Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

**М. С. Ермаков**

# О ВЕРОЯТНОСТЯХ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ ЭМПИРИЧЕСКИХ МЕР ДЛЯ КОНТИГУАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

## §1. Введение

Задача о вероятностях больших уклонений эмпирических мер для вероятностных распределений, сближающихся с данным, довольно хорошо изучена [4, 7]. В тоже время на задачу о вероятностях умеренных уклонений в аналогичной постановке не обращали столь большое внимание. Когда вероятностные меры абсолютно непрерывны относительно данной, и их плотности сходятся в $L_2$, эта задача исследовалась в [9]. В настоящей работе эти условия не предполагаются и заменяются условием сходимости вероятностных распределений в слабой $\tau_\Phi$-топологии. Отметим, что задачи со сближающимися вероятностными мерами естественно возникают в математической статистике при изучении эффективности статистических критериев и оценок, а также в статистических моделях робастности и misспецификации. Другим подходом к исследованию этих задач является изучение распределений статистических функционалов, как функционалов от эмпирических процессов [1, 2, 11, 13]. Достоинством подхода данной работы является то, что при его применении мы можем использовать весовую метрику Колмогорова–Смирнова [9], не рассматривая никаких дополнительных условий, возникающих при изучении вероятностей умеренных уклонений эмпирических процессов [1].

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в хаусдорфовом топологическом пространстве $S$ и имеющие вероятностную меру $\mathbf{P}_n$, определенную на $\sigma$-алгебре борелевских множеств $\Im$. Обозначим $\widehat{\mathbf{P}}_n$ эмпирическую меру $X_1, \dots, X_n$. Определим множество $\Lambda$ всех вероятностных мер на $(S, \Im)$. Определим множество $\Lambda_0$ всех зарядов $\mathbf{H}$ на $(S, \Im)$, таких что $\mathbf{H}(S) = 0$, и $|\mathbf{H}|(S) < \infty$. Здесь $|\mathbf{H}|(A)$ обозначает вариацию

*Ключевые слова*: принцип больших уклонений, умеренные уклонения, контигуальность, эмпирическая мера.

Работа поддержана грантами РФФИ 14-01-00856, НШ-2504.2014.1.

заряда $|\mathbf{H}|$ на множестве $A \in \Im$, т.е. $|\mathbf{H}|(A) = \sup\{|\mathbf{H}(B) - \mathbf{H}(D)| : B, D \subset A$ и $B, D \in \Im\}$.

Нас будут интересовать вероятности умеренных уклонений эмпирических мер $\widehat{\mathbf{P}}_n$, когда вероятностные меры $\mathbf{P}_n$ сближаются с некоторой вероятностной мерой $\mathbf{P}$. Мы будем предполагать, что $\mathbf{P}_n = \mathbf{P} + b_n\mathbf{H}_n$, где $\mathbf{H}_n \in \Lambda_{0\Phi}$, $b_n \to 0, nb_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$, и $\mathbf{H}_n$ сходятся к $\mathbf{H} \in \Lambda_{0\Phi}$ в специальной слабой $\tau_\Phi$-топологии.

Приведем соответствующие определения.

Обозначим $\Phi$ множество измеримых функций $S \to R^1$, таких что

$$\lim_{n\to\infty} (nb_n^2)^{-1} \log(n\mathbf{P}(|f(X)| > nb_n)) = -\infty, \tag{1.1}$$

Определим множество $\Lambda_{0\Phi}$ зарядов $\mathbf{H} \in \Lambda_0$, таких что

$$\int_S |f|\, d|\mathbf{H}| < \infty \quad \text{для всех } f \in \Phi.$$

Тогда $\tau_\Phi$-топология слабой сходимости порождается отображениями

$$H \Rightarrow \int f\, d\mathbf{H} \quad \text{для всех } f \in \Phi, \mathbf{H} \in \Lambda_{0\Phi}.$$

Для произвольного множества $\Omega_0 \subset \Lambda_{0\Phi}$ обозначим соответственно $\mathfrak{clo}(\Omega_0)$ и $\mathfrak{int}(\Omega_0)$ замыкание и внутренность множества $\Omega_0$ в $\tau_\Phi$-топологии.

Для $G \in \Lambda_0$ определим хорошо известный функционал действия для вероятностей умеренных уклонений (см. [3]; [1, 8, 11]). Он равен

$$\rho_0^2(\mathbf{G}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int \left(\frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{P}}\right)^2 d\mathbf{P}, & \mathbf{G} \ll \mathbf{P}; \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для множества $\Omega_0 \subset \Lambda_0$ обозначим $\rho_0^2(\Omega_0) = \inf\{\rho_0^2(\mathbf{G}), \mathbf{G} \in \Omega_0\}$.

Сделаем следующее предположение.

**A** Для каждого $f \in \Phi$ существует такое $k_0$, что

$$\limsup_{n\to\infty} (nb_n^2)^{-1} \sup_{k>k_0} \log \left( n \int\limits_{|f(x)|>nb_n} d|\mathbf{H}_k| \right) = -\infty.$$

Поскольку статистические функционалы (см. [7, 11, 12]) часто не являются измеримыми, то результаты будут даны в терминах внутренних и внешних вероятностей. Обозначим $\sigma_{\Lambda_{0\Phi}}$ сигма-алгебру борелевских множеств на $\Lambda_{0\Phi}$, порожденную $\tau_\phi$-топологией. Внешняя вероятность множества $B \subset \Lambda_{0\Phi}$ равна

$$(\mathbf{P})^*(B) = \inf\{\mathbf{P}(A); B \subseteq A, A \in \sigma_{\Lambda_{0\Phi}}\},$$

а его внутренняя вероятность равна $(\mathbf{P})_*(B) = 1 - (\mathbf{P})^*(\Lambda_{0\Phi} \setminus B)$.

**Теорема 1.** *Пусть выполнено условие* **A**. *Пусть последовательность зарядов $H_n$ сходится к заряду* **H** *в $\tau_\Phi$-топологии. Пусть $\mathbf{P}_n = \mathbf{P} + b_n\mathbf{H}_n \in \Lambda$. Тогда для любого множества $\Omega_0 \subset \Lambda_{0\Phi}$ имеет место*

$$\liminf_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\log\mathbf{P}_n(\widehat{\mathbf{P}}_n \in P + b_n\Omega_0) \geqslant -\rho_0^2(\mathrm{int}(\Omega_0) - \mathbf{H}), \tag{1.2}$$

*и*

$$\limsup_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\log\mathbf{P}_n(\widehat{P}_n \in \mathbf{P} + b_n\Omega_0) \leqslant -\rho_0^2(\mathrm{cl}(\Omega_0) - \mathbf{H}). \tag{1.3}$$

Приведем аналог теоремы 1, в котором множество $\mathbf{P} + b_n\Omega_0$ заменяется на множество $\mathbf{P}_n + b_n\Omega_0$.

**Теорема 2.** *Пусть выполнено условие* **A**. *Пусть последовательность зарядов $\mathbf{H}_n$ сходится к заряду* **H** *в $\tau_\Phi$-топологии. Пусть $\mathbf{P}_n = \mathbf{P} + b_n\mathbf{H}_n \in \Lambda$. Тогда для любого множества $\Omega_0 \in \Lambda_{0\Phi}$ имеет место*

$$\liminf_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\log\mathbf{P}_n(\widehat{\mathbf{P}}_n \in \mathbf{P}_n + b_n\Omega_0) \geqslant -\rho_0^2(\mathrm{int}(\Omega_0)), \tag{1.4}$$

*и*

$$\limsup_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\log\mathbf{P}_n(\widehat{\mathbf{P}}_n \in \mathbf{P}_n + b_n\Omega_0) \leqslant -\rho_0^2(\mathrm{cl}(\Omega_0)). \tag{1.5}$$

Доказательство теоремы 2 почти не отличается от доказательства теоремы 1 и будет опущено. Мы наметим соответствующие рассуждения в конце доказательства верхней границы (1.3) теоремы 1.

## §2. Доказательство теоремы 1

Рассуждения основаны на варианте доказательства условного принципа больших уклонений для вероятностей умеренных уклонений эмпирических бутстрап мер при условии, что эмпирическая мера фиксирована (см. [9, теорема 2.1]), а также на доказательстве необходимых и достаточных условий для принципа больших уклонений для вероятностей умеренных уклонений для независимых случайных величин, предложенном в [7].

**2.1. Предварительные леммы.** Начнем с трех вспомогательных лемм.

Определим множество $\Gamma_{0r}$ всех зарядов $\mathbf{G} \in \Lambda_{0\Phi}$, таких что $\mathbf{G} \ll P$ и $\rho_0^2(\mathbf{G}) \leqslant r$.

**Лемма 2.1.** *Имеет место*

i. $\Gamma_{0r} \subset \Lambda_{0\Phi}$,

ii. $\Gamma_{0r}$ *является* $\tau_\Phi$*-компактным и секвенциально* $\tau_\Phi$*-компактным множеством в* $\Lambda_{0\Phi}$,

iii. $\tau$ *и* $\tau_\Phi$*-топологии совпадают в* $\Gamma_{0r}$.

Лемма 2.1 представляет собой лемму 5.1, доказанную в [9].

**Лемма 2.2.** *Для любого* $f \in \Phi$ *найдется такое* $C = C(f)$, *что*

$$\lim_{n\to\infty} \int f^2 d\mathbf{P}_n = \int f^2\, d\mathbf{P} < C, \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f^2 d\mathbf{H}_n = \int f^2\, d\mathbf{H} < C, \tag{2.2}$$

*и*

$$\lim_{n\to\infty} \int f^2 d\mathbf{H}_n^s = \int f^2\, d\mathbf{H}^s < C, \tag{2.3}$$

*где* $\mathbf{H}_n^s$ *и* $\mathbf{H}^s$ *обозначают соответственно сингулярные компоненты зарядов* $\mathbf{H}_n$ *и* $\mathbf{H}$.

В лемме 2.5 в [7] доказана конечность интегралов в (2.1). Сходимость интегралов в (2.1)–(2.3) следует из сходимости $\mathbf{H}_n$ к $\mathbf{H}$ в $\tau_\Phi$-топологии и равномерности по $n$ модификации оценок в доказательстве леммы 2.5 в [7] для данной постановки задачи.

**Лемма 2.3.** *Для любого* $f \in \Phi$ *имеет место*

$$\lim_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\log \mathbf{P}_n\biggl((nb_n)^{-1}\sum_{s=1}^{n}\Bigl(f(X_s)-b_n\int f\, d\mathbf{H}\Bigr)>x\biggr) = -\frac{x^2}{2\sigma^2(f)}, \tag{2.4}$$

*где* $\sigma^2(f) = \mathrm{Var}[f(X)]$.

Доказательство леммы 2.3 по существу совпадает с доказательством ее аналога для $P_n = P$ (см. [1, 7]), с использованием факта равномерности оценок в условии **A**. Мы только проведем оценку одного из слагаемых, возникающих при доказательстве (2.4). Именно это слагаемое показывает вклад последовательности зарядов $H_n$ в асимптотику. Покажем, что для случайных величин $Y_s = f(X_s)\chi(f(X_s) < \tau b_n^{-1}), \tau > 0$, имеет место

$$\lim_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\log \mathbf{P}_n\left((nb_n)^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(Y_s - b_n\int f\,d\mathbf{H}\right) > x\right) = -\frac{x^2}{2\sigma^2(f)}. \quad (2.5)$$

По теореме Эллиса–Гартнера [5, теорема 2.3.6] достаточно показать, что

$$I_n \doteq (nb_n^2)^{-1}\log \mathbf{E}_n \exp\left\{tb_n\sum_{s=1}^{n}\left(Y_s - b_n\int f\,d\mathbf{H}\right)\right\} = -\frac{t^2\sigma^2(f)}{2}. \quad (2.6)$$

Применяя формулу Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} I_n &= b_n^{-2}\log \mathbf{E}_n \exp\left\{tb_n\left(Y_1 - b_n\int f\,d\mathbf{H}\right)\right\} \\ &= b_n^{-2}\log\left(1 + tb_n\omega_{1n} + \frac{t^2b_n^2}{2}\omega_{2n} + O(t^3b_n^3\omega_{3n})\right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{1n} &= \mathbf{E}_n(f(X_1) - Y_1) = \mathbf{E}_n[f(X_1)\chi(f(X_1) > \tau b_n^{-1})] \\ &= \mathbf{E}[f(X_1)\chi(f(X_1) > \tau b_n^{-1})] + b_n\int f(x)\chi(f(x) > \tau b_n^{-1})\,d\mathbf{H}_n \\ &< b_n\mathbf{E}[f^2(X_1)\chi(f(X_1) > \tau b_n^{-1})] + b_n^2\int f^2(x)\chi(f(x) > \tau b_n^{-1})\,d\mathbf{H}_n \\ &= o(b_n), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\omega_{2n} = \mathbf{E}_n[Y_1^2] = \mathbf{E}[Y_1^2] + O\left(b_n\int f^2 d|\mathbf{H}_n|\right) = \sigma^2(f)(1 + o(1)), \quad (2.9)$$

и

$$\begin{aligned} \omega_{3n} = \mathbf{E}_n[Y_1^3] &= \mathbf{E}[Y_1^3] + b_n\int f^3\chi(f < \tau b_n^{-1})d\mathbf{H}_n \\ &< \mathbf{E}[Y_1^3] + \tau\sigma^2(f) = o(b_n^{-1}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

Последнее равенство в (2.8) следует из леммы 2.2). Последняя оценка в (2.9) использует равенство $\mathbf{E}[Y_1^3] = o(b_n^{-1})$, доказанное для $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}$ в [7, с. 212]. Для $\mathbf{P}_n$ доказательство этого равенства аналогично.

Из (2.7)–(2.10) получаем (2.6), а следовательно и (2.5).

**2.2. Доказательство верхней границы.** Обозначим $\eta = \rho_0^2(\mathfrak{cl}(\Omega_0 - \mathbf{H}))$ и зафиксируем $\delta, 0 < 2\delta < \eta$. Тогда $\Gamma_{0,\eta-\delta} \subset \Lambda_{0\Phi} \setminus (\Omega_0 - \mathbf{H})$.

Для любых функций $f_1, \dots, f_l \in \Phi$, заряда $\mathbf{G} \in \Lambda_{0\Phi}$ и $\gamma > 0$ обозначим

$$U(f_1, \dots, f_l, \mathbf{G}, \gamma) = \left\{ \mathbf{R} : \left| \int f_i d(\mathbf{R} - \mathbf{G}) \right| < \gamma, \mathbf{R} \in \Lambda_{0\Theta}, 1 \leqslant i \leqslant l \right\}.$$

Множество $\Gamma_{0,\eta-\delta}$ компактно. Следовательно существует конечное покрытие $\Gamma_{0,\eta-\delta}$ множествами

$$U_1 = U(f_{11}, \dots, f_{1l_1}, \mathbf{G}_1, c_1), \dots, U_m = U(f_{m1}, \dots, f_{ml_m}, \mathbf{G}_m, c_m),$$

не пересекающимися с $\Omega_0 - \mathbf{H}$. Здесь $f_{ij} \in \Phi$, $\mathbf{G}_i \in \Gamma_{0,\eta-\delta}$ для $1 \leqslant j \leqslant l_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Обозначим $U = \cup_{i=1}^m U_i$. Без потери общности мы можем предположить, что $\mathbf{E}[f_{ij}(X_1)] = 0$ для всех $1 \leqslant j \leqslant l_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Таким образом, для доказательства (1.3) достаточно оценить левую часть

$$\mathbf{P}_n(\widehat{\mathbf{P}}_n - b_n\mathbf{H} \notin \mathbf{P} + b_n U) \geqslant \mathbf{P}_n(\widehat{\mathbf{P}}_n \in \mathbf{P} + b_n\Omega_0). \tag{2.11}$$

Для любого конечного множества $\Phi_0 = \{\phi_1, \dots, \phi_k\} \subset \Phi$ и любого заряда $G \in \Lambda_{0\Phi}$ обозначим

$$\mathbf{G}_{\Phi_0} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_k) : z_i = \int \phi_i \, d\mathbf{G}, 1 \leqslant i \leqslant k \right\}.$$

Для любого множества $\Psi \subset \Lambda_{0\Phi}$ обозначим $\Psi_{\Phi_0} = \{z : z = \mathbf{G}_{\Phi_0}, \mathbf{G} \in \Psi\}$.

Определим вероятностную меру $\nu$ на $(S, \Im)$, такую что $\mathbf{H}_i^{(s)} \ll \nu$, и $\mathbf{H}^{(s)} \ll \nu$, причем $\int f^2 \, d\nu < \infty$ для любого $f \in \Phi$, и мера $\nu$ сингулярна относительно меры $\mathbf{P}$.

Нетрудно видеть, что мы можем определить функции $f_{ij}, 1 \leqslant j \leqslant l_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$ и покрытие $U_1, \dots, U_m$ так, что функции $f_{ij}$ будут линейно независимы, при этом их можно упорядочить, получив функции $h_1, \dots, h_{k_1}$, $h_{k_1+1}, \dots, h_{k_2}$, $h_{k_2+1}, \dots, h_k$, $k = l_1 + \ldots + l_m$, для которых

$$\mathbf{E}[h_i^2(X_1)] \neq 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k_1,$$

$$\mathbf{E}[h_i^2(X_1)] = 0, \quad \int h_i^2 \, d\nu \neq 0, \quad k_1 + 1 \leqslant i \leqslant k_2,$$

и

$$\mathbf{E}[h_i^2(X_1)] = 0, \quad \int h_i^2 \, d\nu = 0, \quad k_2 + 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Зададим множества $D_0 = \{h_1, \dots, h_{k_1}\}$, $D_1 = \{h_{k_1+1}, \dots, h_{k_2}\}$, $D_2 = \{h_{k_2+1}, \dots, h_k\}$ и $D = \{h_1, \dots, h_k\}$.

Обозначим через $L$ линейное подпространство функций, порожденное функциями $h_1, \dots, h_{k_1}$.

Как показано в доказательстве верхней границы теоремы 2.1 [9], функции $h_1, \dots, h_{k_1}$ можно выбрать так, что

$$\mathbf{E}[h_i(X)] = 0, \quad \mathbf{E}[h_i^2(X)] = 2(\eta - 2\delta), \quad 1 \leqslant i \leqslant k_1,$$

$$\Gamma_{0,\eta-2\delta} \cap L \subset \cap_{i=1}^{k_1} V(h_i) \cap L \subset \Gamma_{0,\eta-\delta} \cap L$$

и, для $1 \leqslant i \leqslant k_1$,

$$V_i = V(h_i) = \left\{ \mathbf{G} : \left| \int h_i d\mathbf{G} \right| < 2(\eta - 2\delta), \mathbf{G} \in \Lambda_{0\Theta} \right\}.$$

Отметим, что неравенства для функций $h_i, k_1 < i \leqslant k_2$, задающие окрестности $U_1, \dots, U_m$, имеют вид

$$\left| \int h_i d(\mathbf{R} - \mathbf{G}) \right| = \left| \int h_i d\mathbf{R} \right| < c_i,$$

так как $\mathbf{G} \ll \mathbf{P}$, и носитель функции $h_i$ имеет $\mathbf{P}$-меру нуль. Таким образом, они только уменьшают множество событий событиями

$$\left| \int h_i d\widehat{\mathbf{P}}_n \right| < b_n c_i, \quad k_1 < i \leqslant k_2,$$

которые в оценке сверху мы можем игнорировать.

Наконец, для $h_i, k_2 < i \leqslant k$, события

$$\left| \int h_i d\,(\widehat{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}) \right| < b_n c_i$$

имеют вероятность единица.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\widehat{\mathbf{P}}_n - b_n\mathbf{H} \in \mathbf{P} + b_n U) &\leqslant \mathbf{P}_n(\widehat{\mathbf{P}}_{nD_0} - b_n\mathbf{H}_{nD_0} \in \mathbf{P}_{D_0} + b_n V_{D_0}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{P}_n\Big( \int h_i d(\widehat{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_0 - b_n\mathbf{H}) > b_n(\eta - 2\delta)^{1/2}\Big) \qquad (2.12) \\ &\leqslant \exp\{-(\eta - 2\delta) n b_n^2 / 2(1 + o(1))\}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из леммы 2.3. Из (2.11) и (2.12) следует верхняя граница (1.3).

Доказательство верхней границы в теореме 2 отличается тем, что за $\eta$ берется $\rho_0^2(\mathfrak{cl}(\Omega_0))$, и (2.11) заменяется на

$$\mathbf{P}_n(\widehat{\mathbf{P}}_n \notin \mathbf{P}_n + b_n U) \geqslant \mathbf{P}_n(\widehat{\mathbf{P}}_n \in \mathbf{P}_n + b_n \Omega_0). \qquad (2.13)$$

Отсюда аналог (2.12) мы можем записать в виде

$$\mathbf{P}_n\big(\widehat{\mathbf{P}}_n \in \mathbf{P}_n + b_n U\big) \leqslant \mathbf{P}_n\big(\widehat{\mathbf{P}}_{nD_0} - b_n \mathbf{H}_{nD_0} \in \mathbf{P}_{D_0} - b_n \mathbf{H}_{D_0} + b_n V_{D_0}\big), \quad (2.14)$$

и дальше рассуждения аналогичны.

**2.3. Доказательство нижней границы.** Существует $\delta_0 > 0$, такое что для любого $\delta, 0 < \delta < \delta_0$ найдется заряд $\mathbf{G} \in \operatorname{int}(\Omega_0) - \mathbf{H}$, для которого $\eta + \delta < \rho_0^2(\mathbf{G}) < \eta + 2\delta$. Пусть $W$ – окрестность $\mathbf{G}$, содержащаяся в $\operatorname{int}(\Omega_0) - \mathbf{H}$. Существуют функции $h_1, \dots, h_k$ и константы $c_1, \dots, c_k$, для которых окрестность $U(h_1, \dots, h_k, c_1, \dots, c_k)$ содержится в $W$. Не умаляя общности, мы можем предположить, что функции $h_1, \dots, h_k$ можно разбить на три подмножества $h_1, \dots, h_{k_1}$, $h_{k_1+1}, \dots, h_{k_2}$, $h_{k_2+1}, \dots, h_k$, такие же как при доказательстве верхней границы. Для $i, k_1 < i \leqslant k_2$ имеем

$$\mathbf{E}_n[h_i(X_1)] = b_n \int h_i \, d\mathbf{H}(1 + o(1)),$$

и

$$\mathbf{E}_n[h_i^2(X_1)] = b_n \int h_i^2 \, d\mathbf{H}(1 + o(1)).$$

Отсюда, применяя лемму 2.3, для любого $c > 0$ и для $i, k_1 + 1 \leqslant i \leqslant k_2$, имеем

$$\mathbf{P}_n\left((nb_n)^{-1} \sum_{s=1}^{n} \Big(h_i(X_s) - b_n \int h_i \, d\mathbf{H}\Big) > c\right) < \exp\{-cnb_n(1 + o(1))\}. \quad (2.15)$$

Поэтому в дальнейших рассуждениях доказательства нижней границе достаточно базироваться на функциях $h_1, \dots, h_{k_1}$, просто учитывая, что вклад в оцениваемую вероятность, вызванный функциями $h_{k_1+1}, \dots, h_{k_2}$, $h_{k_2+1}, \dots, h_k$ мал или вообще равен нулю. В то же время для функций $h_1, \dots, h_{k_1}$ оценка снизу проводится практически полностью аналогично доказательству оценки снизу в теореме 2.1, [9]. Единственное отличие, что при оценивании вероятностей умеренных уклонений сумм независимых случайных величин мы применяем лемму 2.3. Мы опустим эти рассуждения.

## Литература


1. M. A. Arcones, *Moderate deviations of empirical processes.* — Stochastic Inequalities and Applications, pp. 189–212, E. Giné, C. Houdré and D. Nualart eds. Birkhäuser Boston, 2003.
2. M. A. Arcones, Moderate deviations for M-estimators. — Test **11** (2002), 465–500.

3. А. А. Боровков, А. А. Могульский, *О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах* . II. — Сиб. Матем. журнал **21**, No. 5 (1980), 12–26.
4. E. Bolthausen, *On the probability of large deviations in Banach spaces.* — Ann. Probab. **12** (1984), 427–435.
5. A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Jones and Bartlett, Boston, 1993.
6. P. Eichelsbacher, U. Schmock, *Large deviations of $U$-empirical measures in strong topologies and applications.* — Ann. Inst. Henri Poincaré. Probab. Statist. **38** (2002), 779–797.
7. P. Eichelsbacher, M. Löwe, *Moderate deviations for i.i.d. random variables.* — ESAIM: Probab. Statist. **7** (2003), 207–216.
8. M. S. Ermakov, *Importance sampling for simulation of moderate deviation probabilities of statistics.* — Statist. Decision **25** (2007), 265-284.
9. М. С. Ермаков, *Принцип больших уклонений для вероятностей умеренных уклонений эмпирических бутстрап мер.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **412** (2013), 135–177.
10. М. С. Ермаков, *Асимптотически эффективные процедуры метода существенной выборки для бутстрапа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **431** (2014), 82–96.
11. F. Gao, X. Zhao, *Delta method in large deviations and moderate deviations for estimators.* — Ann. Statist. **39** (2011), 1211–1240.
12. A. W. van der Vaart, J. A. Wellner, *Weak Convergence and Empirical Processes with Applications to Statistics*, Springer, New York, 1996.
13. L. Wu, *Large deviations, moderate deviations and LIL for empirical processes.* — Ann. Probab. **22** (1994), 17–27.

Ermakov M. S. On moderate deviation probabilities of empirical probability measures for contiguous probability measures.

We study moderate deviation probabilities of empirical measures for contiguous distributions and prove large deviation principle for this setup.

Институт Проблем Машиноведения РАН
Большой пр., В.О., 61, 199178 С.-Петербург;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034 С.-Петербург;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
*E-mail*: erm2512@mail.ru

Поступило 21 октября 2016 г.