Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

А. А. Заикин

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ АПОСТЕРИОРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА, ЦЕНТРИРОВАННОГО $\sqrt{n}$-СОСТОЯТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКОЙ

§1. Введение

Изучение асимптотического поведения апостериорного распределения восходит к известному результату Бернштейна–фон Мизеса об асимптотической нормальности апостериорного распределения (см., например, [12, с. 141]). Уточнение этого результата в виде асимптотических разложений по степеням $n^{-1/2}$ было получено различными авторами (см. Johnson [4], Гусев [1,2], Weng [13]).Однако уже самая грубая, нормальная аппроксимация позволяет выбирать различные центрирования исследуемой величины, равно как и различные параметры предельного распределения, не говоря уже и о разложениях, содержащие множество различных членов.

Весьма важен вопрос поведения остаточных членов асимптотик: в зависимости от центрирования, вида разложения и налагаемых на вероятностную модель условий остаток может равномерно с нужной скоростью стремиться к нулю как равномерно по всем значениям параметрического пространства $\theta \in \Theta$, так и в какой-то конкретной точке θ_0. В связи с этим стоит отметить статью Ghosh [3], в которой доказывается равномерность разложения Johnson [4].

Асимптотическая нормальность апостериорного распределения, по своей сути, полагается на известнейший результат локальной асимптотической нормальности функции отношения правдоподобия и связанное с ним понятие асимптотической достаточности статистик (см., например, [11]). До сих пор в работах по асимптотике апостериорного распределения использовалась лишь асимптотическая достаточность оценки максимального правдоподобия и дифференциальная достаточность статистики вклада. Однако эти результаты справедливы и для

Ключевые слова: апостериорное распределение, теорема Бернштейна–фон Мизеса, асимптотическое разложение, $\sqrt{n}$-состоятельные оценки.

гораздо более широкого класса статистик. В работе [8] устанавливается асимптотическая достаточность любой $\sqrt{n}$-состоятельной оценки параметра, что, по большому счету, и будет использоваться в настоящей работе.

Полученный в настоящей работе результат в некотором смысле обобщает ранее полученные разложения апостериорного распределения. Так, в [2–4] строятся разложения апостериорного распределения параметра, центрированного оценкой максимального правдоподобия, а в [2] – центрированного байесовской оценкой. В ранней работе автора [14] центрирование производится фиксированной точкой параметрического пространства. Таким образом, центрирование $\sqrt{n}$-состоятельной оценкой включает в себя все предыдущие результаты и существенным образом их обобщает. Еще одна особенность полученного здесь результата заключается в его равномерности по различным значениям параметра. Ранее результат подобного рода, насколько известно автору, был получен лишь в [3]. Равномерность асимптотик весьма полезна в байесовском анализе, и имеет ряд приложений, в том числе в задачах проверки гипотез и оценивания.

Дальнейшее содержание статьи организовано следующим образом.

В параграфе 2 статьи вводятся обозначения, приводятся условия на вероятностную модель и доказываются некоторые вспомогательны утверждения.

В параграфе 3 проводится доказательство аналога теоремы Бернштейна–фон Мизеса, в котором роль центрирующей величины играет произвольная $\sqrt{n}$-состоятельная оценка T_n, а именно – устанавливается тот факт, что условное распределение $\sqrt{n}(\vartheta - T_n)$ (где ϑ – параметр) при фиксированном значении выборки асимптотически нормально. При этом остаток является равномерным относительно того подмножества параметрического пространства, на котором равномерно состоятельна оценка T_n.

В параграфе 4 выводится асимптотическое разложение апостериорного распределения величины $\sqrt{n}(\vartheta - T_n)$. Подобно предыдущему параграфу, формулируется и доказывается утверждение о равномерной состоятельности остатка разложения.

Последний параграф посвящен разложению моментов апостериорного распределения, а именно – величин $\mathbf{E}\{w(\sqrt{n}(\vartheta - T_n))|\mathbf{X}\}$ для определенного класса функций w.

§2. Обозначения и предварительные результаты

Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ – измеримое пространство с заданным на нем семейством вероятностных мер $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$. Предполагается, что у распределения $\mathbf{P}_\theta$ существует плотность $p(x|\theta) = d\mathbf{P}_\theta/d\nu$ по некоторой σ-конечной меры ν, на $\mathfrak{A}$. В статистическом эксперименте наблюдается выборка $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, элементы которой принадлежат вероятностному пространству $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mathbf{P}_\theta)$. Значение параметра θ неизвестно и является реализацией случайной величины ϑ из распределения $\mathbf{G}$ с плотностью $g(\theta)$ по лебеговской мере. Чтобы избежать неопределенности в определении Θ, положим $\Theta = \{\theta : g(\theta) > 0\}$. Предполагается, что функция $p(x|\theta)$ задана всюду и измерима относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ – борелевская сигма-алгебра на Θ. Основным вероятностным пространством, использующимся в работе, будет $(\mathfrak{X}^\infty \times \Theta, \mathfrak{A}^\infty \otimes \mathfrak{B}, \mathbf{P})$, где $\mathbf{P}$ согласовано с условными распределениями $\mathbf{P}_\theta$ и распределением $\mathbf{G}$. Для упрощения записи будем записывать совместное распределение выборки $\mathbf{X}$ и параметра ϑ тем же символом $\mathbf{P}$, а условное распределение выборки при фиксированном параметре θ как $\mathbf{P}_\theta$. Соответствующие вероятностным мерам $\mathbf{P}_\theta$ и $\mathbf{P}$ математические ожидания обозначаются символами $\mathbf{E}_\theta$ и $\mathbf{E}$ соответственно. Плотность выборки $\mathbf{X}$ из $\mathbf{P}_\theta$ запишем в виде $p_n(x^{(n)}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\theta)$, $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Для сокращения записи положим $\sup_{\theta \in K} \mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_{\theta,K}$, $\sup_{\theta \in K} \mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}_{\theta,K}$. Всюду далее, когда $\mathbf{P}_{\theta,K}$ будет упоминаться как вероятность, надо понимать, что вместо функционала вероятности в соответствующих выражениях подставляется $\mathbf{P}_{\theta,K}$. Например, если говорится, что

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}_{\theta,K}} 0,$$

это значит, что для всех $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\mathbf{P}_{\theta,K}(|X_n| > \varepsilon) \to 0.$$

Конечно, вероятностной мерой $\mathbf{P}_{\theta,K}$ не является, однако это обстоятельство каждый раз оговариваться не будет.

Пусть

$$l(x|\theta) = \ln p(x|\theta), \quad l_m(x|\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^m l(x|\theta),$$

$$\Delta_m(\theta) = \sum_{i=1}^{n} l_m(x_i|\theta), \quad \pi_m(\theta) = \left(\frac{d}{d\theta}\right)^m \ln g(\theta),$$

$$Z_n(\theta, h) = \frac{p_n\left(x^{(n)}|\theta + h/\sqrt{n}\right)}{p_n\left(x^{(n)}|\theta\right)}, \quad \theta + h/\sqrt{n} \in \Theta.$$

$$\widetilde{Z}_n(\theta, h) = \frac{p_n\left(x^{(n)}|\theta + h/\sqrt{n}\right)}{p_n\left(x^{(n)}|\theta\right)} \frac{g\left(\theta + h/\sqrt{n}\right)}{g(\theta)}, \quad \theta + h/\sqrt{n} \in \Theta.$$

Как обычно, $O_{\mathbf{P}}(1)$ означает некоторую равномерно плотную по n последовательность случайных величин, т.е. такую последовательность $\{U_n\}_{n\geqslant 1}$, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0\colon\ \sup_n \mathbf{P}(|U_n| > M) < \varepsilon.$$

Введем понятие $\sqrt{n}$-состоятельных оценок.

Определение 1. *Пусть K – некоторый компакт из Θ. Будем говорить, что оценка T_n принадлежит классу оценок $\mathbb{C}(K)$ параметра $\theta \in \Theta$, если T_n измерима и*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists b > 0\ \sup_n \mathbf{P}_{\theta,K}\left(\sqrt{n}|T_n - \theta| > b\right) < \varepsilon.$$

Например, оценки максимального правдоподобия и байесовские оценки принадлежат классу $\mathbb{C}(K)$ при довольно широких условиях (см., например [5]).

В работе [8] показывается, что при выполнении определенных условий и для $T_n \in \mathbb{C}(K)$ величина

$$\tau_n = T_n + \frac{\Delta_1(T_n)}{nI(T_n)}$$

является асимптотически достаточной статистикой, что означает существование такой функции $q_n(\tau_n|\theta)$, что

$$\int \left|p_n\left(x^{(n)}|\theta\right) - q_n\left(\tau_n\left(x^{(n)}\right)|\theta\right)\right| d\nu^n \to 0, \quad \theta \in K.$$

Мы покажем далее, что добавка $\mu_n = \Delta_1(T_n)(\sqrt{n}I(T_n))^{-1}$ и будет апостериорным средним величины $\sqrt{n}(\vartheta - T_n)$, которая, собственно, и изучается в этой статье.

Перечислим условия на асимптотическую нормальность апостериорного распределения.

Пусть K – некоторый компакт из Θ, который лежит в Θ вместе с некоторой своей окрестностью. Будем называть следующие условия условиями $\mathbb{D}(K)$. Несмотря на то, что часть условий не зависит от K, мы их объединили для удобства ссылок.

(1) Параметрическое пространство Θ есть интервал (ограниченный или неограниченный) на $\mathbb{R}$.

(2) Для $\theta \neq \theta'$
$$\int |p(x|\theta) - p(x|\theta')|\,\nu(dx) > 0.$$

(3) Найдется $\delta_1 > 0$, такое что
$$\sup_{\theta,\theta' \in \Theta} |\theta - \theta'|^{\delta_1} \int \sqrt{p(x|\theta)\,p(x|\theta')}\,\nu(dx) < \infty.$$

(4) Носитель распределения $\mathbf{P}_\theta$ не зависит от θ.

(5) Функция $p(x|\theta)$ имеет 2 непрерывных производных по $\theta \in \Theta$ для любого x.

(6) Пусть $I(\theta) = \mathbf{E}_\theta\,(l_1(X|\theta))^2$.

  (a) $0 < I(\theta) < \infty,\ \theta \in \Theta$.

  (b) Найдется такое $\delta_2 > 0$, что
$$\mathbf{E}_\theta\,|l_1(X|\theta)|^{2+\delta_2} < \infty, \quad \mathbf{E}_\theta\,|l_2(X|\theta)|^{1+\delta_2} < \infty, \quad \theta \in K.$$

  (c) Пусть $U_\beta(\theta)$ – шар вокруг точки θ с радиусом β. Существуют такие $\beta_0, \beta_1 > 0$, что
$$|l_2(x|\theta') - l_2(x|\theta'')| \leqslant |\theta' - \theta''| D(x|\theta), \quad \forall x, \quad \theta', \theta'' \in U_{\beta_0}(\theta) \subset \Theta, \quad \theta \in K,$$
$$\mathbf{E}_\theta \sup_{t \in U_{\beta_1}(\theta)} D(X|t) < \infty, \quad \theta \in K.$$

  (d) Для некоторого $\delta_3 \geqslant 0$
$$\sup_{\theta \in \Theta} (1 + |\theta|^{\delta_3})^{-1} I(\theta) < \infty.$$

(7) Априорная плотность g непрерывна на Θ.

Сделаем несколько замечаний. В дальнейшем этот компакт K будет совпадать с компактом в условии на класс $\sqrt{n}$-состоятельных оценок $\mathbb{C}(K)$, но, формально говоря, условия $\mathbb{D}(K)$ не зависят от оценки $T_n \in \mathbb{C}(K)$. Условие 1 введено для удобства выкладок и может быть опущено, учитывая необходимую плотность параметрического пространства Θ по мере Лебега. Это обстоятельство еще будет обсуждено позже. Условие 4 означает, что множество $\{x : p(x|\theta) > 0\}$ не зависит от θ, поэтому можно положить $\mathfrak{X} = \{x : p(x|\theta) > 0\}$. Условия 2, 3, 6d не будут использованы напрямую, а только лишь являются условиями используемых здесь утверждений из статей [6,7]. Условия 6b и особенно 6c кажутся довольно сложными, однако они аналогичны условиям на асимптотическую нормальность оценки максимального правдоподобия (см. [5, теорема 8.1, с. 118]), и поэтому не столь излишни, как кажутся.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия $\mathbb{D}(K)$. Тогда для любого m найдутся натуральное число n_0, константа $C_{m,K}$, зависящая только от m и компакта K, такие что для всех $n > n_0$*

$$\mathbf{P}_{\theta,K}\Big(\sup_{|h|>A} Z_n(\theta,h) > A^{-m}\Big) \leqslant C_{m,K}A^{-m}. \tag{1}$$

Доказательство. Доказательство то же, что и в теореме 2.3 статьи [6] за исключением утверждения о существовании супремума на компакте. Условия этой теоремы выполнены. Существование супремума достигается за счет условий 6 и легко выводится из доказательства теоремы 2.3 статьи [6] (см. также [1, лемма 1]).

□

Лемма 2. *В условиях предыдущей леммы*

$$\mathbf{E}_{\theta,K}\Bigg(\int\limits_{\sqrt{n}(\Theta-\theta)} Z_n(\theta,h)g\Big(\theta+\frac{h}{\sqrt{n}}\Big)dh\Bigg)^{-1} < \infty.$$

Доказательство. Это утверждение является копией леммы 3.2 статьи [7] за исключением, как и в предыдущей лемме, утверждения о равномерности на компакте K, которое выводится тем же образом. □

Лемма 3. *Пусть дан конечный набор равномерно плотных по мере $\mathbf{P}$ последовательностей $Y_1 = (Y_{1,i})_{i=1}^{\infty}, \ldots, Y_K = (Y_{K,i})_{i=1}^{\infty}$. Тогда случайная последовательность*

$$Z_i = \prod_{j=1}^{K} Y_{j,i}$$

будет равномерно плотной.

Доказательство. Для двух произвольных случайных величин X и Y справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(XY > M) &= \mathbf{P}(\{XY > M\} \cap \{Y \leqslant \sqrt{M}\}) \\ &+ \mathbf{P}(\{XY > M\} \cap \{Y > \sqrt{M}\}) \leqslant \mathbf{P}(X > \sqrt{M}) + \mathbf{P}(Y > \sqrt{M}).\end{aligned} \tag{2}$$

Если произведение конечного числа случайных величин представить в виде

$$\prod_{j=1}^{K} Y_{j,i} = \prod_{j=1}^{\lceil K/2 \rceil} Y_{j,i} \prod_{j=\lceil K/2 \rceil+1}^{K} Y_{j,i},$$

и повторить аналогичное разбиение произведения в сомножителях, то, последовательно применяя неравенство (2) к сомножителям, получим

$$\mathbf{P}(|Z_i| > M) \leqslant \sum_{j=1}^{K} \mathbf{P}\left(|Y_{j,i}| > M^{1/(2\lceil \log_2 K \rceil)}\right).$$

Утверждение леммы теперь становится очевидным. □

Замечание 1. Из простого неравенства $\mathbf{P}(Y_1 + Y_2 > y) \leqslant \mathbf{P}(Y_1 > y/2) + \mathbf{P}(Y_2 > y/2)$ вместе с предыдущей леммой следует также, что и любая конечная линейная комбинация равномерно плотных случайных последовательностей является равномерно плотной.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* $\mathbb{D}(K)$ *и* $T_n \in \mathbb{C}(K)$. *Тогда существуют такие* $A > 0, 0 < \alpha < 0.5, 0 < \delta < 1$, *что для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $A_n = An^{\alpha - 0.5}$

$$\mathbf{P}_{\theta,K}\left(\sup_{t \in U_{A_n}(T_n)} n^{-\frac{1}{1+\delta}} \left|\sum_{i=1}^{n} (l_2(X_i|t) + I(T_n))\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

Доказательство. Так как $\mathbf{E}_\theta l_2(X|\theta) = -I(\theta)$, то

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\theta,K}&\left(\sup_{t \in U_{A_n}(T_n)} n^{-\frac{1}{1+\delta_2}} \left|\sum_{i=1}^{n} (l_2(X_i|t) + I(T_n))\right| > \varepsilon\right) \\ &\leqslant \mathbf{P}_{\theta,K}\left(\sup_{t \in U_{A_n}(T_n)} n^{-\frac{1}{1+\delta}} \left|\sum_{i=1}^{n} (l_2(X_i|t) - l_2(X_i|T_n))\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\qquad + \mathbf{P}_{\theta,K}\left(n^{-\frac{1}{1+\delta}} \left|\sum_{i=1}^{n} (l_2(X_i|T_n) + I(X_i|T_n))\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right).\end{aligned}$$

Если положить A равным β_0 из условия 6c, то

$$\mathbf{P}_{\theta,K}\left(\sup_{t\in U_{A_n}(T_n)} n^{-\frac{1}{1+\delta}}\left|\sum_{i=1}^n (l_2(X_i|t)-l_2(X_i|T_n))\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\leqslant \mathbf{P}_{\theta,K}\left(A_n n^{-\frac{1}{1+\delta}}\sum_{i=1}^n D(X_i|T_n)>\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\leqslant \mathbf{P}_{\theta,K}\left(A_n n^{-\frac{1}{1+\delta}}\sum_{i=1}^n \sup_{t\in U_{\beta_1}(\theta)} D(X_i|t)>\frac{\varepsilon}{2}\right)+\mathbf{P}_{\theta,K}(|T_n-\theta|>\beta_1).$$

Если $\alpha-0,5-(1+\delta)^{-1}<-1$, то последнее выражение стремится к нулю в силу закона больших чисел, условия 6c и компактности K. Для этого α должно быть выбрано так, чтобы $\alpha<0,5-\delta(1+\delta)^{-1}$. Ниже будет показано, что можно выбрать любое $0<\delta<\delta_2$ из условия 6b. Таким образом, такой выбор α возможен, так что

$$\mathbf{P}_{\theta,K}\left(n^{-\frac{1}{1+\delta}}\left|\sum_{i=1}^n(l_2(X_i|T_n)+I(X_i|T_n))\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\leqslant \mathbf{P}_{\theta,K}\left(n^{-\frac{1}{1+\delta}}\left|\sum_{i=1}^n(l_2(X_i|T_n)-l_2(X_i|\theta))\right|>\frac{\varepsilon}{6}\right)$$
$$+\mathbf{P}_{\theta,K}\left(n^{-\frac{1}{1+\delta}}\left|\sum_{i=1}^n(l_2(X_i|\theta)-I(\theta))\right|>\frac{\varepsilon}{6}\right)$$
$$+\mathbf{P}_{\theta,K}\left(n^{-\frac{1}{1+\delta}}\left|\sum_{i=1}^n(I(T_n)-I(\theta))\right|>\frac{\varepsilon}{6}\right). \quad (3)$$

Первое слагаемое в правой части (3) оценивается, как и раньше, с помощью условия 6c. Так как для любой последовательности $c_n\to\infty$ $\mathbf{P}_{\theta,K}\left(\sqrt{n}|T_n-\theta|>c_n\right)\to 0$, то

$$\mathbf{P}_{\theta,K}\left(n^{-\frac{1}{1+\delta}}\left|\sum_{i=1}^n(l_2(X_i|T_n)-l_2(X_i|\theta))\right|>\frac{\varepsilon}{6}\right)$$
$$\leqslant \mathbf{P}_{\theta,K}\left(n^{-\frac{1}{1+\delta}}c_n n^{-1/2}\sum_{i=1}^n D(X_i|\theta)>\frac{\varepsilon}{6}\right)$$
$$+\mathbf{P}_{\theta,K}\left(\sqrt{n}|T_n-\theta|>c_n\right)\to 0$$

при должном выборе последовательности $c_n = n^\beta$ (нужно, чтобы $\beta - (1+\delta)^{-1} - 0,5 < -1$). Такое β, очевидно, существует.

Второе слагаемое в (3) стремится к нулю по усиленной версии закона больших чисел (см., например, [10], с. 257) в силу условия 6b (нужно лишь взять $\delta < \delta_2$).

В силу условий $\mathbb{D}(K)$ выполняется следующее неравенство (см. [5], с. 94): $|I(\theta+h) - I(\theta)| \leqslant 4\left(I^{1/2}(\theta+h) + I^{1/2}(\theta)\right) Lh$ для некоторого $L > 0$. Таким образом, на компакте K функция I удовлетворяет условию Липшица, и поэтому существует такое $\gamma > 0$, что

$$\mathbf{P}_{\theta,K}\left(n^{-\frac{1}{1+\delta}} \Big| \sum_{i=1}^{n} (I(T_n) - I(\theta)) \Big| > \frac{\varepsilon}{6}\right) \leqslant \mathbf{P}_{\theta,K}\left(n^{1-\frac{1}{1+\delta}} |T_n - \theta| > \gamma\right) \to 0,$$

ибо $T_n \in \mathbb{C}(K)$ и $0 < 1 - (1+\delta)^{-1} < 1/2$. □

Лемма 5. *При выполнении условий $\mathbb{D}(K)$ и при $T_n \in \mathbb{C}(K)$ последовательность величин μ_n является равномерно плотной относительно $\mathbf{P}_{\theta,K}$:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : \sup_n \mathbf{P}_{\theta,K}(|\mu_n| > M) < \varepsilon.$$

Доказательство. Имеем:

$$\frac{\Delta_1(T_n)}{\sqrt{n}} = \frac{\Delta_1(\theta)}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}(T_n - \theta)\frac{\Delta_2(\tau_n)}{n},$$

где τ_n – точка между T_n и θ. Слагаемое $n^{-1/2}\Delta_1(\theta)$ равномерно плотно по неравенству Чебышева:

$$\sup_{\theta \in K} \mathbf{P}_\theta \left(\left| n^{-1/2} \Delta_1(\theta) \right| > M \right) \leqslant \frac{\sup_{\theta \in K} I(\theta)}{M^2}.$$

Информация $I(\theta)$ непрерывна, а значит, и ограничена на компакте K. Величина $\sqrt{n}(T_n - \theta)$ равномерно плотна, так как $T_n \in \mathbb{C}(K)$. Последовательность $n^{-1}\Delta_2(\tau_n)$ равномерно плотна по лемме 4. Отсюда и из леммы 3 следует равномерная плотность $\Delta_1(T_n)n^{-1/2}$. Так как I непрерывно, можно найти такое $\sigma > 0$, что

$$\mathbf{P}_{\theta,K}(I(T_n) > \sigma) \to 1.$$

Следовательно, последовательность μ_n является равномерно плотной. □

Обозначим $\Phi(A|m,s^2)$ нормальное распределение со средним m и дисперсией s^2, вычисленное на борелевском множестве $A\subset\mathbb{R}$, а символом $\varphi(x|m,s^2)$ – соответствующую плотность, вычисленную в точке x. Символами $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ без параметров будем обозначать стандартные нормальные распределение и плотность. Положим

$$E_m(\mu,\sigma)=\int\limits_{\mathbb{R}}|h|^m\varphi(h|\mu,\sigma^2)\,dh.$$

Обозначим $(I(T_n))^{-1}=\sigma_n^2$. Эта величина является асимптотической дисперсией апостериорного распределения $\sqrt{n}(\vartheta-T_n)$, поэтому данное обозначение оправдано.

Лемма 6. *При выполнении условий $\mathbb{D}(K)$ и при $T_n\in\mathbb{C}(K)$, для любых $m>0$, $A_n=An^{\alpha}$, $M>0$, $\alpha>0$ найдутся такие числа $\gamma_1>0$ и $\gamma_2>0$, что*

$$\mathbf{P}_{\theta,K}\Biggl\{\int\limits_{-A_n}^{A_n}|h|^m\varphi(h|\mu_n,\sigma_n^2)dh\geqslant E_m(\mu_n,\sigma_n^2)-\gamma_1\exp(-n^{\gamma_2})\Biggr\}\to 1.$$

Доказательство. Применяя правило Лопиталя при $x\to\infty$, получаем, что

$$\int\limits_x^{\infty}|t|^m\varphi\Bigl(\frac{t-\mu}{\sigma}\Bigr)\,dt=x^{m-1}\varphi\Bigl(\frac{x-\mu}{\sigma}\Bigr)(\sigma^2+o(1)).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-A_n}^{A_n}|h|^m\varphi\left(h|\mu_n,\sigma_n^2\right)dh \geqslant E_m\left(\mu_n,\sigma_n\right)-\frac{2A_n^{m-1}}{I(T_n)}\varphi\left(A_n|\,|\mu_n|\,,\sigma_n^2\right)(1+\omega_n), \tag{4}$$

где $\omega_n\to 0$ при $n\to\infty$. Если $\mathbf{X}$ принадлежит множеству

$$U_n=\{|\mu_n|\leqslant A_n/2\}\cap\{I(T_n)\geqslant\sigma\},$$

то правая часть в (4) не меньше, чем

$$E_m\left(\mu_n,\sigma_n^2\right)-\frac{\sqrt{2}A_n^{m-1}}{\sqrt{\pi I(T_n)}}\exp\left(-\frac{I(T_n)A_n^2}{8}\right)(1+\omega_n),$$

и в то же время найдется такое $\sigma > 0$, что по лемме 5 и непрерывности I вероятность события U_n стремится к единице. Таким образом, вследствие степенной скорости возрастания A_n, найдутся такие числа γ_1 и γ_2, что

$$\frac{\sqrt{2}A_n^{m-1}}{\sqrt{\pi I(T_n)}} \exp\left(-\frac{I(T_n)A_n^2}{8}\right)(1+\omega_n) \leqslant \gamma_1 \exp(-n^{\gamma_2}). \qquad \square$$

Определим $B_n = [T_n - A_n/\sqrt{n}; T_n + A_n/\sqrt{n}]$, где $A_n = An^\alpha$ для любых $A > 0$ и $\alpha > 0$. Пусть q_n – апостериорная плотность, и $\widetilde{q}_n$ – апостериорная плотность, сосредоточенная на множестве B_n:

$$q_n(\theta|\mathbf{X}) = \frac{p_n(\mathbf{X}|\theta)g(\theta)}{\int\limits_\Theta p_n(\mathbf{X}|\theta)g(\theta)d\theta}, \quad \widetilde{q}_n(\theta|\mathbf{X}) = I_{B_n}(\theta)\frac{p_n(\mathbf{X}|\theta)g(\theta)}{\int\limits_{B_n} p_n(\mathbf{X}|\theta)g(\theta)d\theta},$$

где I_A – индикатор множества A.

Лемма 7. *При выполнении условий $\mathbb{D}(K)$ и при $T_n \in \mathbb{C}(K)$ для любого $m > 0$ выполняется*

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(\int\limits_\Theta |q_n(\theta|\mathbf{X}) - \widetilde{q}_n(\theta|\mathbf{X})|d\theta > n^{-m}\right) \to 0. \qquad (5)$$

Доказательство. Выпишем простое неравенство, которое нам пригодится несколько раз:

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{A}{B} - \frac{A}{b} + \frac{A}{b} - \frac{a}{b}\right| \leqslant |b|^{-1}\left(\left|\frac{A}{B}\right||B-b| + |A-a|\right). \qquad (6)$$

Разделим числитель и знаменатель в q_n и $\widetilde{q}_n$ на $p(\mathbf{X}|\theta_0)$. Так как $\mathbf{P}_{\theta_0}(p(\mathbf{X}|\theta_0) = 0) = 0$, эта операция оправдана. Сделаем замену $\theta = \theta_0 + h/\sqrt{n}$ в числителе и знаменателе обеих плотностей в интеграле (5). Обозначим $\Theta_n = \sqrt{n}(\Theta - \theta_0)$, $L_n = [-A_n + \sqrt{n}(T_n - \theta_0); A_n + \sqrt{n}(T_n - \theta_0)]$.

Из неравенства (6), вытекает, что

$$\int_{\Theta} |\widetilde{q}_n(\theta|\mathbf{X}) - q_n(\theta|\mathbf{X})| d\theta$$

$$\leqslant \Bigl(\int_{\Theta_n} Z_n(\theta_0,h) g\Bigl(\theta_0+\frac{h}{\sqrt{n}}\Bigr)\,dh\Bigr)^{-1}\Bigl(\int_{L_n^c\cap\Theta_n} Z_n(\theta_0,h) g\Bigl(\theta_0+\frac{h}{\sqrt{n}}\Bigr)\,dh$$

$$+\int_{\Theta} \widetilde{q}_n(\theta|\mathbf{X})\,d\theta \int_{L_n^c\cap\Theta_n} Z_n(\theta_0,h) g\Bigl(\theta_0+\frac{h}{\sqrt{n}}\Bigr)dh\Bigr)$$

$$=\Bigl(\int_{\Theta_n} Z_n(\theta_0,h) g\Bigl(\theta_0+\frac{h}{\sqrt{n}}\Bigr)dh\Bigr)^{-1} 2\int_{L_n^c\cap\Theta_n} Z_n(\theta_0,h) g\Bigl(\theta_0+\frac{h}{\sqrt{n}}\Bigr)dh = W(Z_n).$$

Для вероятностей больших уклонений случайной величины $W(Z_n)$ имеем оценку:

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}(W(Z_n) > n^{-m})$$

$$\leqslant \mathbf{P}_{\theta_0,K}\Bigl(n^{-2m}\Bigl(\int_{\Theta_n} Z_n(\theta_0,h) g\Bigl(\theta_0+\frac{h}{\sqrt{n}}\Bigr)dh\Bigr)^{-1} > n^{-3m/2}\Bigr)$$

$$+\mathbf{P}_{\theta_0,K}\Bigl(\Bigl\{\int_{L_n^c\cap\Theta_n} Z_n(\theta_0,h) g\Bigl(\theta_0+\frac{h}{\sqrt{n}}\Bigr)dh > n^{-3m/2}\Bigr\}\cap\{\sqrt{n}|T_n-\theta_0| < A_n/2\}\Bigr)$$

$$+\mathbf{P}_{\theta_0,K}(\sqrt{n}|T_n-\theta_0| > A_n/2).$$

Вследствие леммы 2 и по неравенству Маркова первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю. Так как A_n – степенная функция от n, то согласно лемме 1, второе слагаемое также ограничено, $L_n^c \cap \Theta_n \subset L_n^c$ и расширение области интегрирования только увеличит интеграл. Третье слагаемое стремится к нулю, так как $T_n \in \mathbb{C}(K)$. □

И напоследок простая лемма, необходимая для удобства ссылок.

Лемма 8. *Пусть K – компакт, лежащий в интервале $(\theta_1;\theta_2)$, и оценка $T_n \in \mathbb{C}(K)$. Тогда для любой последовательности $A_n \to \infty$, такой что $A_n/\sqrt{n} \to 0$, вероятности*

$$\mathbf{P}_{\theta,K}\left(\sqrt{n}(T_n-\theta_1) < A_n\right) \to 0, \quad \mathbf{P}_{\theta,K}\left(\sqrt{n}(\theta_2-T_n) < A_n\right) \to 0.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы опустим в связи с ее тривиальностью. □

§3. Асимптотическая нормальность апостериорного распределения

Как известно, расстояние по вариации между мерами P и Q, имеющих плотности p и q по мере μ, может быть представлено в виде

$$\|P-Q\|_{TV} = \sup_{B\in\mathfrak{B}} |P(B)-Q(B)| = \frac{1}{2}\int |p-q|\,d\mu. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть K – компакт, лежащий в Θ вместе с некоторой своей окрестностью и оценка $T_n \in \mathbb{C}(K)$. Тогда при выполнении условий $\mathbb{D}(K)$*

$$\left\|\mathbf{P}\left(\sqrt{n}(\vartheta - T_n)\in A|\mathbf{X}\right) - \Phi\left(A|\mu_n,\sigma_n^2\right)\right\|_{TV} \xrightarrow{\mathbf{P}_{\theta,K}} 0.$$

Доказательство. Утверждение теоремы будет доказано, если показать (см. (7)), что $\forall\varepsilon>0$

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(\int\limits_{\Theta}\left|q_n\left(\theta|\mathbf{X}\right) - \varphi\left(\theta\middle|T_n + \frac{\Delta_1(T_n)}{nI(T_n)}, \frac{1}{nI(T_n)}\right)\right| d\theta > \varepsilon\right) \to 0.$$

Выберем числа $A>0$ и $0<\alpha<1/2$ из утверждения леммы 4. Определим последовательность чисел A_n, последовательность множеств B_n, и плотность $\widetilde{q}_n$ таким же образом, как и в условии леммы 7. Легко видеть, что справедливо неравенство:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Theta}&\left|q_n\left(\theta|\mathbf{X}\right) - \varphi\left(\theta\middle|T_n+\frac{\mu_n}{\sqrt{n}},\frac{\sigma_n^2}{n}\right)\right| d\theta \\ &\leqslant \int\limits_{\Theta}\left|q_n\left(\theta|\mathbf{X}\right) - \widetilde{q}_n\left(\theta|\mathbf{X}\right)\right| d\theta \\ &\quad + \int\limits_{\Theta}\left|\widetilde{q}_n\left(\theta|\mathbf{X}\right) - \varphi\left(\theta\middle|T_n+\frac{\mu_n}{\sqrt{n}},\frac{\sigma_n^2}{n}\right)\right| d\theta.\end{aligned} \tag{8}$$

Первое слагаемое стремится к нулю относительно $\mathbf{P}_{\theta_0,K}$ в силу леммы 7. Остается показать, что

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(\int\limits_{\Theta}\left|\widetilde{q}_n\left(\theta|\mathbf{X}\right) - \varphi\left(\theta\middle|T_n+\frac{\mu_n}{\sqrt{n}},\frac{\sigma_n^2}{n}\right)\right| d\theta > \varepsilon\right) \to 0. \tag{9}$$

В интеграле под знаком вероятности и в интеграле, определяющем $\widetilde{q}_n$, сделаем замену $\theta = T_n + h/\sqrt{n}$, после чего разделим числитель и знаменатель в определении $\widetilde{q}_n$ на величину $p(\mathbf{X}|T_n)g(T_n)$, которая с вероятностью единица отлична от нуля по условию 4. Тогда интеграл в (9) принимает вид

$$\int\limits_{-A_n}^{A_n} \left| \frac{\widetilde{Z}_n(T_n, h)}{\int\limits_{-A_n}^{A_n} \widetilde{Z}_n(T_n, h)\, dh} - \varphi\left(h|\mu_n, \sigma_n^2\right) \right| dh, \tag{10}$$

при условии, что $T_n + h/\sqrt{n}$ не выходит за границы параметрического пространства Θ, когда $h \in [-A_n; A_n]$. Очевидно, в случае неограниченного Θ такой ситуации не возникнет. Если же Θ – ограниченное множество, то без ограничения общности положим $\Theta = (\theta_1; \theta_2)$. Выход за границы параметрического пространства означает $\sqrt{n}(T_n - \theta_1) < A_n$ или $\sqrt{n}(\theta_2 - T_n) < A_n$. В силу леммы 8 вероятность этих событий стремится к нулю. Поэтому все дальнейшие рассуждения можно вести при условии, что $\mathbf{X}$ принадлежит множеству $\{[-A_n; A_n] \subset \sqrt{n}(\Theta - T_n)\}$.

Итак, остается показать, что интеграл (10) стремится к нулю по вероятности $\mathbf{P}_{\theta_0,K}$. Умножим числитель и знаменатель дроби под интегралом в (10) на

$$V(T_n) = \exp\left(-\frac{\Delta_1^2(T_n)}{2nI(T_n)}\right)\sqrt{\frac{I(T_n)}{2\pi}}.$$

Этот множитель пригодится в дальнейшем, чтобы привести $\widetilde{Z}_n(T_n, h)$ к функции плотности нормального закона. Воспользуемся неравенством (6), в котором роль a играет нормальная плотность, а $b = 1$. Остается показать, что

$$\int\limits_{-A_n}^{A_n} \left| V(T_n)\widetilde{Z}_n(T_n, h) - \varphi\left(h\Big|\frac{\Delta_1(T_n)}{\sqrt{n}I(T_n)}, \frac{1}{I(T_n)}\right)\right| dh$$

по вероятности стремится к нулю, так как стремление $\int\limits_{-A_n}^{A_n} \widetilde{Z}_n(T_n, h)dh$ к единице очевидно следует из этого факта и леммы 6, согласно которой

$$\int\limits_{-A_n}^{A_n} \varphi\left(h|\mu_n, \sigma_n^2\right) dh \xrightarrow{\mathbf{P}_{\theta_0,K}} 1.$$

Разложим $\ln Z_n(T_n, h)$ по формуле Тейлора по степеням h до второго порядка относительно $h = 0$:

$$\ln \widetilde{Z}_n(T_n, h) = \Delta_1(T_n)\frac{h}{\sqrt{n}} + \Delta_2\left(\widehat{T}_n\right)\frac{h^2}{2n} + \ln g\left(T_n + \frac{h}{\sqrt{n}}\right) - \ln g(T_n),$$

где $\widehat{T}_n$ – промежуточная точка интервала $[T_n; T_n + h/\sqrt{n}]$. Так как $A_n/\sqrt{n} \to 0$, то правая часть последнего выражения сходится к левой части при любом фиксированном h. Теперь разложим экспоненту от $\ln \widetilde{Z}_n(T_n, h)$ по формуле Тейлора относительно точки $\psi(T_n, h) = \Delta_1(T_n)hn^{-1/2} - I(T_n)h^2/2$:

$$\begin{aligned} \exp \ln \widetilde{Z}_n(T_n, h) = \exp(\psi(T_n, h)) + \exp(\psi(T_n, h) \\ + \Lambda_n(h))\left[\left(I(T_n) + \frac{\Delta_2\big(\widehat{T}_n\big)}{n}\right)\frac{h^2}{2} + \ln g\Big(T_n + \frac{h}{\sqrt{n}}\Big) - \ln g(T_n)\right], \end{aligned} \tag{11}$$

где $\Lambda_n(h) = \lambda\big(I(T_n) + n^{-1}\Delta_2\big(\widehat{T}_n\big)\big)h^2/2,\ \ 0 < \lambda < 1$. Заметим, что

$$V(T_n)\exp(\psi(T_n, h)) = \varphi\left(h|\mu_n, \sigma_n^2\right).$$

Таким образом, нам нужно показать, что интеграл по h от модуля остатка в (11) (второе слагаемое), помноженного на V_n стремится к нулю по вероятности $\mathbf{P}_{\theta_0,K}$.

В силу условия 7 функция g непрерывна всюду, и для любых $\delta > 0$, $\gamma > 0$ вероятность

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(\left\{\sup_{h\in[-A_n;A_n]}\left|g\Big(T_n+\frac{h}{\sqrt{n}}\Big) - \ln g(T_n)\right| > \delta\right\} \cap \{|T_n - \theta_0| < \gamma\}\right) \to 0. \tag{12}$$

В силу $T_n \in \mathbb{C}(K)$ вероятность $\mathbf{P}_{\theta_0,K}(|T_n - \theta_0| \geqslant \gamma) \to 0$.

Выберем числа A и α, удовлетворяющие условию леммы 4. Тогда

$$\left|I(T_n) + n^{-1}\Delta_2\big(\widehat{T}_n\big)\right| \xrightarrow{\mathbf{P}_{\theta_0,K}} 0$$

при любом $h \in [-A_n; A_n]$, поэтому и супремум по h будет стремиться к нулю. Вместе с результатом (12) остается показать, что для некоторого $c > 0$

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\left\{\int\limits_{-A_n}^{A_n} h^2 V(T_n)\exp(\psi(T_n,h)+\Lambda_n(h))dh < c\right\} \to 1. \tag{13}$$

Определим случайную величину, связанную с подынтегральным выражением в (13):

$$\xi(T_n,h) = -\frac{\Delta_1^2(T_n)}{2nI(T_n)} + \Delta_1(T_n)\frac{h}{\sqrt{n}} - I(T_n)\frac{h^2}{2} + \Lambda_n(h).$$

Из определения Λ_n следует, что $2|\Lambda_n(h)| < \left|I(T_n) + n^{-1}\Delta_2\big(\widehat{T}_n\big)\right|h^2$.

Теперь введем события

$$U_n = \left\{n^{1-\zeta}\left|\sum_{i=1}^{n} l_2\left(X_i|\widehat{T}_n\right)\right| > 1\right\},$$
$$Y_n = \left\{\left|\frac{\Delta_1(T_n)}{\sqrt{n}}\right| > n^{\zeta/4}\right\}, \qquad J_n = \{I(T_n) > \sigma\},$$

где $0 < \zeta < 1/2$, $\sigma > 0$. Но в силу леммы 4 $\mathbf{P}_{\theta_0,K}(U_n) \to 0$, если положить ζ равным величине δ, которая присутствует в утверждении леммы 4. Вероятность $\mathbf{P}_{\theta_0,K}(Y_n) \to 0$ по лемме 5, и в силу непрерывности I найдется такое σ, что $\mathbf{P}_{\theta_0,K}(J_n) \to 0$. Таким образом, при $\mathbf{X} \in U_n^c \cap Y_n^c \cap J_n^c$ случайная величина

$$\begin{aligned}\xi(T_n,h) &\leqslant -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1(T_n)}{\sqrt{n}(I(T_n)-n^{-\zeta})} - h\right)^2 I(T_n)\\ &\quad + \frac{\Delta_1^2(T_n)}{n}\left(\frac{1}{I(T_n)-n^{-\zeta}} - \frac{1}{I(T_n)}\right)\\ &\leqslant -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1(T_n)}{\sqrt{n}(I(T_n)-n^{-\zeta})} - h\right)^2 I(T_n) + n^{\zeta/2}\frac{n^{-\zeta}}{\sigma(\sigma-n^{-\zeta})}.\end{aligned}$$

Итак, для $\mathbf{X} \in U_n^c \cap Y_n^c \cap J_n^c$ искомый интеграл

$$\int_{-A_n}^{A_n} V(T_n)\exp(\psi(T_n,h)+\Lambda_n(h))dh \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} V(T_n)\exp(\psi(T_n,h)+\Lambda_n(h))dh$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(h\Big|\frac{\Delta_1(T_n)}{\sqrt{n}(I(T_n)-n^{-\zeta})},\frac{1}{I(T_n)}\right)dh \times \exp\left(\frac{n^{-\zeta/2}}{\sigma(\sigma-n^{-\zeta})}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{n^{-\zeta/2}}{\sigma(\sigma-n^{-\zeta})}\right).$$

Последняя величина, очевидно, ограничена, для $n \geqslant n_0$. Как было отмечено ранее, вероятность события $U_n^c \cap Y_n^c \cap J_n^c$ стремится к единице. Таким образом, показано, что интеграл (13) с вероятностью, стремящейся к единице, ограничен, и это доказывает теорему. □

Условие 1, а также условие теоремы о том, что компакт K входит в Θ вместе со своей окрестностью, используется лишь один раз в доказательстве теоремы 1, а именно при получении (10), где мы ссылались на лемму 8. Очевидно, Θ может быть не только интервалом, но и, скажем, конечным объединением интервалов, поскольку требуется лишь конечность интервалов. Если учитывать, что K – компакт, то вместе с требованием о лебеговской измеримости Θ, можно утверждать, что теорема 1 выполняется для любого измеримого множества Θ.

Однако существование у K окрестности в Θ, по всей видимости, необходимо для утверждения теоремы, потому что на границах параметрического множества может и не быть асимпотической нормальности (см. пример после следствия). С другой стороны, с байесовской точки зрения не столь интересно равномерное стремление к нулю по вероятности $\mathbf{P}_{\theta_0,K}$, сколь стремление к нулю по совместному распределению $\mathbf{P}$. В связи с этим докажем следующее утверждение, в котором условие 1 используется по существу.

Следствие 1. *Пусть для любого компакта $K \in \Theta$, входящего в Θ с некоторой окрестностью, оценка $T_n \in \mathbb{C}(K)$ и выполнены условия $\mathbb{D}(K)$. Тогда*

$$\left\|\mathbf{P}\left(\sqrt{n}(\vartheta - T_n) \in B|\mathbf{X}\right) - \Phi\left(B|\mu_n,\sigma_n^2\right)\right\|_{TV} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Доказательство. Для произвольного фиксированного ε определим множество

$$U_n(B) = \left\{ \left\| \mathbf{P}\left(\sqrt{n}(\vartheta - T_n) \in B | \mathbf{X}\right) - \Phi\left(B|\mu_n, \sigma_n^2\right) \right\|_{TV} > \varepsilon \right\}.$$

Пусть $\Theta = (\theta_1; \theta_2)$. Положим для произвольного $\gamma > 0$ $K_m = [\theta_1 + \gamma/\sqrt{m}; \theta_2 - \gamma/\sqrt{m}]$. Для каждого K_m выполняются условия теоремы 1, и $\sup_B \mathbf{P}_{\theta, K_m}(U_n(B)) \to 0$. Поэтому найдется такая последовательность K_{m_n}, что $\sup_B \mathbf{P}_{\theta, K_{m_n}}(U_n(B)) \to 0$. Очевидно, $K_{m_n} \uparrow \Theta$, и поэтому

$$\sup_B \mathbf{P}(U_n(B)) = \int_\Theta \sup_B \mathbf{P}_\theta(U_n(B)) \mathbf{G}(d\theta)$$
$$\leqslant \sup_B \mathbf{P}_{\theta, K_{m_n}}(U_n(B)) \mathbf{G}\left(K_{m_n}\right) + \mathbf{G}\left(K_{m_n}^c\right) \to 0.$$

Тот же самый аргумент можно применить и для $\Theta = \mathbb{R}$. В таком случае $K_m = [-\gamma\sqrt{n}, \gamma\sqrt{n}]$. Все остальные случаи являются комбинациями этих двух, если принять во внимание условие 1. □

Условие следствия 1 на каждый внутренний компакт очень полезно для моделей, у которых параметрическое пространство есть открытый интервал. Например, в случае, когда выборка берется из распределения Бернулли, $\Theta = (0; 1)$, и условия $\mathbb{D}(\Theta)$ не выполняются, условия следствия 1, тем не менее, выполнены.

В связи с последней теоремой рассмотрим пример. Пусть наблюдается выборка из показательного распределения с плотностью $p(x|\theta) = \theta \exp(-\theta x)$. В качестве априорного распределения возьмем треугольное распределение на $\Theta = [1; 2]$. Несмотря на то, что Θ – компакт, и выполнены условия $\mathbb{D}(\Theta)$ (в том числе и непрерывность априорной плотности), численное моделирование показывает, что нормальная аппроксимация теоремы 1 не применима в граничных точках $\theta_0 = 1$ или $\theta_0 = 2$. Тем не менее, асимптотическая нормальность апостериорного распределения выполняется, если использовать совместное распределение $\mathbf{P}$. Этот пример интересен тем, что в случае использования естественного параметрического пространства $\Theta = (0; \infty)$ и любым априорным распределением на таком Θ, что $g(\theta) > 0$, $\theta \in \Theta$, точки $\theta_0 = 1$ и $\theta_0 = 2$ перестают быть особенными.

Идея асимптотической нормальности апостериорного распределения, центрированного $\sqrt{n}$-состоятельной оценкой, не нова. Так, в [9] на с. 619 приводится соответствующая теорема, которая, однако, утверждает лишь сходимость по мере $\mathbf{P}_{\theta_0}$. Таким образом, текущий пункт настоящей статьи можно рассматривать как доказательство равномерной сходимости к нормальному пределу.

§4. Асимптотическое разложение апостериорного распределения

Метод доказательства теоремы 1 можно применить для получения асимптотического разложения апостериорного распределения. Нужно лишь взять у $\ln Z_n(T_n, h)$ не только первые два члена разложения, а столько, сколько потребуется для достижения заданной точности. Соответственно, следует потребовать существования этих производных и их моментов. Формально, для любого компакта K и любого целого числа $M \geqslant 0$ следует найти такие величины $H_m(B, \mathbf{X})$, что для любого борелевского множества B и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C > 0$, что

$$\sup_n \mathbf{P}_{\theta,K}\left(\left|\mathbf{P}(\sqrt{n}(\vartheta - T_n) \in B|\mathbf{X}) - \sum_{m=0}^{M} n^{-m/2} H_m(B,\mathbf{X})\right| > Cn^{-(M+1)/2}\right) < \varepsilon,$$

$$\sup_n \mathbf{P}_{\theta,K}\left(|H_m\left(B, \mathbf{X}\right)| > C\right) < \varepsilon, \quad 0 \leqslant m \leqslant M.$$

Последее условие означает равномерную плотность коэффициентов разложения. Равномерная плотность была выбрана в качестве альтернативы ограниченности почти наверное, как это, например, было сделано в [4].

Задавшись числом M и компактом K приведем условия на асимптотическое разложение. Как было отмечено ранее, это по большому счету те же условия $\mathbb{D}(K)$, только расширенные требованиями на существование производных высшего порядка у функций $p(X|\theta)$ и $g(\theta)$. Назовем эти условия $\mathbb{D}(M, K)$. Все последующие ссылки на условия в статье будут идти на список $\mathbb{D}(M, K)$, если не указано иное.

(1) Θ есть интервал (ограниченный или неограниченный) на $\mathbb{R}$.

(2) Для $\theta \neq \theta'$

$$\int |p(x|\theta) - p(x|\theta')|\, \nu(dx) > 0.$$

(3) Найдется $\delta_1 > 0$, такое что

$$\sup_{\theta,\theta' \in \Theta} |\theta - \theta'|^{\delta_1} \int \sqrt{p(x|\theta)\, p(x|\theta')}\, \nu(dx) < \infty.$$

(4) Носитель распределения $\mathbf{P}_\theta$ не зависит от θ.
(5) Функция $p(x|\theta)$ имеет $M+3$ непрерывных производных по $\theta \in \Theta$ для любого x.
(6) Информация по Фишеру $I(\theta)$ строго положительна при $\theta \in \Theta$.
(7) Существует такое $\delta_2 > 0$, что
(a)
$$\mathbf{E}_\theta \sup_{\lambda \in [-\delta_2;\delta_2]} (l_2(X|\theta+\lambda))^2 < \infty, \quad \theta \in \Theta.$$
(b)
$$\mathbf{E}_\theta \sup_{\lambda \in [-\delta_2;\delta_2]} |l_m(X|\theta+\lambda)| < \infty, \quad \theta \in K, \quad m = \overline{0, M+3}.$$
(c)
$$\sup_{\theta \in \Theta} (1+|\theta|^{\delta_2})^{-1} I(\theta) < \infty.$$
(8) Априорная плотность g имеет $M+1$ непрерывную производную на Θ.

Пусть $I_1(m,v)$ – множество индексов $(i_1, \ldots, i_m)$, удовлетворяющее равенству
$$\sum_{j=1}^{m} i_j = v, \quad i_j > 0, \quad j = \overline{1,m},$$
и $\Phi(x|\mu,\sigma^2), x \in \mathbb{R}$ – функция нормального распределения со средним μ и дисперсией σ^2. При фиксированном значении выборки $\mathbf{X}$ и любом целом $m \geqslant 0$ положим
$$F_m(z) = \int_{-\infty}^{z} h^m \varphi\left(h \Big| \frac{\Delta_1(T_n)}{\sqrt{n} I(T_n)}, \frac{1}{I(T_n)}\right) dh.$$

Теорема 2. *Пусть K – компакт, лежащий в Θ вместе с некоторой своей окрестностью и оценка $T_n \in \mathbb{C}(K)$. Пусть для некоторого целого $M \geqslant 0$ выполнены условия $\mathbb{D}(M,K)$. Тогда найдется такая величина ω_n, что*
$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(\sqrt{n}(\vartheta - T_n) < z|\mathbf{X}\right) = \sum_{m=0}^{M} n^{-m/2} H_m(z) + n^{-(M+1)/2}\omega_n,$$
где
$$H_0(z) = f_0(z) = F_0(z),$$

$$H_m(z) = f_m(z) + \sum_{j=1}^{m} S_j f_{m-j}(z), \quad m = \overline{1, M},$$

$$S_m = \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \sum_{I_1(j,m)} \prod_{l=1}^{j} f_{i_l}(\infty), \quad m = \overline{1, M},$$

$$f_m(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m!} \sum_{I_1(j,m)} \prod_{l=1}^{j} q_{i_l}(z), \quad m = \overline{1, M},$$

$$q_1(z) = \sqrt{n}\, F_2(z)\, \frac{n^{-1}\Delta_2(T_n) + I(T_n)}{2} + F_3(z) \frac{\Delta_3(T_n)}{6n} + F_1(z)\pi_1(T_n),$$

$$q_m(z) = F_{m+2}(z)\, \frac{\Delta_{m+2}(T_n)}{n(m+2)!} + F_m(z)\, \frac{\pi_m(T_n)}{m!}, \quad m = \overline{2, M},$$

$$\omega_n = O_{\mathbf{P}_{\theta_0,K}}(1).$$

Замечание. То, что в теореме коэффициенты разложения и остаток зависят от $\mathbf{X}$, мы опустили для сокращения записи.

Доказательство. Пусть $A = \delta_2$ из условия 7 и пусть $\alpha \in (0; 0,5)$ – произвольное число, $A_n = An^{\alpha}$, $B_n = [T_n - A_n/\sqrt{n}; T_n + A_n/\sqrt{n}]$. В силу леммы 7 (применяя ее тем же образом, что и при доказательстве теоремы 1) достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $c > 0$, что

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\Big(\Big|\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{n}} \widetilde{q}_n\Big(T_n + \frac{h}{\sqrt{n}}\Big|\mathbf{X}\Big) dh - \sum_{m=0}^{M} n^{-m/2} H_m(z)\Big| > cn^{-(M+1)/2}\Big) < \varepsilon,$$

где $\widetilde{q}$ определяется в лемме 7.

Как и в доказательстве теоремы 1, разделим числитель и знаменатель $\widetilde{q}$ на величину $p_n(\mathbf{X}|T_n)\, g(T_n)$, которая больше нуля по условию 4 с вероятностью единица. Сделаем замену $\theta = T_n + h/\sqrt{n}$ в знаменателе $\widetilde{q}$. Тогда достаточно показать, что величина

$$\int_{-A_n}^{z} \frac{\widetilde{Z}_n(T_n, h)}{\int_{-A_n}^{A_n} \widetilde{Z}_n(T_n, h) dh} dh - \sum_{m=0}^{M} n^{-m/2} H_m(z) \tag{14}$$

равна $n^{-(M+1)/2} O_{\mathbf{P}_{\theta_0,K}}(1)$. В силу леммы 8 вероятность того, что величина $T_n + h/\sqrt{n}$ не будет выходить за границы параметрического пространства Θ при $h \in [-A_n; A_n]$, стремится к нулю. Поэтому можно ввести условия, что $T_n + h/\sqrt{n} \in \Theta$ для всех h. Наконец, как и при доказательстве теоремы 1, умножим числитель и знаменатель дроби на

$$V_n(T_n) = \exp\left(-\frac{\Delta_1^2(T_n)}{2nI(T_n)}\right)\sqrt{\frac{I(T_n)}{2\pi}}.$$

Дальнейший ход доказательства следующий: разложим в многочлен Тейлора экспоненту от логарифма $\widetilde{Z}_n(T_n, h)$, и от полученного разложения вычислим интегралы в (14), после чего доказываем стремление у нулю интегралов от остаточных членов разложения, а также плотность коэффициентов разложения. Затем, получившуюся дробь вида $1/(1+b)$ снова разлагаем в ряд Тейлора, устанавливаем стремление к нулю остатков, что дает необходимый результат.

Разложим $\ln \widetilde{Z}_n(T_n, h)$ по формуле Тейлора относительно точки $h=0$ с остатком в форме Лагранжа:

$$\ln \widetilde{Z}_n(T_n, h) = \sum_{m=1}^{M+2} \frac{\Delta_m(T_n)}{m!}\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^m + \sum_{m=1}^{M} \frac{\pi_m(T_n)}{m!}\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^m + r_1(h),$$

$$r_1(h) = \frac{\Delta_{M+3}(T_n + \xi_1(h))}{m!}\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^{M+3} + \frac{\pi_{M+1}(T_n + \xi_2(h))}{(M+1)!}\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^{M+1},$$

где $\xi_1(h)$ и $\xi_2(h)$ – некоторые точки между 0 и h. В силу условий 5 и 8 многочлен Тейлора существует для каждого h.

Положим

$$\psi(h) = \frac{h\Delta_1(T_n)}{\sqrt{n}} - \frac{h^2 I(T_n)}{2}.$$

Разложим экспоненту от $\ln \widetilde{Z}_n(T_n, h)$ по формуле Тейлора относительно точки $\psi(h)$:

$$\ln \widetilde{Z}_n(T_n, h) = \psi(h) + L_n(h),$$

$$\begin{aligned} L_n(h) = \frac{h^2}{2}\left(\frac{\Delta_2(T_n)}{n} + I(T_n)\right) \\ + \sum_{m=1}^{M} n^{-m/2}\left(\frac{h^{m+2}}{(m+2)!}\frac{\Delta_{m+2}(T_n)}{n} + \frac{h^m}{m!}\pi_m(T_n)\right) + r_1(h), \end{aligned}$$

$$\exp\{\ln \widetilde{Z}_n(h)\} = \exp\{\psi(h)\}\left[1+L_n(h)+\frac{1}{2}(L_n(h))^2+\ldots+\frac{1}{M!}(L_n(h))^M\right] \\ + \exp\left\{\psi(h)+\widetilde{L}_n(h)\right\}\frac{1}{(M+1)!}(L_n(h))^{M+1}, \tag{15}$$

$\widetilde{L}_n(h)$ – некоторая точка между 0 и $L_n(h)$.

Докажем равномерную плотность коэффициентов при $n^{-m/2}$ в получившемся разложении. Сначала установим, что

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(\int\limits_{-A_n}^{A_n} V_n(T_n)\exp\{\psi(h)\}|r_1(h)|dh > Cn^{-(M+1)/2}\right) \to 0$$

при $C \to \infty$ равномерно для всех n.

Так как $\xi_2(h) \in [-A_n; A_n]$ и π_{M+1} вследствие условия 8 непрерывна, то величина $|\pi_{M+1}\left(T_n + \xi_2(h)/\sqrt{n}\right)|$ ограничена некоторой постоянной $\widetilde{\pi}_{M+1}$, не зависящей от n. Таким образом,

$$|r_1(h)| \\ \leqslant n^{-(M+1)/2}\left(\frac{|h|^{M+3}}{n(M+3)!}\sup_{|\xi|<A_n}\left|\Delta_{M+3}\left(T_n+\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right| + \frac{|h|^{M+1}}{(M+1)!}\widetilde{\pi}_{M+1}\right). \tag{16}$$

Для краткости положим

$$\sup_{|\xi|<A_n}\left|\Delta_{M+3}\left(\theta_0+\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right| = \widetilde{\Delta}_{M+3}.$$

Поскольку

$$V_n(T_n)\exp\{\psi(h)\} = \varphi\left(h\middle|\mu_n,\sigma_n^2\right)$$

и $|a+b|^m \leqslant 2^m(|a|^m+|b|^m)$, то

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(\int\limits_{-A_n}^{A_n}\varphi\left(h\middle|\mu_n,\sigma_n^2\right)|r_1(h)|dh > Cn^{-(M+1)/2}\right) \\ \leqslant \mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|h+\mu_n|^{M+3}\left(\frac{|\widetilde{\Delta}_{M+3}|}{n}+\widetilde{\pi}_{M+1}\right)\varphi\left(h\middle|0,\sigma_n^2\right)dh > C\right) \\ \leqslant \mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(2^{M+3}\left(E_{M+3}\sigma_n^{2(M+3)}+|\mu_n|^{M+3}\right)\left(\frac{|\widetilde{\Delta}_{M+3}|}{n}+\widetilde{\pi}_{M+1}\right) > C\right),$$

где $E_m = \int\limits_{\mathbb{R}} |h|^m \varphi(h) dh$. Итак, в силу леммы 3, достаточно показать, что каждый из множителей под знаком вероятности есть равномерно плотная последовательность. Это обеспечивается леммой 5, непрерывностью I и неравенством Маркова ($\mathbf{E}_{\theta_0,K}|\widetilde{\Delta}_{M+3}| < \infty$ по свойству 7b).

Используя неравенство Маркова и условия 7b и 8 можно таким же образом показать, что коэффициенты в сумме в $L_n(h)$ при $n^{-m/2}$ равномерно плотны:

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(n^{-m/2}\left|\int\limits_{-A_n}^{A_n} \varphi\left(h\middle|\mu_n, \sigma_n^2\right)\left[h^{m+2}\frac{\Delta_{m+2}(T_n)}{n(m+2)!}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{h^m}{m!}\pi_m(T_n)\right]dh\right| > Cn^{-m/2}\right) \to 0, \quad C \to \infty.$$

Дополнительный член перед суммой в $L_n(h)$ также является равномерно плотным, ибо по неравенству Чебышева и условию 7a

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(\frac{E_2}{2}\left|\frac{\Delta_2(T_n)}{n} + I(T_n)\right| > Cn^{-1/2}\right)$$
$$\leqslant \frac{E_2^2}{4C^2}\mathbf{E}_{\theta_0,K}\left(l_2(T_n) + I(T_n)\right)^2 = O(C^{-2}).$$

Таким образом, установлено, что для интеграла от $L_n(h)$ коэффициенты являются равномерно плотными случайными величинами. Для оставшихся членов в (15) применим лемму 3, что позволит утверждать равномерную по n плотность всех коэффициентов при $n^{-m/2}$ кроме остатка.

Теперь обратимся к доказательству равномерной плотности остатка разложения экспоненты (15). Для этого надо убедиться в том, что последовательность

$$n^{(M+1)/2}\int\limits_{-A_n}^{A_n} V(T_n)\exp(\psi(T_n, h) + \widetilde{L}_n(h))\left(L_n(h)\right)^{M+1} dh \tag{17}$$

равномерно плотна. Доказательство будет проводиться по аналогии с доказательством в теореме 1. Из определения $\widetilde{L}_n$ видно, что $0 \leqslant$

$|\widetilde{L}_n(h)| \leqslant |L_n(h)|$. Имеем очевидное неравенство:

$$h^{-2}|L_n(h)| \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta_2(T_n)}{n} + I(T_n)\right|$$
$$+ \sum_{m=1}^{M}\left[\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^m \frac{1}{(m!2)!}\frac{|\Delta_{m+2}(T_n)|}{n} + \left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^{m-2}\frac{|\pi_m(T_n)|}{nm!}\right] + |r_1(h)|.$$

Величину $|r_1(h)|$ можно оценить тем же образом, как и в последнем выражении, используя неравенство (16). Таким образом, $h^{-2}|L_n(h)|$ зависит от h только через $hn^{-1/2}$, и при этом $|h|n^{-1/2} \leqslant An^{\alpha-1/2} \to 0$. Отсюда и из доказанной равномерной плотности коэффициентов при степенях $hn^{-1/2}$ для любого числа $0 < \beta < 1/2-\alpha$ и некоторого $C_1 > 0$ вероятность

$$\mathbf{P}_{\theta_0,K}\left(h^{-2}n^{\beta}|L_n(h)| > C_1\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, рассмотрим множества

$$U_n = \left\{h^{-2}n^{\beta}|L_n(h)| > C_1\right\}, \quad Y_n = \left\{|\mu_n| > n^{\beta/4}\right\},$$

Только что было показано, что $\mathbf{P}_{\theta_0,K}(U_n) \to 0$, и $\mathbf{P}_{\theta_0,K}(Y_n) \to 0$ (см. лемму 5). Для $\mathbf{X} \in U_n^c \cap Y_n^c$ одно из подынтегральных выражений в (17)

$$\begin{aligned}
&V(T_n)\exp(\psi(T_n,h) + \widetilde{L}_n(h)) \\
&\quad\leqslant \varphi\left(h\Big|\mu_n,\sigma_n^2\right)\exp(|L_n(h)|) \leqslant \varphi\left(h\Big|\mu_n,\sigma_n^2\right)\exp(h^2n^{-\beta}C_1) \\
&\quad= \varphi\left(h\Big|\frac{\Delta_1(T_n)}{\sqrt{n}(I(T_n)-2C_1n^{-\beta})}, \frac{1}{I(T_n)-2C_1n^{-\beta}}\right) \\
&\qquad\times\exp\left[\frac{\Delta_1^2(T_n)}{2nI^2(T_n)}\left(\frac{2C_1n^{-\beta}I(T_n)}{I(T_n)-2C_1n^{-\beta}}\right)\right] \\
&\quad\leqslant \varphi\left(h\Big|\frac{\Delta_1(T_n)}{\sqrt{n}(I(T_n)-2C_1n^{-\beta})}, \frac{1}{I(T_n)-2C_1n^{-\beta}}\right) \\
&\qquad\times\exp\left[\frac{C_1n^{-\beta/2}I(T_n)}{I(T_n)-2C_1n^{-\beta}}\right].
\end{aligned}$$

Величина под экспонентой в правой части в последней цепочке неравенств стремится к нулю по вероятности $\mathbf{P}_{\theta_0,K}$. Таким образом, интеграл (17) не превосходит интеграла

$$n^{(M+1)/2}\int_{-A_n}^{A_n}\varphi\biggl(h\Big|\frac{\Delta_1(T_n)}{\sqrt{n}(I(T_n)-2C_1n^{-\beta})},\frac{1}{I(T_n)-2C_1n^{-\beta}}\biggr)(L_n(h))^{M+1}dh.$$

Как было показано ранее, интеграл вида $\int\sqrt{n}|L_n(h)|\varphi(h|\mu,\sigma^2)dh$ дает равномерно плотную последовательность, лишь бы среднее μ было равномерно плотным, а дисперсия σ^2 не стремилась к нулю. Отсюда следует, что последнее выражение является равномерно плотной последовательностью.

Обратимся снова к разложению (15). Как было показано, после интегрирования по h в пределах от $-A_n$ до A_n коэффициенты и остаток разложения (15) удовлетворяют утверждению теоремы. Для удобства заменим пределы интегрирования на бесконечности, что возможно сделать в силу леммы 6. Таким образом,

$$\int_{-A_n}^{z}\widetilde{Z}_n(T_n,h)dh=\sum_{m=0}^{M}n^{-m/2}f_m(z)+n^{-(M+1)/2}R_1, \qquad (18)$$

где $R_1=O_{\mathbf{P}_{\theta_0,K}}(1)$ равномерно по z согласно сказанному выше.

Знаменатель интеграла в (14) примет вид (18) лишь с заменой z на ∞ (заметим, что главный член окажется равным единице). Разложим далее дробь вида $(1+b)^{-1}$ относительно $b=0$:

$$\frac{1}{1+b}=\sum_{m=0}^{\infty}(-b)^m.$$

Подставляя в это разложение $b=\sum\limits_{m=1}^{M}n^{-m/2}f_m(\infty)+n^{-(M+1)/2}R_1$, и домножая на полученное ранее разложение числителя, формально получаем утверждение теоремы. Равномерную плотность по $\mathbf{P}_{\theta_0,K}$ коэффициентов при $n^{-m/2}$ и остатка получаем так же с помощью леммы 3. $\square$

По аналогии со следствием 1, можно сформулировать следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть для любого компакта $K\in\Theta$, входящего в Θ с некоторой окрестностью, оценка $T_n\in\mathbb{C}(K)$ и выполнены условия*

$\mathbb{D}(M,K)$. *Тогда найдется такая величина* ω_n, *что*

$$\mathbf{P}(\sqrt{n}(\vartheta - T_n) < z|\mathbf{X}) = \sum_{m=0}^{M} n^{-m/2} H_m(z) + n^{-(M+1)/2}\omega_n, \quad \omega_n = O_{\mathbf{P}}(1).$$

Доказательство. Полностью совпадает с доказательством следствия 1. □

§5. Разложение моментов

Практически не меняя доказательства предыдущей теоремы, можно получить разложение моментов апостериорного распределения, или более общо, средних значений от некоторых измеримых функций w:

$$\mathbf{E}\left\{w(\sqrt{n}(\vartheta - T_n))\big|\mathbf{X}\right\} = \frac{\int\limits_{\Theta} w(\sqrt{n}(\theta - T_n)) p_n\left(\mathbf{X}|\theta\right) g(\theta)\, d\theta}{\int\limits_{\Theta} p_n\left(\mathbf{X}|\theta\right) g(\theta)\, d\theta}.$$

Ширина класса функций w определяется узостью класса оценок T_n.

Определение 2. *Пусть* K – *некоторый компакт из* Θ, *а некоторое число* $r \geqslant 0$. *Будем говорить, что оценка* T_n *принадлежит классу оценок* $\mathbb{C}(K,r)$ *параметра* $\theta \in \Theta$, *если* T_n *измерима,* $T_n \in \mathbb{C}(K)$ *и*

$$\mathbf{E}_{\theta,K}|\sqrt{n}(T_n - \theta)|^r < \infty.$$

Обозначим

$$F_{m,w} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h^m w(h) \varphi\big(h\big|\mu_n, \sigma_n^2\big)\, dh.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $\mathbb{D}(M,K)$, *оценка* $T_n \in \mathbb{C}(K,r)$, *а функция* w *есть измеримое отображение* $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *и имеет полиномиальную мажоранту, порядок которой не превышает* r. *Тогда найдется такое* n_0, *что для всех* $n > n_0$

$$\mathbf{E}\left\{w\left(\sqrt{n}(\vartheta - T_n)\right)\Big|\mathbf{X}\right\} = \sum_{m=0}^{M} n^{-m/2} H_{m,w} + n^{-(M+1)/2}\omega_n, \tag{19}$$

где

$$H_{0,w} = f_{0,w} = F_{0,w},$$
$$H_{m,w} = f_{m,w} + \sum_{j=1}^{m} S_j f_{m-j,w}, \quad m = \overline{1,M},$$

$$f_{m,w} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m!} \sum_{I_1(j,m)} \prod_{l=1}^{j} q_{i_l,w}, \quad m = \overline{1, M},$$

$$q_{1,w} = F_{1,w}\pi_1(T_n) + \sqrt{n}\, F_{2,w} \frac{n^{-1}\Delta_2(T_n) + I(T_n)}{2} + F_{3,w} \frac{\Delta_3(T_n)}{6n},$$

$$q_{m,w} = F_{m+2,w} \frac{\Delta_{m+2}(T_n)}{n(m+2)!} + F_{m,w} \frac{\pi_m(T_n)}{m!}, \quad m = \overline{2, M},$$

$$\omega_n = O_{\mathbf{P}_{\theta_0,K}}(1),$$

(*коэффициенты* S_j *определены в утверждении теоремы* 2).

Доказательство. Поскольку доказательство аналогично тому, что проводилось для теоремы 2, мы ограничимся лишь некоторыми моментами, в которых будут использоваться условия на w.

Первый этап доказательства состоит в замене области интегрирования с $\sqrt{n}(\Theta - T_n)$ на $[-A_n; A_n]$. Так как этот этап основан на применении леммы 7, то формально необходимо передоказать лемму для случая, когда в числителе стоит не $p_n(\mathbf{X}|\theta)\, g(\theta)$, а

$$w(\sqrt{n}(\theta - T_n))\, p_n(\mathbf{X}|\theta)\, g(\theta).$$

В случае, когда w является полиномом, необходима версия леммы 1, в которой изучается поведение $|h+\sqrt{n}(T_n-\theta)|^r Z_n(\theta, h)$. Вследствие простого неравенства $|h+\sqrt{n}(T_n-\theta)|^r \leqslant 2^r|h|^r+2^r|\sqrt{n}(T_n-\theta)|^r$ требуются утверждения по каждому из слагаемых. Оказывается, утверждение о $|h|^r$ остается таким же; см., например, лемму 1 в [1], а интеграл

$$\mathbf{E}_{\theta,K} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\sqrt{n}(T_n - \theta)\right|^r Z_n(\theta, h) dh$$

конечен вследствие условия $T_n \in \mathbb{C}(K, r)$ и леммы 1. Таким образом, сужение области интегрирования возможно.

Легко видеть, что формально применяя то же разложение Тейлора к $\widetilde{Z}_n(T_n, h)$, что и в теореме 2, после чего интегрируя и используя разложение $1/(1+b)$, получим коэффициенты, указанные в утверждении текущей теоремы. Остается показать равномерную плотность коэффициентов и остатка. Ранее это опиралось на существование интеграла вида $\int\limits_{\mathbb{R}} w(h)h^m\varphi(h)\, dh$ и экспоненциальную (при $x \to \infty$) малость

$\int\limits_x^\infty w(h)h^m\varphi(h)\,dh$. Оба свойства выполняются для функций, ограниченных полиномиальной мажорантой, первое – по свойствам интеграла Эйлера, второе – по лемме 6. □

Теорема 3 является прямым обобщением теоремы 2, в которой

$$w(h) = I_{\{h<z\}}(h),$$

а условие $T_n \in \mathbb{C}(K,0)$, очевидно, всегда выполнено.

Теорема 3 допускает обобщения для функций w, удовлетворяющих следующим условиям: величина $w(h)Z_n(\theta,h)$ экспоненциально убывает с ростом h, интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} w(h)h^m\varphi(h)\,dh$ существует для всех m и остаток $\int\limits_x^\infty w(h)h^m\varphi(h)\,dh$ убывает экспоненциально при $x\to\infty$ для всех m.

Для разложения моментов можно сформулировать аналог следствий 1 и 2 относительно равномерности остатка по мере $\mathbf{P}$.

В данной статье приведено лишь утверждение о разложении апостериорных средних как аналога теоремы 2, однако можно также привести аналог теоремы 1 относительно моментных характеристик, то есть привести асимптотическое значение для последовательности средних. Понятно, что в качестве предела будет выступать среднее $\mathbf{E}w(Y)$, в котором $Y\sim N(\mu_n,\sigma_n^2)$, и которое совпадает с первым членом разложения (19).

Литература

1. С. И. Гусев, *Асимптотические разложения, связанные с некоторыми статистическими оценками в гладком случае.* I. *Разложения случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **20**, No. 3 (1975), 488–514.
2. С. И. Гусев, *Асимптотические разложения, связанные с некоторыми статистическими оценками в гладком случае.* II. *Разложения моментов и распределений.* — Теория вероятн. и ее примен. **21**, No. 1 (1976), 16–33.
3. J. K. Ghosh, B. K. Sinha, S. N. Joshi, *Expansions for posterior probability and integrated Bayes risk.* — Statis. Decision Theor. Relat. Topics **3**, No. 1 (1982), 403–456.
4. R. A. Johnson, *Asymptotic expansions associated with posterior distributions.* — Ann. Math. Statist. **41**, No. 3 (1970), 851–864.
5. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Асимптотическая теория оценивания*, Наука, М., 1979.

6. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Асимптотическое поведение некоторых статистических оценок в гладком случае.* I. *Исследование отношения правдоподобия.* — Теория вероятн. и ее примен. **17**, No. 3 (1972), 469–486.
7. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Асимптотическое поведение некоторых статистических оценок в гладком случае.* II. *Предельные теоремы для апостериорной плотности и байесовских оценок.* — Теория вероятн. и ее примен. **18**, No. 1 (1973), 78–93.
8. L. M. Le Cam, *On the asymptotic theory of estimation and testing.* — Proc. 3rd Berkeley Symp. Math. Statist. **1**, (1956), 129–156.
9. L. M. Le Cam, *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*, Springer, New York, 1986.
10. М. Лоэв, *Теория вероятностей*, Издательство иностранной литературы, М., 1962.
11. Д. Русас, *Контигуальность вероятностных мер*, Мир, М., 1975.
12. A. W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
13. R. C. Weng, *A Bayesian Edgeworth expansion by Stein's Identity.* — Bayesian Analysis, **5**, No. 4, (2010), 741–764.
14. A. A. Zaikin *On asymptotic expansion of posterior distribution.* — Lobachevskii J. Math. **37**, No. 4 (2016), 515–525.

Zaikin A. A. Asymptotic expansion of posterior distribution of parameter centered by a $\sqrt{n}$-consistent estimate.

The article studies asymptotic behaviour of posterior distribution of a real parameter centered by a $\sqrt{n}$-consistent estimate. An analogue of Bernstein–von Mises theorem is presented. The article emphasizes uniformity of the result. In the same framework asymptotic expansions of posterior distribution and posterior mean of functions bounded by polynomial are constructed.

Институт вычислительной математики
и информационных технологий,
Казанский федеральный университет,
Кремлевская 35, 420008, Казань, Россия
E-mail: Kaskrin@gmail.com

Поступило 11 октября 2016 г.