Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

А. Ю. Зайцев

НЕРАВЕНСТВА АРАКА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ

В 80-е годы прошлого века Т. Арак [1] получил несколько важных неравенств для функций концентрации сумм независимых случайных величин. Используя эти результаты, он решил одну старую проблему, сформулированную ранее А. Н. Колмогоровым [7]. В совместных работах [3–5] мы применили результаты Арака для исследования проблемы Литтлвуда–Оффорда, которая интенсивно изучалась в последние годы. В этой статье мы видоизменим один из результатов Арака, включив в его формулировку обобщенные арифметические прогрессии.

Введем необходимые обозначения. Функция концентрации одномерного вероятностного распределения F определяется с помощью равенства

$$Q(F,\tau)=\sup_{x\in\mathbf{R}}F\big\{[x,x+\tau]\big\},\quad \tau\geqslant 0.$$

В дальнейшем символы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_0$ будут обозначать множества всех положительных и неотрицательных целых чисел соответственно.

Пусть $r\in\mathbf{N}_0$, $m\in\mathbf{N}$ фиксированы, h – произвольный r-мерный вектор, а V – произвольное замкнутое симметричное выпуклое подмножество $\mathbf{R}^r$, содержащее не более m точек с целыми координатами. Определим $\mathcal{K}_{r,m}$ как совокупность всех множеств вида

$$K=\big\{\langle\nu,h\rangle:\nu\in\mathbf{Z}^r\cap V\big\}\subset\mathbf{R}. \tag{1}$$

Здесь $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbf{R}^r$. Мы будем называть такие множества ВОАП (выпуклые обобщенные арифметические прогрессии) по аналогии с понятием ОАП (обобщенных арифметических прогрессий), участвующем в современных исследованиях по проблеме Литтлвуда–Оффорда. Определение ОАП дано ниже. В случае $r=0$

Ключевые слова: функции концентрации, неравенства, суммы независимых случайных величин.

Работа поддержана грантом РФФИ 16-01-00367 и Программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики".

класс $\mathcal{K}_{r,m} = \mathcal{K}_{0,m}$ состоит из одного множества $\{0\}$, с нулем в качестве единственного элемента.

Для борелевской меры W на $\mathbf{R}$ и $\tau \geqslant 0$ определим $\beta_{r,m}(W,\tau)$ с помощью соотношения

$$\beta_{r,m}(W,\tau) = \inf_{K \in \mathcal{K}_{r,m}} W\{\mathbf{R} \setminus [K]_\tau\}, \tag{2}$$

где $[K]_\tau$ – замкнутая τ-окрестность множества K.

Следующая теорема 1 является частным случаем теоремы 4.3 главы II из монографии [2]. В работах [3–5] мы применяли теорему 1 для исследования проблемы Литтлвуда–Оффорда.

В данной работе мы получим аналог теоремы 1 для ОАП, заменяя в формулировке ВОАП $K \in \mathcal{K}_{r,m}$ образами ОАП. Это может оказаться более удобным в приложениях.

Теорема 1. *Пусть D – одномерное безгранично делимое распределение с характеристической функцией вида $\exp\big(\alpha\,(\widehat{W}(t) - 1)\big)$, $t \in \mathbf{R}$, где $\alpha > 0$ и $\widehat{W}(t)$ – характеристическая функция вероятностного распределения W. Пусть $\tau \geqslant 0$, $r \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{N}$. Тогда*

$$Q(D,\tau) \leqslant c_1^{r+1}\left(\frac{1}{m\sqrt{\alpha\,\beta_{r,m}(W,\tau)}} + \frac{(r+1)^{5r/2}}{(\alpha\,\beta_{r,m}(W,\tau))^{(r+1)/2}}\right), \tag{3}$$

где c_1 – некоторая абсолютная константа.

Арак [1] доказал аналог теоремы 1 для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин (см. теорему 4.2 главы II из монографии [2]). Он использовал эту теорему при доказательстве следующего замечательного результата:

Существует абсолютная константа C, такая что для любого одномерного распределения вероятностей F и для любого натурального числа n существует безгранично делимое распределение D_n, такое что

$$\rho(F^{*n}, D_n) \leqslant C\,n^{-2/3},$$

где $\rho(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – классическое равномерное расстояние Колмогорова между соответствующими функциями распределения.

Это дало окончательное решение давней проблемы, которую поставил А. Н. Колмогоров [7] в 50-х годах прошлого века (см. историю этой проблемы в [2])

Следующее определение содержится в статье Тао и Ву [9] (см. также [8]).

Пусть $r \in \mathbf{N}_0$ – неотрицательное целое число, $L = (L_1, \dots, L_r)$ – упорядоченный набор из r положительных вещественных чисел, $g = (g_1, \dots, g_r)$ – упорядоченный набор из r элементов $\mathbf{R}^d$. Тройка $P = (L, g, r)$ называется симметричной обобщенной арифметической прогрессией (ОАП) в $\mathbf{R}^d$. Здесь r – ранг, $L_1, \dots, L_r$ – размеры и $g_1, \dots, g_r$ – генераторы ОАП P. Образом ОАП P называется множество $\operatorname{Image}(P) \subset \mathbf{R}^d$, определяемое равенством

$$\operatorname{Image}(P) = \bigl\{m_1 g_1 + \dots + m_r g_r : -L_j \leqslant m_j \leqslant L_j,\ m_j \in \mathbf{Z} \text{ при всех } j = 1, \dots, r\bigr\}.$$

При $t > 0$ мы будем обозначать P^t – t-расширение ОАП P, то есть симметричную ОАП $P^t = (tL, g, r)$ с

$$\operatorname{Image}(P^t) = \bigl\{m_1 g_1 + \dots + m_r g_r : -tL_j \leqslant m_j \leqslant tL_j,\ m_j \in \mathbf{Z} \text{ при всех } j = 1, \dots, r\bigr\}.$$

Определим объем ОАП P равенством $\operatorname{size}(P) = |\operatorname{Image}(P)|$. Здесь и далее, для конечного множества K мы обозначаем через $|K|$ количество элементов $x \in K$.

На самом деле $\operatorname{Image}(P)$ представляет собой образ целочисленного параллелепипеда

$$B = \bigl\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbf{Z}^r : -L_j \leqslant m_j \leqslant L_j\bigr\}$$

при линейном отображении

$$\Phi : (m_1, \dots m_r) \in \mathbf{Z}^r \to m_1 g_1 + \dots + m_r g_r.$$

Мы говорим, что ОАП P является собственной, если это отображение взаимно однозначно, или, что то же самое, если

$$\operatorname{size}(P) = \prod_{j=1}^{r} \bigl(2\lfloor L_j \rfloor + 1\bigr). \tag{4}$$

Здесь $\lfloor x \rfloor$ – наибольшее целое число k, удовлетворяющее неравенству $k \leqslant x$. Для несобственных ОАП мы, конечно, имеем

$$\operatorname{size}(P) < \prod_{j=1}^{r} \bigl(2\lfloor L_j \rfloor + 1\bigr). \tag{5}$$

При $t > 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{size}(P^t) \leqslant \prod_{j=1}^{r} \big(2\,\lfloor tL_j \rfloor + 1\big). \tag{6}$$

В случае $r = 0$ векторы L и g не имеют координат и образ ОАП P состоит из одного нулевого вектора $0 \in \mathbf{R}^d$.

Замечание 1. Симметричные ОАП определяются не только своими образами (множествами точек в $\mathbf{R}^d$, допускающими представление $m_1 g_1 + \cdots + m_r g_r$, где $-L_j \leqslant m_j \leqslant L_j$, $m_j \in \mathbf{Z}$, при $1 \leqslant j \leqslant r$, см. [9]). Определение включает в себя генераторы $g_1, \ldots, g_r \in \mathbf{R}^d$ и размеры $L_1, \ldots, L_r \in \mathbf{R}$. Различные симметричные ОАП могут иметь один и тот же образ. Например, если $L_j < 1$, то генераторы g_j не используются при построении образа ОАП P. Тем не менее, образ ОАП P^t зависит от g_j, если $tL_j \geqslant 1$. Очевидно, что ОАП P и P^t по определению имеют одинаковые генераторы и одинаковые ранги.

Напомним, что выпуклое тело в r-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^r$ представляет собой компактное выпуклое множество с непустой внутренностью. Следующая лемма 1 содержится в теореме 1.6 работы [9].

Лемма 1. *Пусть V – выпуклое симметричное тело в $\mathbf{R}^r$, и пусть Λ – решетка в $\mathbf{R}^r$. Тогда существует симметричная собственная ОАП P в Λ с рангом $l \leqslant r$, такая что*

$$\operatorname{Image}(P) \subset V \cap \Lambda \subset \operatorname{Image}\big(P^{(c_2 r)^{3r/2}}\big), \tag{7}$$

где $c_2 \geqslant 1$ – некоторая абсолютная константа.

Следствие 1. *В условиях леммы 1 справедливо неравенство*

$$\operatorname{size}(P^{(c_2 r)^{3r/2}}) \leqslant \big(2\,(c_2\, r)^{3r/2} + 1\big)^r \,|\, V \cap \Lambda \,|\,. \tag{8}$$

Доказательство следствия 1. Используя лемму 1 и соотношения (4) и (6), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{size}\big(P^{(c_2 r)^{3r/2}}\big) &\leqslant \prod_{j=1}^{r} \big(\lfloor 2\,(c_2 r)^{3r/2} L_j \rfloor + 1\big) \\ &\leqslant \big(2(c_2 r)^{3r/2} + 1\big)^r \operatorname{size}(P) \leqslant \big(2(c_2 r)^{3r/2} + 1\big)^r \,|V \cap \Lambda|\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь числа L_j представляют собой размеры ОАП P. Мы использрвали то, что $\lfloor 2\,tL \rfloor + 1 \leqslant (2\,t + 1)\,(\lfloor 2\,L \rfloor + 1)$ при $L, t > 0$. □

Пусть $r \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{N}$ фиксированы, h – произвольный r-мерный вектор, а P – симметричная ОАП в $\mathbf{R}^r$ с образом $\mathrm{Image}(P) \subset \mathbf{Z}^r$, содержащим не более m точек с целыми координатами. Определим $\mathcal{P}_{r,m}$ как совокупность всех множеств вида

$$K = \big\{ \langle \nu, h \rangle : \nu \in \mathrm{Image}(P) \big\} \subset \mathbf{R}. \tag{10}$$

Для борелевской меры W на $\mathbf{R}$ и $\tau \geqslant 0$ определим $\gamma_{r,m}(W,\tau)$ с помощью соотношения

$$\gamma_{r,m}(W,\tau) = \inf_{K \in \mathcal{P}_{r,m}} W\{\mathbf{R} \setminus [K]_\tau\}. \tag{11}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема 2. Теорема 2 формулируется в терминах симметричных ОАП.

Теорема 2. *Пусть D – одномерное безгранично делимое распределение с характеристической функцией вида $\exp\big(\alpha\,(\widehat{W}(t) - 1)\big)$, $t \in \mathbf{R}$, где $\alpha > 0$ и W – вероятностное распределение. Пусть $\tau \geqslant 0$, $r \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{N}$. Тогда*

$$Q(D,\tau) \leqslant c_3^{r+1} \left(\frac{(c_4\, r + 1)^{3r^2/2}}{n\sqrt{\alpha\, \gamma_{r,n}(W,\tau)}} + \frac{(r+1)^{5r/2}}{(\alpha\, \gamma_{r,n}(W,\tau))^{(r+1)/2}} \right), \tag{12}$$

где c_3, c_4 – абсолютные постоянные.

Доказательство теоремы 2. Пусть $K \in \mathcal{K}_{r,m}$ – ВОАП, допускающая представление (1), где h – r-мерный вектор, а V – замкнутое симметричное выпуклое подмножество $\mathbf{R}^r$, содержащее не более m точек с целыми координатами.

Согласно лемме 1 и следствию 1, существует симметричная собственная ОАП P в $\mathbf{Z}^r$ с рангом $l \leqslant r$, такая что

$$\mathrm{Image}(P) \subset V \cap \mathbf{Z}^r \subset \mathrm{Image}(P_0), \quad P_0 = P^{(c_2 r)^{3r/2}}, \tag{13}$$

с абсолютной постоянной $c_2 \geqslant 1$ из утверждения леммы 1, причем

$$\begin{aligned} \mathrm{size}(P_0) &\leqslant \big(2\,(c_2\, r)^{3r/2} + 1\big)^r\, |V \cap \mathbf{Z}^r| \\ &\leqslant \big(2\,(c_2\, r)^{3r/2} + 1\big)^r m. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть линейное отображение $f : \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$ определяется равенством $f(y) = \langle y, h \rangle$, где $h \in \mathbf{R}^r$ участвует в определении K. Определим теперь симметричную ОАП $\overline{P}$ с $\mathrm{Image}(\overline{P}) = \overline{K} = \big\{ f(y) : y \in \mathrm{Image}(P_0) \big\}$ и с генераторами $\overline{g}_j = f(g_j)$, $j = 1, \ldots, l$, где g_j являются генераторами ОАП P_0. Очевидно, что $K \subset \overline{K} \subset \mathbf{R}$ и $\overline{P}$ является симметричной

ОАП ранга l и объема $\leqslant c_5\,(c_6\,r+1)^{3r^2/2}m$, где c_5, c_6 – абсолютные постоянные.

Заметим, что $\gamma_{r,n}(W,\tau)$ является невозрастающей функцией переменных r и n.

Пусть $k = \lfloor c_5\,(c_6\,r+1)^{3r^2/2}\rfloor + 1$. Из приведенных выше рассуждений следует, что $\beta_{r,m}(W,\tau) \geqslant \gamma_{r,km}(W,\tau)$ при $m = 1, 2, \ldots$. Теперь утверждение теоремы 2 при $n = km$, $m = 1, 2, \ldots$, вытекает из теоремы 1. Отсюда также следует то же самое утверждение при $km < n < k(m+1)$. Кроме того, очевидно, что $\beta_{r,1}(W,\tau) = \gamma_{r,1}(W,\tau) = \beta_{0,1}(W,\tau) = \gamma_{0,1}(W,\tau)$. Поэтому утверждение теоремы 2 при $1 \leqslant n < k$ вытекает теперь из теоремы 1 с $m = 1$. □

Замечание 2. Аналогичным образом мы можем получить аналоги теорем 4.1 и 4.2 главы II монографии [2] для обобщенных арифметических прогрессий.

Литература

1. Т. В. Арак, *О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова.* I. — Теория вероятн. и ее примен. **26**, No. 2 (1981), 225–245.
2. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986), 214 с.
3. Yu. S. Eliseeva, F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Arak inequalities for concentration functions and the Littlewood–Offord problem.* — arXiv:1506.09034 (2015).
4. Ф. Гётце, Ю. С. Елисеева, А. Ю. Зайцев, *Неравенства Арака для функций концентрации и проблема Литтлвуда–Оффорда.* — Доклады Академии наук **467**, No. 5 (2016), 514–518.
5. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *New applications of Arak's inequalities to the Littlewood–Offord problem.* — arXiv:1611.00831 (2016).
6. B. Green, *Notes on progressions and convex geometry.* — Preprint, 2005.
7. А. Н. Колмогоров, *Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых.* — Теория вероятн. и ее примен. **1** (1956), 384–394.
8. T. Tao, Van Vu, *Additive Combinatorics.* Cambridge Univ. Pr., 2006.
9. T. Tao, Van Vu, *John-type theorems for generalized arithmetic progressions and iterated sumsets.* — Adv. Math. **219**, No. 2 (2008), 428–449.

Zaitsev A. Yu. Arak's inequalities for the generalized arithmetic progressions.

In 1980's, Arak has obtained powerful inequalities for the concentration functions of sums of independent random variables. Using these results, he has solved an old problem stated by Kolmogorov. In this paper, we will modify one of Arak's results including in the statements the generalized arithmetic progressions.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27, С.-Петербург 191023;
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru

Поступило 30 ноября 2016 г.