользуемся формулой (49), но теперь для случая, когда $A = \frac{i}{2}\,\frac{d^2}{dx^2}$, а $A + B = G_n$ (формула (59)).

Снова нам достаточно оценить $\|B\|_{W_2^4\to L_2}$. Заметим, прежде всего, что оператор B является п.д.о. с символом $\widehat{b}_n(p)=\frac{ip^2}{2}+\widehat{g}_n(p)$.

При $\frac{|p|}{\sqrt{n}}\leqslant 1$ справедливо неравенство

$$|\widehat{b}_n(p)|\leqslant\frac{C|p|^4}{n},$$

а при $\frac{|p|}{\sqrt{n}}>1$ справедливо

$$|\widehat{b}_n(p)|\leqslant\frac{C|p|^3}{\sqrt{n}}.$$

Далее, для $\varphi\in W_2^4(\mathbb{R})$ имеем

$$\|B\varphi\|_{L_2}^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}|\widehat{\varphi}(p)|^2|\widetilde{b}_n(p)|^2dp$$

$$\leqslant\frac{C}{n^2}\int\limits_{\frac{|p|}{\sqrt{n}}\leqslant 1}|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^8dp+\frac{C}{n}\int\limits_{\frac{|p|}{\sqrt{n}}>1}|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^6dp\leqslant\frac{C}{n^2}\|\varphi\|_{W_2^4}^2. \qquad \square$$

Следствие. *Для любой функции $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$ справедливо*

$$\|P_n^t\varphi-P^t\varphi\|_{L_2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Литература

1. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Лань, Санкт-Петербург, Москва, Краснодар, 2010.
2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Наука, М., 1958.
3. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория.* Издательство иностранной литературы, М., 1962.
4. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Предельные теоремы о сходимости функционалов от случайных блужданий к решению задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\Delta u$ with complex σ.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 88-102.
5. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Комплексный аналог центральной предельной теоремы и вероятностная аппроксимация интеграла Фейнмана.* — Докл. Академии наук **459**, No. 3 (2014), 400–402.
6. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972.
7. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 2. Мир, М., 1978.

8. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева и др., *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Издательство Ленинградского университета, 1981.
9. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды.* Наука, М., 1987.

Ibragimov I. A., Smorodina N. V., Faddeev M. M. On a limit theorem related to probabilistic representation of the Cauchy problem solution for the Schrödinger equation.

We suggest a new method of a probabilistic approximation of the Cauchy problem solution for the unperturbed Schrödinger equation by expectations of functionals of some random walk. In contrast to our previous papers we do not suppose the existence of exponential moment for each step of the random walk.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
С.-Петербург, 191023;
С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9,
С.-Петербург, 199034 Россия
E-mail: ibr32@pdmi.ras.ru
E-mail: smorodina@pdmi.ras.ru

Поступило 17 октября 2016 г.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9,
С.-Петербург, 199034 Россия
E-mail: m.faddeev@spbu.ru