Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ДИФФУЗИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В работе рассматривается специальный класс диффузий с переключениями. Рассматривается два набора диффузионных коэффициентов, отвечающих двум классическим диффузиям. Переключения с одного набора диффузионных коэффициентов на другой наступают в случайные моменты времени, соответствующие моментам скачков процесса Пуассона, не зависящего от исходных диффузий. Таким образом, диффузия с переключениями начинается как классическая диффузия с первым набором диффузионных коэффициентов. Затем в показательно распределенный момент времени коэффициенты заменяются на коэффициенты из другого набора и уже в соответствии с этими коэффициентами происходит дальнейшее развитие диффузии. Через независимый показательно распределенный момент времени коэффициенты заменяются на исходные и так далее.

Нас интересуют результаты, позволяющие вычислять распределения различных функционалов от диффузии с переключениями. Для диффузий, в частности, для броуновского движения, основополагающее значение для развития теории распределений интегральных функционалов имеет работа М. Каца [1].

Можно рассматривать и более сложные диффузии с переключениями, когда выбор осуществляются из трех и более наборов диффузионных коэффициентов. Однако, общий подход к вычислению распределений функционалов от диффузии с переключениями, предложенный в настоящей работе не меняется, хотя приводит к некоторым усложнениям.

1. Диффузии с переключениями. Отвечающий за переключения процесс Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$, с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ может быть

Ключевые слова: диффузионные процессы, диффузии с переключениями, распределения функционалов.

Настоящая работа частично поддерживалась грантами РФФИ 16-01-00367 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

представлен в следующем виде:

$$N(t) := \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\}\mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_1),$$

где τ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(\tau_k < t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t).$$

Пусть $W(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс броуновского движения, не зависящий от процесса Пуассона N.

Пусть $\mu(l,x)$ и $\sigma(l,x)$, $x \in \mathbf{R}$, $l = 1, -1$, – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию ограниченности на линейный рост:

$$|\mu(l,x)| + |\sigma(l,x)| \leqslant C(1 + |x|) \qquad \text{для всех } x \in \mathbf{R}.$$

Предположим, что $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} \sigma(l,x) > 0$ и что производная $\left(\frac{\mu(l,x)}{\sigma^2(l,x)}\right)'$ ограничена.

При каждом $l = 1, -1$, рассмотрим однородный диффузионный процесс, являющийся решением следующего стохастического дифференциального уравнения: с вероятностью единица для любого $t \geqslant 0$

$$X_l(t) = x + \int_0^t \mu(l, X_l(u))\,du + \int_0^t \sigma(l, X_l(u))\,dW(u). \tag{1.1}$$

Однородный диффузионный процесс с переключениями является решением стохастического дифференциального уравнения

$$S_1(t) = x + \int_0^t \mu((-1)^{N(u)}, S_1(u))\,du + \int_0^t \sigma((-1)^{N(u)}, S_1(u))\,dW(u). \tag{1.2}$$

Поскольку пуассоновский процесс N не зависит от броуновского движения W, то вопрос о существовании и единственности сильного решения уравнения (1.2) решается в рамках классической теории стохастических дифференциальных уравнений (см., например, [2, теорема 7.1 гл. II]).

Наряду с процессом S_1 будем рассматривать процесс S_{-1}, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения

$$S_{-1}(t) = x + \int_0^t \mu((-1)^{N(u)+1}, S_{-1}(u))\, du$$

$$+ \int_0^t \sigma((-1)^{N(u)+1}, S_{-1}(u))\, dW(u). \tag{1.3}$$

Отличие этих процессов состоит в том, что первый начинает развиваться согласно диффузионным коэффициентам $\mu(1,x)$ и $\sigma(1,x)$, а второй – согласно $\mu(-1,x)$ и $\sigma(-1,x)$. После момента времени τ_1 эти процессы преобразуются друг в друга, хотя и со случайным начальным значением. На примере преобразования процесса S_1 после момента τ_1 в процесс S_{-1} это означает следующее. Существует такое семейство процессов $\{\widetilde{S}_x(s)\}_{x\in\mathbf{R}}$, $s \geqslant 0$, которое не зависит от σ-алгебры событий $\mathcal{G}_0^{\tau_1}$, порожденных процессом X_1 до момента остановки τ_1 (см. определение в [2] §4 гл. I), что при каждом x конечномерные распределения у $\widetilde{S}_x$ и диффузии S_{-1} совпадают и выполняется равенство

$$S_1(s+\tau_1) = \widetilde{S}_{X_1(\tau_1)}(s), \qquad s \geqslant 0. \tag{1.4}$$

При определении σ-алгебры $\mathcal{G}_0^{\tau_1}$ естественную фильтрацию $\mathcal{G}_0^t$ процесса X_1 нужно пополнить событиями, порожденными самой случайной величиной τ_1.

2. Распределение интегральных функционалов от диффузий с переключениями. Рассмотрим метод вычисления совместного распределения интегрального функционала

$$A(t) := \int_0^t f(S_1(s))\, ds, \quad f \geqslant 0,$$

и функционалов инфимума и супремума $\inf\limits_{0\leqslant s\leqslant t} S_1(s)$, $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} S_1(s)$.

Общий подход к вычислению распределений интегральных функционалов от броуновского движения был описан в [2 §1 гл. III]. Этот подход применим к широкому классу процессов, в частности к диффузиям с переключениями. Поэтому мы будем рассматривать лишь основные результаты, которые позволяют вычислять искомые совместные распределения в рамках этого общего подхода.

Пусть τ – не зависящий от процессов Пуассона $\{N(s),\ s \geqslant 0\}$ и броуновского движения $\{W(s),\ s \geqslant 0\}$ экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент.

Рассмотрение момента τ вместо t соответствует преобразованию Лапласа по времени t от распределения функционала от процесса заданного до момента t. Для того чтобы получить это распределение при t, следует обратить преобразование Лапласа по λ.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессам S_l, $l = 1, -1$, при условии $S_l(0) = x$. Для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi;\ A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi(x)$ и $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$ и Φ ограничена. Тогда функция*

$$Q(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(S_1(\tau)) \exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(S_1(s))\,ds\Big)\Big\} \tag{2.1}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q(x) = \widetilde{M}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_y(x)\, Q(y)\, dy, \tag{2.2}$$

где

$$\widetilde{M}(x) := M_1(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} M_{-1}(z) G_z^{(1)}(x)\, dz, \tag{2.3}$$

$$\widetilde{G}_y(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_y^{(-1)}(z) G_z^{(1)}(x)\, dz, \tag{2.4}$$

и при каждом $l = -1, 1$ функция $M_l(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(l,x)M''(x) + \mu(l,x)M'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(x))M(x) = -\lambda\Phi(x), \tag{2.5}$$

а $G_z^{(l)}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *является единственным непрерывным ограниченным решением задачи*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(l,x)G''(x) + \mu(l,x)G'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(x))G(x) = 0, \quad x \neq z, \tag{2.6}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1/\sigma^2(l,z). \tag{2.7}$$

Замечание 2.1 Для кусочно непрерывных функций f и Φ уравнение (2.5) надо понимать следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функций f и Φ, а в точках разрыва f и Φ его решение непрерывно вместе с первой производной. Аналогичное замечание касается всех уравнений с кусочно непрерывными коэффициентами.

Доказательство теоремы 2.1. Положим

$$M_l(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X_l(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau (\lambda_1 + f(X_l(s)))\,ds\Big)\Big\}. \tag{2.8}$$

Тогда M_l – единственное ограниченное решение уравнения (2.5) (см. [2] гл. IV, теорема 4.2, $a = -\infty$, $b = \infty$).

Положим

$$G_z^{(l)}(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^{\tau_1}(\lambda + f(X_l(s)))\,ds\Big); X_l(\tau_1) < z\Big\}. \tag{2.9}$$

Эта функция – решение задачи (2.6), (2.7) (см. [2], гл. IV, теорема 6.2, $a = -\infty$, $b = \infty$).

Для всех x имеем оценку

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\,dz = \mathbf{E}_x\exp\Big(-\int_0^{\tau_1}(\lambda + f(X_l(s)))\,ds\Big)$$

$$\leqslant \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1} =: q < 1.$$

Отсюда следует, что

$$|\widetilde{M}(x)| \leqslant |M_1(x)| + \sup_{x\in\mathbf{R}}|M_{-1}(x)|\int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(1)}(x)\,dz$$

$$\leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}}|M_1(x)| + q\sup_{x\in\mathbf{R}}|M_{-1}(x)|, \tag{2.10}$$

и, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_y(x)\,dy \leqslant q \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(1)}(x)\,dz \leqslant q^2.$$

Докажем, что уравнение (2.2) имеет единственное ограниченное решение. Применим метод последовательных приближений. Положим $Q_0(x) := \widetilde{M}(x)$ и

$$Q_n(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_y(x)\,Q_{n-1}(y)\,dy.$$

Тогда

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |Q_n(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}} |Q_{n-1}(x)| \sup_{x\in\mathbf{R}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_y(x)\,dy$$

$$\leqslant q^2 \sup_{x\in\mathbf{R}} |Q_{n-1}(x)| \leqslant q^{2n} \sup_{x\in\mathbf{R}} |\widetilde{M}(x)|.$$

Поэтому ряд $Q(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n(x)$ сходится равномерно по x и

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |Q(x)| \leqslant \frac{1}{1-q^2} \sup_{x\in\mathbf{R}} |\widetilde{M}(x)|. \tag{2.11}$$

Ясно, что

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k(x) = \widetilde{M}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_y(x) \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(y)\,dy.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, получаем, что функция Q – решение уравнения (2.2). Для $\widetilde{M} \equiv 0$ имеем

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |Q(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}} |Q(x)|\,q^2.$$

Поскольку $q < 1$, это влечет $Q \equiv 0$, если Q – ограниченная функция. Поэтому уравнение (2.2) имеет единственное ограниченное решение.

Из этого доказательства также следует, что для неотрицательных $\widetilde{M}$ и $\widetilde{G}_z$, решение уравнения (2.2) неотрицательно.

Для доказательства того, что Q является решением уравнения (2.2), достаточно доказать, что функция Q удовлетворяет соотношению

$$Q(x) = M_1(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(1)}(x)\,\widetilde{Q}(z)\,dz, \tag{2.12}$$

где

$$\widetilde{Q}(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(S_{-1}(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau} f(S_{-1}(s))\,ds\Big)\Big\}. \tag{2.13}$$

Действительно, функция $\widetilde{Q}$ определяется аналогично Q только по начальной диффузии с коэффициентам $\mu(-1,x)$ и $\sigma(-1,x)$ вместо $\mu(1,x)$ и $\sigma(1,x)$. Поэтому для $\widetilde{Q}$ будет справедлив следующий аналог (2.12)

$$\widetilde{Q}(x) = M_{-1}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(-1)}(x)\,Q(z)\,dz, \tag{2.14}$$

Теперь, подставляя (2.14) в правую часть (2.12), получаем

$$Q(x) = M_1(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(1)}(x)\,M_{-1}(z)\,dz$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(1)}(x)G_y^{(-1)}(z)\,dz\,Q(y)\,dy.$$

Это и есть уравнение (2.2). Докажем (2.12). Имеем

$$Q(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X_1(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau} f(X_1(s))\,ds\Big); \tau < \tau_1\Big\}$$

$$+\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(S_1(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1} f(X_1(s))\,ds - \int\limits_{\tau_1}^{\tau} f(S_1(s))\,ds\Big); \tau_1 \leqslant \tau\Big\}$$

$$=: V_1(x) + V_2(x), \tag{2.15}$$

где $V_1(x)$ и $V_2(x)$ – соответственно первое и второе слагаемые. Поскольку τ_1 не зависит от τ и процесса X_1, то справедлива формула

$$\mathbf{P}\big(\tau < \tau_1 \big| \sigma(X_1(\,\cdot\,),\tau)\big) = e^{-\lambda_1\tau},$$

где $\sigma(X_1(\,\cdot\,),\tau)$ – σ-алгебра событий, порожденная процессом X_1 и моментом τ. Тогда, применяя теорему Фубини, и сначала вычисляя математическое ожидание по τ_1, а затем по процессу X_1 и моменту τ, получим, что

$$V_1(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X_1(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau}(\lambda_1 + f(X_1(s)))\,ds\Big)\Big\} = M_1(x). \quad (2.16)$$

Для того чтобы преобразовать второе слагаемое $V_2(x)$, воспользуемся независимостью момента τ от процесса S_1 и момента τ_1. По теореме Фубини имеем

$$V_2(x) = \lambda\mathbf{E}_x\int\limits_{\tau_1}^{\infty} e^{-\lambda t}\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1} f(X_1(s))\,ds\Big)$$

$$\times\Phi(S_1(t))\exp\Big(-\int\limits_{\tau_1}^{t} f(S_1(s))\,ds\Big)dt.$$

Воспользуемся представлением (1.4) и в выражении для $V_2(x)$ сделаем замену переменной $t = u + \tau_1$. Тогда

$$V_2(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1}(\lambda + f(X_1(s)))\,ds\Big)$$

$$\times\lambda\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda u}\Phi(\widetilde{S}_{X_1(\tau_1)}(u))\exp\Big(-\int\limits_0^{u} f(\widetilde{S}_{X_1(\tau_1)}(v))\,dv\Big)du\Big\}.$$

По теореме Фубини интеграл по параметру u с весом $\lambda\,e^{-\lambda u}$ можно заменить на подынтегральное выражение с $\widetilde{\tau}$ вместо u, где $\widetilde{\tau}$ – экспоненциально распределенная с параметром λ случайная величина, не зависящая от других процессов и величин. Тем самым, для $V_2(x)$ получим следующее выражение:

$$V_2(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1}(\lambda + f(X_1(s)))\,ds\Big)$$

$$\times\mathbf{E}\Big\{\Phi(\widetilde{S}_{X_1(\tau_1)}(\widetilde{\tau}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\widetilde{\tau}} f(\widetilde{S}_{X_1(\tau_1)}(s))ds\Big)\Big|\mathcal{G}_0^{\tau_1}\Big\}\Big\}.$$

Применяя лемму 2.1 гл. I из [2], получим

$$V_2(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1}(\lambda + f(X_1(s)))\,ds\Big)\widetilde{Q}(X_1(\tau_1))\Big\}.$$

Это выражение преобразуется к следующему виду:

$$V_2(x) == \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1}(\lambda + f(X_1(s)))\,ds\Big); X_1(\tau_1)\in dz\Big\}\widetilde{Q}(z)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(1)}(x)\,\widetilde{Q}(z)\,dz.$$

Теперь из (2.15) и (2.16) следует (2.12). □

Сформулируем результат, позволяющий вычислять совместное распределение интегрального функционала от диффузии с переключениями и функционалов инфимума и супремума. Доказательство этого результата аналогично приведенному при доказательстве теоремы 2.1, нужно только воспользоваться теоремами 4.2 и 6.2 гл. IV из [2] при $a \neq -\infty$ либо $b \neq \infty$.

Теорема 2.2. *Пусть $\Phi(x)$ и $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$ и Φ ограничена, когда либо $a = -\infty$, либо $b = \infty$. Тогда функция*

$$Q(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(S_1(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau} f(S_1(s))\,ds\Big);$$

$$a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} S_1(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} S_1(s) \leqslant b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения (2.2), *для которого выполняются* (2.3), (2.4), *и при каждом $l = -1, 1$ функция $M_l(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением уравнения* (2.5) *с граничными условиями*

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 0, \tag{2.17}$$

а при $z \in [a,b]$ *функция* $G_z^{(l)}(x)$, $x \in [a,b]$, *является единственным непрерывным решением задачи* (2.6), (2.7), *дополненной граничными условиями*

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{2.18}$$

Полагаем $M_l(x) = 0$, $G_z^{(l)}(x) = 0$ *при* $x, z \notin (a,b)$.

Пример 2.1. Вычислим характеристическую функцию броуновского движения с переключающейся дисперсией. Этот процесс имеет следующий вид:

$$S_\sigma(t) := x + 2\int_0^t \sigma_{(-1)^{N(s)}}\, dW(s), \tag{2.19}$$

где σ_1, σ_{-1} – два произвольных коэффициента.

Вычислим $\mathbf{E}_x e^{i\rho S_\sigma(t)}$, $\rho \in \mathbf{R}$, $t \geqslant 0$. Здесь, как и ранее, $x \in \mathbf{R}$ обозначает начальное состояние процесса. В силу (2.19),

$$\mathbf{E}_x e^{i\rho S_\sigma(t)} = e^{i\rho x}\mathbf{E}_0 e^{i\rho S_\sigma(t)}. \tag{2.20}$$

Сначала вычислим характеристическую функцию значения процесса в случайный момент τ, т.е. величину $Q(x) := \mathbf{E}_x e^{i\rho S_\sigma(\tau)}$, $\lambda > 0$, а затем обратим преобразование Лапласа по λ. Для вычисления $Q(x)$ применим теорему 2.1 при $\Phi(x) = e^{i\rho x}$, $f(x) \equiv 0$ и $\sigma(l,x) = 2\sigma_l$, $\mu(x) \equiv 0$. В данном случае ограниченное решение уравнения (2.5) имеет вид

$$M_l(x) = \frac{\lambda e^{i\rho x}}{\lambda + \lambda_1 + 2\sigma_l^2\rho^2}. \tag{2.21}$$

Ограниченное непрерывное решение задачи (2.6), (2.7) имеет вид

$$G_z^{(l)}(x) = \frac{\lambda_1}{2\sigma_l\sqrt{2\lambda + 2\lambda_1}} e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}/2\sigma_l}. \tag{2.22}$$

Ясно, что $G_z^{(l)}(x) = G_0^{(l)}(x-z)$. Нам понадобится следующее легко проверяемое равенство: при $\delta > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho x}\frac{1}{\sigma\sqrt{\delta}} e^{-|x-z|\sqrt{\delta}/\sigma}\, dx = \frac{2e^{i\rho z}}{\delta + \rho^2\sigma^2}. \tag{2.23}$$

Нетрудно убедится, что

$$\widetilde{M}(x) = \frac{\lambda e^{i\rho x}}{\lambda + \lambda_1 + 2\sigma_1^2\rho^2}\Big\{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1 + 2\sigma_{-1}^2\rho^2}\Big\}.$$

Поскольку преобразование Фурье свертки функций равно произведению преобразований Фурье, то с учетом (2.23) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho y}\widetilde{G}_y(x)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0^{(-1)}(z-y)G_0^{(1)}(x-z)\,dz\,dy$$

$$= \frac{\lambda_1^2 e^{i\rho x}}{(\lambda+\lambda_1+2\sigma_1^2\rho^2)(\lambda+\lambda_1+2\sigma_{-1}^2\rho^2)}.$$

Обозначим

$$Q := \mathbf{E}_0 e^{i\rho S_\sigma(\tau)}. \tag{2.24}$$

Тогда, в силу (2.20), $Q(x) = e^{i\rho x}Q$. В результате уравнение (2.2) преобразуется к следующему виду:

$$e^{i\rho x}Q = \frac{\lambda e^{i\rho x}}{\lambda+\lambda_1+2\sigma_1^2\rho^2}\Big\{1+\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+2\sigma_{-1}^2\rho^2}\Big\}$$

$$+\frac{\lambda_1^2 e^{i\rho x}Q}{(\lambda+\lambda_1+2\sigma_1^2\rho^2)(\lambda+\lambda_1+2\sigma_{-1}^2\rho^2)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\lambda}Q = \frac{\lambda+2\lambda_1+2\sigma_{-1}^2\rho^2}{\lambda^2+2\lambda(\lambda_1+\rho^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2))+2\lambda_1\rho^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2)+4\rho^4\sigma_1^2\sigma_{-1}^2}.$$

Обозначим

$$r_1 = \lambda_1+\rho^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2) - \sqrt{\lambda_1^2+\rho^4(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)^2},$$

$$r_2 = \lambda_1+\rho^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2) + \sqrt{\lambda_1^2+\rho^4(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)^2}.$$

Тогда с учетом (2.24) имеем

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_0 e^{i\rho S_\sigma(\tau)} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda_1-\rho^2(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)}{2\sqrt{\lambda_1^2+\rho^4(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)^2}}\right)\frac{1}{\lambda+r_1}$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda_1-\rho^2(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)}{2\sqrt{\lambda_1^2+\rho^4(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)^2}}\right)\frac{1}{\lambda+r_2}.$$

Обращая преобразование Лапласа по λ, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_0 e^{i\rho S_\sigma(t)} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 - \rho^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)}{2\sqrt{\lambda_1^2 + \rho^4(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2}}\right) e^{-t(\lambda_1 + \rho^2(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2) - \sqrt{\lambda_1^2 + \rho^4(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2})} \\
&+ \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_1 - \rho^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)}{2\sqrt{\lambda_1^2 + \rho^4(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2}}\right) e^{-t(\lambda_1 + \rho^2(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2) + \sqrt{\lambda_1^2 + \rho^4(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2})}.
\end{aligned}$$

Отметим, что при $\sigma_1 = \sigma_{-1}$ или при $\lambda_1 \to 0$ процесс $S_\sigma(t)$ превращается в $2\sigma_1 W(t)$.

Поскольку характеристическая функция величины $S_\sigma(t)$ зависит от ρ^2, то у этой величины математическое ожидание и все нечетные моменты равны нулю. Нетрудно вычислить, что

$$\mathbf{E}_0 S_\sigma^2(t) = 2t(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2) + (\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)\frac{(1 - e^{-2\lambda_1 t})}{\lambda_1}, \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_0 S_\sigma^4(t) &= 12t^2(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2)^2 + \frac{12t}{\lambda_1}(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2 \\
&\quad - 12\frac{(1 - e^{-2\lambda_1 t})}{\lambda_1}\Big(\frac{(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)^2}{2\lambda_1} - t(\sigma_1^4 - \sigma_{-1}^4)\Big).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

3. Совместное распределение интегрального функционала от диффузии с переключениями и положения диффузии в конечный момент времени. Основополагающим для вычисления совместных распределений интегральных функционалов от диффузии с переключениями и положения диффузии в конечный момент времени является следующий результат (см. [2] гл. III § 4).

Теорема 3.1. *Пусть $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – кусочно непрерывная неотрицательная функция. Тогда функция*

$$Q_y(x) := \frac{d}{dy}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^\tau f(S_1(s))\,ds\Big); S_1(\tau) < y\Big\} \tag{3.1}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q_y(x) = \frac{\lambda}{\lambda_1}G_y^{(1)}(x) + \frac{\lambda}{\lambda_1}\widetilde{G}_y(x) + \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{G}_v(x)\,Q_y(v)\,dv, \tag{3.2}$$

где функция $\widetilde{G}_y(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *определена в* (2.4), *и* $G_y^{(1)}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *является единственным непрерывным ограниченным решением задачи* (2.6), (2.7) *при* $l = 1$.

Доказательство. Сначала отметим, что уравнение (3.2) как и уравнение (2.2) имеет единственное ограниченное решение.

Далее перейдем к выводу этого уравнения. Воспользуемся теоремой 2.1. Положим

$$Q_\Delta(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\frac{\mathbb{1}_{[y,y+\Delta)}(S_1(\tau))}{\Delta}\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(S_1(s))\,ds\Big)\Big\}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

При $\Delta < 0$ считаем, что $\mathbb{1}_{[y,y+\Delta)}(x) := -\mathbb{1}_{[y+\Delta,y)}(x)$. Докажем, что $Q_\Delta(x)$ сходится при $\Delta \to 0$ к некоторому пределу $Q_y(x)$, который будет иметь вид (3.1).

По теореме 2.1 функция $Q_\Delta(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q_\Delta(x) = \widetilde{M}_\Delta(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_y(x)\,\mathbf{E}Q_\Delta(y)\,dy,$$

где

$$\widetilde{M}_\Delta(x) := M_{1,\Delta}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} M_{-1,\Delta}(z)G_z^{(1)}(x)\,dz,$$

и

$$M_{l,\Delta}(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\frac{\mathbb{1}_{[y,y+\Delta)}(X_l(\tau))}{\Delta}\exp\Big(-\int\limits_0^\tau(\lambda_1 + f(X_l(s)))\,ds\Big)\Big\}.$$

Согласно (2.10)

$$|\widetilde{M}_\Delta(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}}|M_{1,\Delta}(x)| + q\sup_{x\in\mathbf{R}}|M_{-1,\Delta}(x)|. \tag{3.3}$$

Из формулы (6.19) гл. IV из [2] при $a = -\infty$, $b = \infty$ следует равенство:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x\big(X_l(\tau) < z\big) = \frac{2\lambda}{w_l(z)\sigma^2(l,z)}\varphi_l(z)\psi_l(z),$$

где $\psi_l(x)$ – возрастающее, а $\varphi_l(x)$ – убывающее решения уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(l,x)\phi''(x) + \mu(l,x)\phi'(x) - \lambda\phi(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Функция $w_l(z) = \psi_l'(z)\varphi_l(z) - \psi_l(z)\varphi_l'(z) > 0$ – вронскиан этих решений.

Поэтому при $|\Delta| < 1$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |M_{l,\Delta}(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}} \sup_{y<z<y+\Delta} \frac{d}{dz}\mathbf{P}_x\big(X_l(\tau) < z\big) \leqslant K_y^{(l)}$$

для некоторой константы $K_y^{(l)}$. Теперь из (3.3) следует, что

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |\widetilde{M}(x)| \leqslant K_y^{(1)} + K_y^{(-1)}.$$

Согласно (2.11),

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |Q_\Delta(x)| \leqslant \frac{1}{1-q^2} \sup_{x\in\mathbf{R}} |\widetilde{M}_\Delta(x)| \leqslant \frac{1}{1-q^2}(K_y^{(1)} + K_y^{(-1)}). \tag{3.4}$$

Воспользуемся вытекающими из (2.12), (2.14) равенствами

$$Q_\Delta(x) = M_{1,\Delta}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(1)}(x)\, \widetilde{Q}_\Delta(z)\, dz, \tag{3.5}$$

и

$$\widetilde{Q}_\Delta(x) = M_{-1,\Delta}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(-1)}(x)\, Q_\Delta(z)\, dz, \tag{3.6}$$

где

$$\widetilde{Q}_\Delta(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\frac{\mathbb{1}_{[y,y+\Delta)}(S_{-1}(\tau))}{\Delta} \exp\Big(-\int_0^\tau f(S_{-1}(s))\, ds\Big)\Big\}.$$

Заметим, что для функции $\widetilde{Q}_\Delta$ тоже верна оценка (3.4).

Поскольку $M_{1,\Delta}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является решением уравнения (2.5) при $l = 1$ и $\Phi(x) = \frac{1}{\Delta}\mathbb{1}_{[y,y+\Delta)}(x)$, а $G_z^{(1)}(x)$ является (см. задачу (2.6), (2.7)) функцией Грина соответствующего уравнения, то интегральное уравнение (3.5) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma^2(1,x)Q_\Delta''(x) + \mu(1,x)Q_\Delta'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(x))Q_\Delta(x)\\ = -\frac{\lambda}{\Delta}\mathbb{1}_{[y,y+\Delta)}(x) - \lambda_1\widetilde{Q}_\Delta(x).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Делая в (3.7) замену $V_\Delta(x) = \exp\Big(\int\limits_0^x \frac{\mu(1,u)}{\sigma^2(1,u)}du\Big)Q_\Delta(x)$, получаем

$$V''_\Delta(x) = \left\{\frac{2(\lambda+\lambda_1+f(x))}{\sigma^2(1,x)} + \left(\frac{\mu(1,x)}{\sigma^2(1,x)}\right)^2 + \left(\frac{\mu(1,x)}{\sigma^2(1,x)}\right)'\right\}V_\Delta(x)$$
$$- \frac{2}{\sigma^2(1,x)}\exp\left(\int\limits_0^x \frac{\mu(1,u)}{\sigma^2(1,u)}du\right)\left(\frac{\lambda}{\Delta}\mathbb{1}_{[y,y+\Delta)}(x) + \lambda_1\widetilde{Q}_\Delta(x)\right).$$

Обозначим $R_\Delta(x)$ правую часть этого равенства. Интегрируя это равенство, получаем

$$V'_\Delta(x_2) - V'_\Delta(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} R_\Delta(x)\,dx. \tag{3.8}$$

Интегрируя (3.8) по x_2 внутри интервала (x_1, x_3), получаем

$$V_\Delta(x_3) - V_\Delta(x_1) - V'_\Delta(x_1)(x_3 - x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_3} dx_2 \int\limits_{x_1}^{x_2} R_\Delta(x)\,dx. \tag{3.9}$$

В силу (3.4) семейство функций $\{V_\Delta(x)\}_{\Delta\neq 0}$ является равномерно ограниченным на любом конечном интервале. Аналогично равномерно ограниченным является на любом конечном интервале и интеграл в правой части (3.8). Выбирая в (3.9) $x_3 = x_1 + 1$, легко вывести, что семейство $\{V'_\Delta(x)\}_{\Delta\neq 0}$ является равномерно ограниченным на любом конечном интервале. Из (3.9) вытекает, что семейство функций $\{V_\Delta(x)\}_{\Delta\neq 0}$ равностепенно непрерывно на любом интервале $[a,b]$. В результате, по теореме Арцела–Асколи, семейство функций $\{V_\Delta(x)\}_{\Delta\neq 0}$, заданное на $[a,b]$, является относительно компактным. Отсюда следует, что из любой последовательности Δ_n, стремящейся к нулю, можно извлечь такую подпоследовательность Δ_{n_k}, что $V_{\Delta_{n_k}}(x)$ на $[a,b]$ равномерно сходится к некоторой функции $V_y(x)$. Следовательно $Q_{\Delta_{n_k}}(x)$ на $[a,b]$ равномерно сходится к функции $Q_y(x) = \exp\Big(-\int\limits_0^x \frac{\mu(1,u)}{\sigma^2(1,u)}du\Big)V_y(x)$. Аналогично из любой последовательности Δ_n, стремящейся к нулю, можно извлечь такую подпоследовательность Δ'_{n_k}, что $\widetilde{Q}_{\Delta'_{n_k}}(x)$ на

$[a,b]$ равномерно сходится к некоторой функции $\widetilde{Q}_y(x)$. Действительно, процесс S_{-1} отличается от процесса S_1 только начальной диффузией. Кроме того, $M_{l,\Delta}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, сходится при $\Delta \to 0$ к функции

$$\widetilde{G}_y^{(l)}(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau (\lambda_1 + f(X_l(s)))\,ds\Big); X_l(\tau) < y\Big\},$$

что следует из доказательства теоремы 6.1 гл. IV из [2]. Очевидно, что $\widetilde{G}_y^{(l)}(x) = \frac{\lambda}{\lambda_1}G_y^{(l)}(x)$, где $G_y^{(l)}(x)$ определена в (2.9). Убедиться в этом можно подставив вместо моментов τ и τ_1 соответствующие преобразования Лапласа.

В результате, выбрав достаточно редкую подпоследовательность, мы можем в (3.5) и (3.6) перейти к пределу, что приводит к равенствам

$$Q_y(x) = \frac{\lambda}{\lambda_1}G_y^{(1)}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(1)}(x)\,\widetilde{Q}_y(z)\,dz, \tag{3.10}$$

и

$$\widetilde{Q}_y(x) = \frac{\lambda}{\lambda_1}G_y^{(-1)}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(-1)}(x)\,Q_y(z)\,dz. \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в правую часть (3.10), получим уравнение (3.2), которое имеет единственное ограниченное решение. Поскольку предельная функция не зависит от выбора подпоследовательности, то $Q_\Delta(x)$ при $\Delta \to 0$ равномерно сходится на любом конечном интервале $[a,b]$ к функции $Q_y(x)$, которая согласно определению производной будет иметь вид (3.1). Теорема доказана. □

Пример 3.1. Рассмотрим броуновское движение с переключающимся знаком линейного сноса. Этот процесс имеет следующий вид:

$$S_\mu(t) := x + \mu\int\limits_0^t (-1)^{N(s)}\,ds + W(t), \qquad W(0) = 0. \tag{3.12}$$

Вычислим сначала плотность случайной величины $S_\mu(\tau)$:

$$Q_y(x) := \frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(S_\mu(\tau) < y\big) = \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(S_\mu(t) < y\big)\,dt.$$

Затем, обратив преобразование Лапласа по $\lambda > 0$ в полученном выражении, вычислим переходную плотность процесса $S_\mu(t)$, $t \geqslant 0$. Кроме того, вычислим и характеристическую функцию величины $S_\mu(t)$.

Согласно формуле 2.1.0.5 из [3] при $l = 1, -1$

$$G_z^{(l)}(x) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2\lambda + 2\lambda_1 + \mu^2}} e^{-l\mu(x-z)} e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}}. \tag{3.13}$$

Ясно, что $G_z^{(l)}(x) = G_0^{(l)}(x - z)$. Нам понадобится следующее легко проверяемое равенство: при $\rho \geqslant 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\rho + \mu^2}} e^{i\gamma x} e^{-l\mu(x-z)-|x-z|\sqrt{2\rho+\mu^2}}\, dx = \frac{2e^{i\gamma z}}{2\rho + \gamma^2 + 2il\gamma\mu}. \tag{3.14}$$

Используя эту формулу и (3.13), для преобразования Фурье функции $G_z^{(l)}(x)$ получим следующее выражение:

$$\widehat{G}_z^{(l)}(\gamma) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x} G_z^{(l)}(x)\, dx = \frac{2\lambda_1 e^{i\gamma z}}{2\lambda + 2\lambda_1 + \gamma^2 + 2il\gamma\mu}.$$

Применяя к (2.4) преобразование Фурье и используя тот факт, что преобразование Фурье свертки равно произведению преобразований Фурье, получаем

$$\widehat{\widetilde{G}}_y(\gamma) = \widehat{G}_y^{(-1)}(\gamma)\widehat{G}_0^{(1)}(\gamma) = \frac{4\lambda_1^2\, e^{i\gamma y}}{(2\lambda + 2\lambda_1 + \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\mu^2}.$$

Положим

$$\widehat{Q}_y(\gamma) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x} Q_y(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x} \frac{d}{dy} \mathbf{P}_x\big(S_\mu(\tau) < y\big)\, dx.$$

Применение преобразования Фурье к уравнению (3.2) дает

$$\widehat{Q}_y(\gamma) = \frac{\lambda}{\lambda_1}\widehat{G}_y^{(1)}(\gamma) + \frac{\lambda}{\lambda_1}\widehat{\widetilde{G}}_y(\gamma) + \widehat{\widetilde{G}}_0(\gamma)\widehat{Q}_y(\gamma).$$

В итоге получаем следующее уравнение для $\widehat{Q}_y(\gamma)$:

$$\widehat{Q}_y(\gamma) = \frac{2\lambda\, e^{i\gamma y}}{2\lambda + 2\lambda_1 + \gamma^2 + 2i\gamma\mu} + \frac{4\lambda_1\lambda\, e^{i\gamma y}}{(2\lambda + 2\lambda_1 + \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\mu^2} + \frac{4\lambda_1^2}{(2\lambda + 2\lambda_1 + \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\mu^2}\widehat{Q}_y(\gamma),$$

или

$$\widehat{Q}_y(\gamma) = \frac{2\lambda\, e^{i\gamma y}(2\lambda + 4\lambda_1 + \gamma^2 - 2i\gamma\mu)}{(2\lambda + 2\lambda_1 + \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\mu^2} + \frac{4\lambda_1^2}{(2\lambda + 2\lambda_1 + \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\mu^2}\widehat{Q}_y(\gamma).$$

Решение, очевидно, имеет вид

$$\widehat{Q}_y(\gamma) = \frac{2\lambda\, e^{i\gamma y}(2\lambda + \gamma^2 + 4\lambda_1 - 2i\gamma\mu)}{(2\lambda + \gamma^2)^2 + 4\lambda_1(2\lambda + \gamma^2) + 4\gamma^2\mu^2} \tag{3.15}$$

или

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_y(\gamma) = {} & \frac{\lambda\, e^{i\gamma y}(2\lambda + 4\lambda_1 - \rho_1^2)}{(\rho_2^2 - \rho_1^2)(\gamma^2 + \rho_1^2)} + \frac{\lambda\, e^{i\gamma y}(\rho_2^2 - 2\lambda - 4\lambda_1)}{(\rho_2^2 - \rho_1^2)(\gamma^2 + \rho_2^2)} \\ & - \frac{4i\lambda\gamma\mu\, e^{i\gamma y}}{(\rho_2^2 - \rho_1^2)}\Big(\frac{1}{\gamma^2 + \rho_1^2} - \frac{1}{\gamma^2 + \rho_2^2}\Big),\end{aligned} \tag{3.16}$$

где

$$\rho_1 := \sqrt{2}\Big(\lambda + \lambda_1 + \mu^2 - \sqrt{2\lambda\mu^2 + (\lambda_1 + \mu^2)^2}\Big)^{1/2}, \tag{3.17}$$

$$\rho_2 := \sqrt{2}\Big(\lambda + \lambda_1 + \mu^2 + \sqrt{2\lambda\mu^2 + (\lambda_1 + \mu^2)^2}\Big)^{1/2}, \tag{3.18}$$

Очевидно, что $\rho_2 \geqslant \sqrt{2\lambda + 4\lambda_1} \geqslant \rho_1 \geqslant 0$.

Используя формулы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x}\frac{1}{2\rho}e^{-|y-x|\rho}\,dx = \frac{e^{i\gamma y}}{\gamma^2 + \rho^2},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x}\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x-y)e^{-|y-x|\rho}\,dx = \frac{i\gamma\, e^{i\gamma y}}{\gamma^2 + \rho^2},$$

и обращая в (3.16) преобразование Фурье по γ, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(S_\mu(\tau) < y\big) \\ &\quad = \frac{\lambda(2\lambda + 4\lambda_1 - \rho_1^2)}{(\rho_2^2 - \rho_1^2)\rho_1}e^{-|y-x|\rho_1} + \frac{\lambda(\rho_2^2 - 2\lambda - 4\lambda_1)}{(\rho_2^2 - \rho_1^2)\rho_2}e^{-|y-x|\rho_2} \\ &\qquad + \frac{2\lambda\mu\operatorname{sign}(y-x)}{(\rho_2^2 - \rho_1^2)}\big(e^{-|y-x|\rho_1} - e^{-|x-y|\rho_2}\big).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Обратим в этом выражении преобразование Лапласа по λ, т.е. вычислим

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(S_\mu(t)<y\big)=\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(S_\mu(\tau)<y\big)\Big),$$

где $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ – оператор обратного преобразования Лапласа по $\lambda>0$.

Удобно ввести следующие обозначения: $\widetilde{\lambda}:=\lambda+(\mu+\lambda_1/\mu)^2/2$, $\gamma:=\sqrt{\widetilde{\lambda}}$, $\Delta:=(y-x)\sqrt{2}$, $\alpha:=\lambda_1/(|\mu|\sqrt{2})$, $\widetilde{\mu}:=\mu/\sqrt{2}$. Тогда

$$\begin{aligned}R(\gamma)&:=\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(S_\mu(\tau)<y\big)\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{(\gamma-|\widetilde{\mu}|)^2-\alpha^2}}+\frac{\alpha-|\widetilde{\mu}|}{\gamma\sqrt{(\gamma-|\widetilde{\mu}|)^2-\alpha^2}}+\frac{\operatorname{sign}(\mu\Delta)}{\gamma}\right)e^{-|\Delta|\sqrt{(\gamma-|\widetilde{\mu}|)^2-\alpha^2}}\\&+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{(\gamma+|\widetilde{\mu}|)^2-\alpha^2}}-\frac{\alpha-|\widetilde{\mu}|}{\gamma\sqrt{(\gamma+|\widetilde{\mu}|)^2-\alpha^2}}-\frac{\operatorname{sign}(\mu\Delta)}{\gamma}\right)e^{-|\Delta|\sqrt{(\gamma+|\widetilde{\mu}|)^2-\alpha^2}}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Воспользуемся следующими формулами обращения преобразования Лапласа (см. [4]). Пусть

$$F(\lambda):=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)\,dt,\qquad \lambda\geqslant\sigma>0.$$

Тогда

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1}\big(F(\lambda+\beta)\big)=e^{-\beta t}f(t),\tag{3.21}$$

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{F(\lambda)}{\lambda}\Big)=\int_0^t f(v)\,dv,\tag{3.22}$$

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1}\big(F(\sqrt{\lambda})\big)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}\int_0^\infty ve^{-v^2/4t}f(v)\,dv.\tag{3.23}$$

Нам понадобятся некоторые частные формулы. Справедливо

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{e^{-|\Delta|\sqrt{(\lambda\mp|\widetilde{\mu}|)^2-\alpha^2}}}{\sqrt{(\lambda\mp|\widetilde{\mu}|)^2-\alpha^2}}\Big)=e^{\pm|\widetilde{\mu}|t}I_0\big(\alpha\sqrt{t^2-\Delta^2}\big)\,\mathbb{1}_{[|\Delta|,\infty)}(t).$$

Применяя к этой формуле (3.22) имеем

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{e^{-|\Delta|\sqrt{(\lambda\mp|\widetilde{\mu}|)^2-\alpha^2}}}{\lambda\sqrt{(\lambda\mp|\widetilde{\mu}|)^2-\alpha^2}}\Big)=\int\limits_{|\Delta|}^{t}e^{\pm|\widetilde{\mu}|u}I_0\big(\alpha\sqrt{u^2-\Delta^2}\big)\,du\,\mathbb{1}_{[|\Delta|,\infty)}(t).$$

Из этой формулы дифференцированием по параметру $|\Delta|$ получается формула

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-|\Delta|\sqrt{(\lambda\mp|\widetilde{\mu}|)^2-\alpha^2}}\right)$$
$$=e^{\pm|\widetilde{\mu}||\Delta|}\mathbb{1}_{[|\Delta|,\infty)}(t)+\alpha|\Delta|\int\limits_{|\Delta|}^{t}e^{\pm|\widetilde{\mu}|u}\frac{I_1\big(\alpha\sqrt{u^2-\Delta^2}\big)}{\sqrt{u^2-\Delta^2}}\,du\,\mathbb{1}_{[|\Delta|,\infty)}(t),$$

где $I_k(x)$ – модифицированные функции Бесселя.
Заменяя в (3.19) обратное преобразование Лапласа по λ на преобразование по $\widetilde{\lambda}$, мы получаем согласно (3.21) множитель $e^{-(\mu+\lambda_1/\mu)^2t/2}$. Затем воспользуемся формулой (3.23), что позволит нам перейти к преобразованию по γ. В результате получим

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(S_\mu(t)<y\big)=\frac{e^{-(\mu+\lambda_1/\mu)^2t/2}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}\int\limits_0^\infty ve^{-v^2/4t}\mathcal{L}_\gamma^{-1}(R(\gamma))\big|_v\,dv$$
$$=\frac{e^{-(\mu+\lambda_1/\mu)^2t/2}}{2\sqrt{2\pi}t^{3/2}}\int\limits_{|\Delta|}^\infty ve^{-v^2/4t}\Big[\operatorname{ch}(\widetilde{\mu}v)I_0\big(\alpha\sqrt{v^2-\Delta^2}\big)+\operatorname{sh}(\widetilde{\mu}\Delta)$$
$$+(\alpha-|\widetilde{\mu}|)\int\limits_{|\Delta|}^{v}\operatorname{sh}(|\widetilde{\mu}|u)I_0\big(\alpha\sqrt{u^2-\Delta^2}\big)\,du$$
$$+\alpha\Delta\int\limits_{|\Delta|}^{v}\operatorname{sh}(\widetilde{\mu}u)\frac{I_1\big(\alpha\sqrt{u^2-\Delta^2}\big)}{\sqrt{u^2-\Delta^2}}du\Big]dv.$$

Меняя в этой формуле порядок интегрирования, окончательно получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(S_\mu(t)<y\big) = \frac{e^{-(\mu+\lambda_1/\mu)^2 t/2}}{2\sqrt{2\pi}t^{3/2}}\int\limits_{|\Delta|}^{\infty} e^{-v^2/4t}\Big[v\,\mathrm{sh}(\widetilde{\mu}\Delta)\\ +\big(v\,\mathrm{ch}(\widetilde{\mu}v)+2t(\alpha-|\widetilde{\mu}|)\,\mathrm{sh}(|\widetilde{\mu}|v)\big)I_0\big(\alpha\sqrt{v^2-\Delta^2}\big)\\ +2t\alpha\Delta\,\mathrm{sh}(\widetilde{\mu}v)\frac{I_1\big(\alpha\sqrt{v^2-\Delta^2}\big)}{\sqrt{v^2-\Delta^2}}\Big]dv.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Перейдем к вычислению характеристической функции величины $S_\mu(t)$. Поскольку преобразование Фурье выражения (3.19) по x совпадает с преобразование Фурье по y, но с параметром $-\gamma$ вместо γ, имеем $\mathbf{E}_x e^{i\gamma S_\mu(\tau)} = \widehat{Q}_x(-\gamma)$. Тогда, используя (3.15), найдем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x e^{i\gamma S_\mu(\tau)} = \Big(1+\frac{\lambda_1+i\gamma\mu}{\sqrt{\lambda_1^2-\gamma^2\mu^2}}\Big)\frac{e^{i\gamma x}}{2\lambda+\gamma^2+r_1}\\ +\Big(1-\frac{\lambda_1+i\gamma\mu}{\sqrt{\lambda_1^2-\gamma^2\mu^2}}\Big)\frac{e^{i\gamma x}}{2\lambda+\gamma^2+r_2},\end{aligned}$$

где

$$r_1 := 2\lambda_1 - 2\sqrt{\lambda_1^2-\gamma^2\mu^2}, \qquad r_2 := 2\lambda_1 + 2\sqrt{\lambda_1^2-\gamma^2\mu^2}.$$

Обращая в этом выражении преобразование Лапласа по λ, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x e^{i\gamma S_\mu(t)} = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{\lambda_1+i\gamma\mu}{\sqrt{\lambda_1^2-\gamma^2\mu^2}}\Big)e^{i\gamma x}\,e^{-(\lambda_1-\sqrt{\lambda_1^2-\gamma^2\mu^2}+\gamma^2/2)t}\\ +\frac{1}{2}\Big(1-\frac{\lambda_1+i\gamma\mu}{\sqrt{\lambda_1^2-\gamma^2\mu^2}}\Big)e^{i\gamma x}\,e^{-(\lambda_1+\sqrt{\lambda_1^2-\gamma^2\mu^2}+\gamma^2/2)t}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Из этого выражения, например, следует, что

$$\mathbf{E}_x S_\mu(t) = x + \mu\frac{(1-e^{-2\lambda_1 t})}{2\lambda_1}. \tag{3.26}$$

4. Распределения интегральных функционалов в момент выхода из интервала. Рассмотрим задачу о вычислении распределений интегральных функционалов от диффузионного процесса с переключениями, остановленного в момент первого выхода $H_{a,b} := \min\{s : S_1(s) \notin (a,b)\}$.

Для такого процесса момент выхода из интервала может осуществляться либо посредством пересечения верхней границы, либо – нижней.

Следующий результат касается, по сути, преобразования Лапласа (параметр γ включен в f) распределения неотрицательного интегрального функционала от диффузии S_1, остановленной в момент выхода из интервала через границу b.

Теорема 4.1. *Пусть $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция. Тогда функция*

$$R_b(x) := \mathbf{E}_x \left\{ \exp\left(-\int_0^{H_{a,b}} f(S_1(s))\, ds \right); S_1(H_{a,b}) = b \right\}, \quad x \in [a,b], \tag{4.1}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$R_b(x) = \widetilde{M}_b(x) + \int_a^b \widetilde{G}_z(x) R_b(z)\, dz, \quad x \in [a,b], \tag{4.2}$$

где

$$\widetilde{M}_b(x) := M_b^{(1)}(x) + \int_a^b M_b^{(-1)}(z) G_z^{(1)}(x)\, dz, \tag{4.3}$$

$$\widetilde{G}_y(x) := \int_a^b G_y^{(-1)}(z) G_z^{(1)}(x)\, dz, \tag{4.4}$$

и при каждом $l = -1, 1$ функция $M_b^{(l)}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(l,x) M''(x) + \mu(l,x) M'(x) - (\lambda_1 + f(x)) M(x) = 0, \quad x \in (a,b), \tag{4.5}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 1, \tag{4.6}$$

а $G_z^{(l)}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(l,x) G''(x) + \mu(l,x) G'(x) - (\lambda_1 + f(x)) G(x) = 0, \ x \in (a,b) \setminus \{z\}, \tag{4.7}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1 / \sigma^2(l,z), \tag{4.8}$$

$$G(a) = 0, \quad G(b) = 0. \tag{4.9}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.1 устанавливается, что уравнение (4.2) имеет единственное ограниченное решение.

Для того чтобы доказать справедливость уравнения (4.2), достаточно доказать, что функция R_b удовлетворяет соотношению

$$R_b(x) = M_b^{(1)}(x) + \int\limits_a^b G_z^{(1)}(x)\, \widetilde{R}_b(z)\, dz, \tag{4.10}$$

где

$$\widetilde{R}_b(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}^{(-1)}} f(S_{-1}(s))\, ds \Big); S_{-1}(H_{a,b}^{(-1)}) = b \Big\}, \quad x \in [a,b], \tag{4.11}$$

и $H_{a,b}^{(l)} = \min\{s : X_l(s) \notin (a,b)\}$. Обоснование то же, что и при доказательстве теоремы 2.1. Поэтому для $\widetilde{R}_b$ будет справедлив следующий аналог (4.10)

$$\widetilde{R}_b(x) = M_b^{(-1)}(x) + \int\limits_a^b G_z^{(-1)}(x)\, R_b(z)\, dz, \tag{4.12}$$

Теперь подставляя (4.12) в правую часть (4.10) получаем

$$R_b(x) = M_b^{(1)}(x) + \int\limits_a^b G_z^{(1)}(x)\, M_b^{(-1)}(z)\, dz$$
$$+ \int\limits_a^b \int\limits_a^b G_z^{(1)}(x) G_y^{(-1)}(z)\, dz R_b(y)\, dy.$$

Это и есть уравнение (4.2).

Докажем (4.10). Положим

$$M_b^{(l)}(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}^{(l)}} \big(\lambda_1 + f(X_l(s))\big)\, ds \Big); X_l(H_{a,b}^{(l)}) = b \Big\}.$$

Тогда $M_b^{(l)}(x)$ при $x \in (a,b)$ является (см. гл. IV, теорема 7.2) решением задачи (4.5), (4.6).

Положим

$$G_z^{(l)}(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1} f(X_l(s))\,ds\Big);$$

$$a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau_1} X_l(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau_1} X_l(s) \leqslant b, X_l(\tau_1) < z\Big\}.$$

Тогда G_z является решением задачи (4.7)–(4.9) (см. [2, гл. IV, теорема 6.2], $\lambda = \lambda_1$).

Математическое ожидание, определяющее функцию $R_b(x)$, разобьем в сумму двух слагаемых: математическому ожиданию по событию $\{H_{a,b} < \tau_1\} = \{H_{a,b}^{(1)} < \tau_1\}$ и по дополнению $\{H_{a,b} \geqslant \tau_1\}$, которое эквивалентно событию

$$\Big\{a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau_1} X_1(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau_1} X_1(s) \leqslant b\Big\}.$$

Имеем

$$R_b(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}^{(1)}} f(X_1(s))\,ds\Big); X_1(H_{a,b}^{(1)}) = b, H_{a,b}^{(1)} < \tau_1\Big\}$$

$$+\,\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1} f(X_1(s))\,ds - \int\limits_{\tau_1}^{H_{a,b}} f(S_1(s))\,ds\Big);$$

$$a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau_1} X_1(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau_1} X_1(s) \leqslant b, S_1(H_{a,b}) = b\Big\} =: J_1(x) + J_2(x),$$

где $J_1(x)$ и $J_2(x)$ – соответственно первое и второе слагаемые. Поскольку момент τ_1 не зависит от процесса X_1 и имеет показательное распределение, то используя равенство

$$\mathbf{P}\Big(H_{a,b}^{(1)} < \tau_1 \big| \sigma\big(X_1(\,\cdot\,)\big)\Big) = e^{-\lambda_1 H_{a,b}^{(1)}},$$

получаем, что $J_1(x) = M_b^{(1)}(x)$.

Рассмотрим (см. (1.4)) процесс $\widetilde{S}_{X_1(\tau_1)}(s) = S_1(s+\tau_1)$, $s \geqslant 0$, и σ-алгебру $\mathcal{G}_0^{\tau_1}$. На событии $\{\tau_1 \leqslant H_{a,b}\}$ выполняется равенство

$$H_{a,b} - \tau_1 = \widetilde{H}_{a,b} := \min\{s : \widetilde{S}_{X_1(\tau_1)}(s) \notin (a,b)\}.$$

Тогда для $J_2(x)$ получим следующее выражение:

$$J_2(x) = \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1} f(X_1(s))\,ds\Big)\mathbb{1}_{\Big\{a\leqslant \inf\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau_1} X_1(s),\ \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau_1} X_1(s)\leqslant b\Big\}}$$

$$\times\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{\widetilde{H}_{a,b}} f(\widetilde{S}_{X_1(\tau_1)}(s))ds\Big)\mathbb{1}_{\{\widetilde{S}_{X_1(\tau_1)}(\widetilde{H}_{a,b})=b\}}\Big|\mathcal{G}_0^{\tau_1}\Big\}\Big\}.$$

Процесс $\widetilde{S}_x$ распределен как S_{-1} при $S_{-1}(0) = x$ и не зависит от σ-алгебры событий $\mathcal{G}_0^{\tau_1}$, порожденной процессом X_1 до момента τ_1. Применим лемму 2.1 гл. I из [2], тогда получим

$$J_2(x)=\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1} f(X_1(s))\,ds\Big)\mathbb{1}_{\Big\{a\leqslant \inf\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau_1} X_1(s),\ \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau_1} X_1(s)\leqslant b\Big\}}\,\widetilde{R}_b(X_1(\tau_1))\Big\}.$$

Теперь, используя вероятностное представление функции $G_z^{(1)}(x)$, окончательно получим

$$J_2(x) = \int\limits_a^b G_z^{(1)}(x)\,\widetilde{R}_b(z)\,dz.$$

Тем самым, при $x \in (a, b)$ справедливо равенство (4.10). □

Как частный случай теоремы 4.1 рассмотрим задачу о вычислении распределений интегральных функционалов от диффузионного процесса с переключениями, остановленного в момент первого достижения уровня b, т.е. в момент $H_b := \min\{s : S_1(s) = b\}$. Этот результат выводится из теоремы 4.1 с помощью предельного перехода при $a \downarrow -\infty$.

Теорема 4.2. *Пусть $f(x)$, $x \in (-\infty, b]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция. Тогда функция*

$$L_b(x) := \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{H_b} f(S_1(s))\,ds\Big); H_b < \infty\Big\}, \quad x \in (-\infty, b], \quad (4.13)$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$L_b(x) = \widetilde{M}_b(x) + \int\limits_{-\infty}^{b} \widetilde{G}_z(x) L_b(z)\, dz, \quad x \in (-\infty, b] \tag{4.14}$$

где $\widetilde{M}_b(x)$ *удовлетворяет* (4.3) *при* $a = -\infty$, *а* $\widetilde{G}_y(x)$ *удовлетворяет* (4.4) *при* $a = -\infty$. *При каждом* $l = -1, 1$ *функция* $M_b^{(l)}(x)$, $x \in (-\infty, b]$, *является единственным ограниченным решением уравнения* (4.5), *удовлетворяющим условию* $M_b^{(l)}(b) = 1$, *а* $G_z^{(l)}(x)$, $x \in (-\infty, b]$, *является единственным непрерывным ограниченным решением задачи* (4.7)–(4.9) *при* $a = -\infty$.

Пример 4.1. Для броуновского движения с переключающимся знаком линейного сноса (см. (3.12)) вычислим преобразование Лапласа момента первого попадания:

$$L_b(x) := \mathbf{E}_x\{e^{-\lambda H_b}; H_b < \infty\}, \quad x \in (-\infty, b]. \tag{4.15}$$

В силу пространственной однородности процесса $S\mu$ (см. (3.19)) достаточно вычислить (4.15) при $b = 0$, $x \leqslant 0$, поскольку $L_b(x) = L_0(x - b)$, $x \leqslant b$.

Воспользуемся уравнением (4.14), решение которого будем искать в виде

$$L_0(x) = A_1 e^{x\rho_1} + A_2 e^{x\rho_2}, \quad x \leqslant 0, \quad \rho_2 > \rho_1 > 0.$$

Согласно формуле 2.2.0.1 из [3] при $l = 1, -1$

$$M_0^{(l)}(x) := \mathbf{E}_x\left\{e^{-(\lambda+\lambda_1)H_0^{(l\mu)}}; H_0^{(l\mu)} < \infty\right\} = e^{-l\mu x + x\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}}, \tag{4.16}$$

где $H_b^{(\mu)} := \min\{s : W^{(\mu)}(s) = b\}$, и согласно формулам 2.1.0.5 и 2.1.1.6 из [3] при $l = 1, -1$, $x \leqslant 0$, $z \leqslant 0$,

$$\begin{aligned} G_z^{(l)}(x) &= \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\{e^{-\lambda\tau_1}; \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau_1} W^{(l\mu)}(s) \leqslant 0, W^{(l\mu)}(\tau_1) < z\} \\ &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}} e^{l\mu(z-x)}\left(e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}} - e^{(x+z)\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu^2}}\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Нам понадобятся следующие легко проверяемые равенства: при $q > 0$, $p > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{qz-|z-x|p}\,dz = \frac{2p\,e^{xq}}{p^2-q^2} + \frac{e^{xp}}{q-p} \tag{4.18}$$

и

$$\begin{aligned} e^{-(x+y)q}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2qz-(|z-y|+|z-x|)p}\,dz &= \frac{p}{2q(p-q)}e^{-|x-y|(p-q)} \\ &-\frac{p}{2q(p+q)}e^{-|x-y|(p+q)} - \frac{p}{2(p-q)}e^{(x+y)(p-q)}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Положим $\Upsilon = \sqrt{2\lambda + 2\lambda_1 + \mu^2}$. Применяя (4.18), получаем:

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_0(x) &= M_b^{(1)}(x) + \int\limits_{-\infty}^{0} M_0^{(-1)}(z)\,G_z^{(1)}(x)\,dz \\ &= e^{x(\Upsilon-\mu)} + \frac{\lambda_1}{2\mu(\Upsilon+\mu)}\big(e^{x(\Upsilon-\mu)} - e^{x(\Upsilon+\mu)}\big). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Применяя (4.19), получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_y(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} G_y^{(-1)}(z)\,G_z^{(1)}(x)\,dz = \frac{\lambda_1^2}{\Upsilon^2}e^{-(x+y)\mu}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2\mu z-(|z-y|+|z-x|)\Upsilon}dz \\ - e^{x\Upsilon}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(2\mu+\Upsilon)z-|z-y|\Upsilon}dz - e^{y\Upsilon}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(2\mu+\Upsilon)z-|z-x|\Upsilon}dz \\ + e^{(x+y)\Upsilon}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2(\mu+\Upsilon)z}dz\Bigg) = \frac{\lambda_1^2}{2\mu\Upsilon}\Big[\frac{e^{-|y-x|(\Upsilon-\mu)}}{\Upsilon-\mu} - \frac{e^{-|y-x|(\Upsilon+\mu)}}{\Upsilon+\mu} \\ + \frac{e^{x(\Upsilon-\mu)}e^{y(\Upsilon+\mu)} + e^{x(\Upsilon+\mu)}e^{y(\Upsilon-\mu)}}{\Upsilon+\mu} - \frac{e^{(x+y)(\Upsilon-\mu)}}{\Upsilon+\mu} - \frac{e^{(x+y)(\Upsilon-\mu)}}{\Upsilon-\mu}\Big]. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (4.18) для произвольного $\rho > 0$ получим

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \widetilde{G}_y(x)\,e^{\rho y}\,dy = \frac{\lambda_1^2}{2\mu\Upsilon}\Big[\frac{2e^{x\rho}}{(\Upsilon-\mu)^2-\rho^2} - \frac{2e^{x\rho}}{(\Upsilon+\mu)^2-\rho^2}$$

$$+\frac{e^{x(\Upsilon-\mu)}}{(\Upsilon-\mu)(\rho-\Upsilon+\mu)}-\frac{e^{x(\Upsilon+\mu)}}{(\Upsilon+\mu)(\rho-\Upsilon-\mu)}+\frac{1}{\Upsilon+\mu}\Big(\frac{e^{x(\Upsilon-\mu)}}{\rho+\Upsilon+\mu}$$
$$+\frac{e^{x(\Upsilon+\mu)}}{\rho+\Upsilon-\mu}-\frac{e^{x(\Upsilon-\mu)}}{\rho+\Upsilon-\mu}\Big)-\frac{e^{x(\Upsilon-\mu)}}{(\Upsilon-\mu)(\rho+\Upsilon-\mu)}\Big]$$
$$=\frac{\lambda_1^2(e^{x\rho}-e^{x(\Upsilon-\mu)})}{\mu\Upsilon}\Big(\frac{1}{(\Upsilon-\mu)^2-\rho^2}-\frac{1}{(\Upsilon+\mu)^2-\rho^2}\Big)$$
$$+\frac{\lambda_1^2(e^{x(\Upsilon-\mu)}-e^{x(\Upsilon+\mu)})}{2\mu\Upsilon(\Upsilon+\mu)}\Big(\frac{1}{\rho-\Upsilon-\mu}-\frac{1}{\rho+\Upsilon-\mu}\Big).$$

Множитель при $e^{x\rho}$ в этом выражении имеет следующий вид

$$\frac{4\lambda_1^2}{((\rho-\mu)^2-\Upsilon^2)((\rho+\mu)^2-\Upsilon^2)}=\frac{4\lambda_1^2}{(\rho^2-(\Upsilon+\mu)^2)(\rho^2-(\Upsilon-\mu)^2)}=1. \quad (4.21)$$

Правое равенство будет выполняться благодаря тому, что мы выбираем в качестве ρ один из корней этого уравнения. Нетрудно убедиться в том, что такие неотрицательные корни имеют вид (3.17) и (3.18).

В итоге имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\widetilde{G}_y(x)e^{\rho y}dy=e^{x\rho}-e^{x(\Upsilon-\mu)}+\frac{\lambda_1^2}{\mu(\Upsilon+\mu)((\rho-\mu)^2-\Upsilon^2)}\big(e^{x(\Upsilon-\mu)}-e^{x(\Upsilon+\mu)}\big).$$

Пусть далее ρ_1 и ρ_2 – корни (3.17) и (3.18). Подставляя в уравнение (4.14) при $b=0$ решение

$$L_0(x)=A_1e^{x\rho_1}+A_2e^{x\rho_2},$$

выражение (4.20) и, учитывая полученное выше равенство, имеем

$$0=e^{x(\Upsilon-\mu)}+\frac{\lambda_1}{2\mu(\Upsilon+\mu)}\left(e^{x(\Upsilon-\mu)}-e^{x(\Upsilon+\mu)}\right)-(A_1+A_2)e^{x(\Upsilon-\mu)}$$
$$+\frac{\lambda_1^2}{\mu(\Upsilon+\mu)}\Big(\frac{A_1}{((\rho_1-\mu)^2-\Upsilon^2)}+\frac{A_2}{((\rho_2-\mu)^2-\Upsilon^2)}\Big)\big(e^{x(\Upsilon-\mu)}-e^{x(\Upsilon+\mu)}\big).$$

Отсюда следует система уравнений

$$A_1+A_2=1,$$
$$\frac{A_1}{((\rho_1-\mu)^2-\Upsilon^2)}+\frac{A_2}{((\rho_2-\mu)^2-\Upsilon^2)}=-\frac{1}{2\lambda_1}.$$

В силу (4.21), последнее равенство эквивалентно

$$A_1((\rho_1+\mu)^2-\Upsilon^2)+A_2((\rho_2+\mu)^2-\Upsilon^2)=-2\lambda_1.$$

Решение полученной системы имеет вид

$$A_1 = \frac{(\rho_2+\mu)^2 - 2\lambda - \mu^2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+\rho_2+2\mu)}, \qquad A_2 = \frac{2\lambda + \mu^2 - (\rho_1+\mu)^2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+\rho_2+2\mu)}.$$

Окончательно получим, что при $x \in (-\infty, b]$

$$\begin{aligned} L_b(x) &:= \mathbf{E}_x\{e^{-\lambda H_b}; H_b < \infty\} \\ &= \frac{(\rho_2+\mu)^2 - 2\lambda - \mu^2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+\rho_2+2\mu)} e^{-(b-x)\rho_1} \\ &\quad + \frac{2\lambda + \mu^2 - (\rho_1+\mu)^2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+\rho_2+2\mu)} e^{-(b-x)\rho_2}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Используя свойство симметрии броуновского движения, имеем, что при $x \in [b, \infty)$

$$\begin{aligned} L_b(x) &:= \mathbf{E}_x\{e^{-\lambda H_b}; H_b < \infty\} \\ &= \frac{(\rho_2-\mu)^2 - 2\lambda - \mu^2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+\rho_2-2\mu)} e^{-(x-b)\rho_1} \\ &\quad + \frac{2\lambda + \mu^2 - (\rho_1-\mu)^2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+\rho_2-2\mu)} e^{-(x-b)\rho_2}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Отметим одно важное следствие. При $\lambda = 0$ имеем $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 2\sqrt{\lambda_1 + \mu^2}$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}_x\big(H_b < \infty\big) = 1.$$

Поэтому броуновское движение с переключающимся знаком линейного сноса является возвратным процессом.

Литература

1. M. Kac *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65**, No. 1 (1949), 1–13.
2. А. Н. Бородин, *Случайные процессы*, Лань, С.-Петербург, 2013.
3. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы*, Лань, С.-Петербург, 2016.
4. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. I, Наука, Москва, 1969.

Borodin A. N. Distributions of functionals of switching diffusions.

The paper deals with the methods of computations of distributions of functionals of switching diffusions. The switching between two collections of diffusion coefficients happens at the Poisson time moments, which are

independent of the initial diffusions. It is also possible to consider the more general switching diffusions when the choice is taken from three and more collections of diffusion coefficients.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
С.-Петербург, 191023;
С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9,
С.-Петербург, 199034 Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 15 октября 2016 г.