Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ДИФФУЗИЙ, ОСТАНОВЛЕННЫХ В МОМЕНТ, ОБРАТНЫЙ К РАЗМАХУ

1. В работе получены результаты, позволяющие вычислять распределения интегральных функционалов от диффузионного процесса, остановленного в момент, обратный к размаху процесса.

Размахом процесса будем называть разность между его максимальным и минимальным значениями на конечном интервале времени.

Различные задачи, связанные с размахом броуновского движения и с процессом, обратным к размаху, изучались многими авторами. Отметим, например, интересные работы [1] и [2]. Для броуновского движения вопрос о распределении таких функционалов был решен в работе [3], см. также § 8 гл. III из [4]. В [5] приведено много явных формул, касающихся распределений конкретных функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный к размаху.

Пусть W – броуновское движение и пусть X – решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = \sigma(X(t))\,dW(t) + \mu(X(t))\,dt, \qquad X(0) = x, \tag{1.1}$$

где $\mu(x)$ и $\sigma(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию на не более чем линейный рост:

$$|\mu(x)| + |\sigma(x)| \leqslant C(1 + |x|) \qquad \text{для всех } x \in \mathbf{R}.$$

Тогда, согласно теореме 7.3 гл. II из [4], существует единственное сильное решение уравнения (1.1). Предположим, что $\sigma^2(x) > 0$ при $x \in \mathbf{R}$ и производная $\left(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\right)'$ ограничена.

Ключевые слова: диффузионные процессы, момент, обратный к размаху, распределения функционалов.

Настоящая работа частично поддерживалась грантами РФФИ 16-01-00367 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Пусть τ – момент времени, не зависящий от диффузии $X(t)$, $t \geqslant 0$, и имеющий экспоненциальную плотность распределения $\lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$, $\lambda > 0$.

Рассмотрим результаты, которые позволяют вычислять распределения некоторых функционалов от диффузии $X(s)$, $s \in [0,\infty)$, остановленной в момент, обратный к размаху, т.е. в момент

$$\theta_v = \min\Big\{t : \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X(s) - \inf_{0\leqslant s\leqslant t} X(s) = v\Big\}.$$

Это – первый момент, когда размах процесса X достигает заданного значения $v > 0$. Наряду с моментом θ_v мы рассмотрим также момент остановки, образованный с помощью операции минимума из моментов θ_v и τ.

Как и для броуновского движения, задача о вычислении распределений функционалов от диффузии X, остановленной в момент θ_v, который является обратным к размаху процесса X, может быть трансформирована к задаче о вычислении распределений таких же функционалов от процесса X, остановленного в момент первого выхода из конечного интервала, т.е. в момент $H_{a,b} = \min\{s : X(s) \notin (a,b)\}$. Этот факт является основополагающим при доказательстве многих результатов о распределении функционалов, в которых присутствует момент θ_v.

Рассмотрим задачу о распределении интегральных функционалов

$$A(t) := \int\limits_0^t f(X(s))\,ds,$$

когда вместо t берется момент θ_v.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ – вероятность и математическое ожидание по процессу X с начальным значением $X(0) = x$.

Для того чтобы упростить формулы, в дальнейшем мы будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi\mathbb{1}_A\}$.

Следующий результат является ключевым для вычисления условных распределений функционала $A(t)$ в момент θ_v если $X(\theta_v) = z$.

Теорема 1.1. *Пусть $f(x)$ – кусочно непрерывная неотрицательная функция. Тогда при $|z - x| < v$*

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(\theta_v)}; X(\theta_v) < z\big\}$$

$$= \begin{cases} \frac{d}{dv}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(H_{z,z+v})}; X(H_{z,z+v}) = z\big\} & \text{при} \;\; x - v < z < x, \\ \frac{d}{dv}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(H_{z-v,z})}; X(H_{z-v,z}) = z\big\} & \text{при} \;\; x < z < x + v. \end{cases} \tag{1.2}$$

Доказательство. Структура доказательства в значительной степени повторяет ход доказательства для броуновского движения, при этом, однако, нужно иметь аналогичные оценки уже для диффузионных процессов. С вывода таких оценок мы и начнем.

Согласно предложению 12.5 §12, гл. II из [4] вероятности выхода процесса X на границы интервала $[a, b]$ имеют вид

$$\mathbf{P}_x(X(H_{a,b}) = a) = \frac{S(b) - S(x)}{S(b) - S(a)}, \quad \mathbf{P}_x(X(H_{a,b}) = b) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)},$$

где

$$S(x) := \int_a^x \exp\Big(-\int_a^y \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)}\,dz\Big)\,dy. \tag{1.3}$$

Положим $M := \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} \Big|\Big(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\Big)'\Big|$. Тогда для любого $0 < \delta < b - a$ имеем оценки

$$\mathbf{P}_{b-\delta}(X(H_{a,b}) = a) \leqslant \delta e^{M(b-a)^2}\Big(\int_0^{b-a} e^{-My^2}\,dy\Big)^{-1}, \tag{1.4}$$

$$\mathbf{P}_{a+\delta}(X(H_{a,b}) = b) \leqslant \delta e^{M(b-a)^2}\Big(\int_0^{b-a} e^{-My^2}\,dy\Big)^{-1}. \tag{1.5}$$

Из предложения 12.4 § 12 гл. II из [4] можно вывести, что при $x \in (a, b)$

$$\mathbf{E}_x\{H_{a,b}; X(H_{a,b}) = a\} = \frac{S(b) - S(x)}{(S(b) - S(a))^2}\int_a^x (S(b) - S(y))(S(y) - S(a))\,dM(y)$$

$$+\frac{S(x) - S(a)}{(S(b) - S(a))^2}\int_x^b (S(b) - S(y))^2\,dM(y), \tag{1.6}$$

$$\mathbf{E}_x\{H_{a,b}; X(H_{a,b}) = b\} = \frac{S(b) - S(x)}{(S(b) - S(a))^2}\int_a^x (S(y) - S(a))^2\,dM(y)$$

$$+\frac{S(x)-S(a)}{(S(b)-S(a))^2}\int\limits_x^b (S(b)-S(y))(S(y)-S(a))\,dM(y), \qquad (1.7)$$

и

$$dM(x):=\frac{2}{\sigma^2(x)}\exp\Big(\int\limits_a^x \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)}\,dz\Big)\,dx \leqslant \frac{2}{\Delta_{a,b}}e^{M(x-a)^2}\,dx.$$

где $\Delta_{a,b}:=\min_{x\in[a,b]}\sigma^2(x)$. Используя эту оценку и применяя (1.6) и (1.7), нетрудно вывести оценки

$$\mathbf{E}_{a+\delta}\{H_{a,b}; X(H_{a,b})=a\} \leqslant \frac{C_{b-a}}{\Delta_{a,b}}\delta, \qquad (1.8)$$

$$\mathbf{E}_{b-\delta}\{H_{a,b}; X(H_{a,b})=b\} \leqslant \frac{C_{b-a}}{\Delta_{a,b}}\delta, \qquad (1.9)$$

где константа C_{b-a} зависит только от разности $b-a$.

Оценки (1.4), (1.5) и (1.8), (1.9) позволяют провести доказательство теоремы 1.1 полностью аналогично тому как это сделано для броуновского движения (см. доказательство теоремы 8.1 гл. II из [4]).

Поэтому мы остановимся лишь на выражении правой части (1.2) через линейно независимые решения уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi''(x)+\mu(x)\phi'(x)-f(x)\phi(x)=0, \qquad x\in\mathbf{R}. \qquad (1.10)$$

Согласно предложению 12.2 гл. II из [4] уравнение (1.10) имеет два неотрицательных линейно независимых решения ψ и φ таких, что $\psi(x)$, $x\in\mathbf{R}$, является возрастающим, а $\varphi(x)$, $x\in\mathbf{R}$, – убывающим решением. Такие решения называются фундаментальными. Положим $w(x):=\psi'(x)\varphi(x)-\psi(x)\varphi'(x)$ – их вронскиан.

Пусть

$$\rho(x,y):=\psi(x)\varphi(y)-\psi(y)\varphi(x).$$

Легко проверить, что для любых a, b и c

$$\frac{d}{db}\,\rho(a,b)\,\rho(b,c)-\rho(a,b)\,\frac{d}{db}\,\rho(b,c)=-w(b)\,\rho(a,c). \qquad (1.11)$$

Осуществляя выкладки, аналогичные приведенным при доказательстве теоремы 8.1 гл. II из [4], получим

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(\theta_v)};X(\theta_v)<z\big\}$$
$$=\begin{cases}\frac{w(z+v)\rho(x,z)}{\rho^2(z+v,z)}, & x-v<z\leqslant x,\\ \frac{w(z-v)\rho(z,x)}{\rho^2(z,z-v)}, & x\leqslant z<x+v.\end{cases} \tag{1.12}$$

□

Как следствие из (1.12) сформулируем следующий результат.

Предложение 1.1. *Пусть $\Phi(x)$, $f(x)$ – кусочно непрерывные функции и f неотрицательна. Тогда*

$$\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(\theta_v))\exp\Big(-\int_0^{\theta_v}f(X(s))\,ds\Big)\Big\}=\int_{x-v}^{x}\frac{w(z+v)\Phi(z)\rho(x,z)}{\rho^2(z+v,z)}\,dz$$
$$+\int_x^{x+v}\frac{w(z-v)\Phi(z)\rho(z,x)}{\rho^2(z,z-v)}\,dz. \tag{1.13}$$

2. Обозначим $\theta_v^\tau:=\theta_v\wedge\tau$. Нас интересует аналог теоремы 1.1 для момента θ_v^τ. Воспользуемся следующим представлением

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(\theta_v^\tau)};X(\theta_v^\tau)<z\big\}=\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(\theta_v)};X(\theta_v)<z,\theta_v\leqslant\tau\big\}$$
$$+\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(\tau)};X(\tau)<z,\theta_v>\tau\big\}=:I_1+I_2.$$

Рассмотрим слагаемое I_1. Поскольку τ не зависит от процесса X, то справедлива формула

$$\mathbf{P}\big(\theta_v\leqslant\tau\big|\sigma(X(\cdot))\big)=e^{-\lambda\theta_v},$$

где $\sigma(X(\cdot))$ – σ-алгебра событий, порожденная процессом X. Тогда, применяя теорему Фубини и сначала вычисляя математическое ожидание по τ, а затем по процессу X, получим, что

$$I_1=\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^{\theta_v}(\lambda+f(X(s)))\,ds\Big);X(\theta_v)<z\Big\}.$$

Для вычисления I_1 можно воспользоваться теоремой 1.1 с функцией $\lambda+f(x)$ вместо $f(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

Пусть далее ψ и φ – фундаментальные решения уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi''(x) + \mu(x)\phi'(x) - (\lambda + f(x))\phi(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

и $w(x)$ – их вронскиан. Тогда выражение для I_1 дается формулой (1.12).

Рассмотрим I_2. Поскольку событие $\{\theta_v > \tau\}$ эквивалентно событию

$$\Big\{\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) - \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) < v\Big\},$$

имеем

$$I_2 = \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-A(\tau)}; \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) - \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) < v, X(\tau) < z\Big\}.$$

Далее нам понадобятся следующие сведения (см. теорему 6.2 и предложение 6.1 гл. IV из [4]). Положим

$$G_z(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-A(\tau)}; a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) \leqslant b, X(\tau) < z\Big\}.$$

Тогда при $z \in (a, b)$

$$G_z(x) = \begin{cases} \frac{2\lambda}{w_{a,b}(z)\sigma^2(z)}\varphi_b(z)\psi_a(x) & \text{при } a \leqslant x \leqslant z, \\ \frac{2\lambda}{w_{a,b}(z)\sigma^2(z)}\psi_a(z)\varphi_b(x) & \text{при } z \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\psi_a(x)$ – возрастающее, а $\varphi_b(x)$ – убывающее решения уравнения (2.1) при $x \in (a, b)$, удовлетворяющие граничным условиям $\psi_a(a) = 0$, $\varphi_b(b) = 0$. Функция $w_{a,b}(x) = \psi_a'(x)\varphi_b(x) - \psi_a(x)\varphi_b'(x) > 0$ – вронскиан этих решений. Решения $\psi_a(x)$ и $\varphi_b(x)$ нетрудно выразить через фундаментальные решения $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ уравнения (2.1), для которых нет граничных условий. Действительно

$$\psi_a(x) = \frac{\rho(x, a)}{\rho(b, a)}, \quad \varphi_b(x) = \frac{\rho(b, x)}{\rho(b, a)}. \tag{2.3}$$

Применяя (1.11), нетрудно проверить, что вронскиан этих решений совпадает с вронскианом решений ψ и φ, т.е. $w_{a,b}(x) = w(x)$. Используя выражения (2.3) и (2.2), получим

$$G_z(x) = \begin{cases} \frac{2\lambda\rho(b,z)\rho(x,a)}{w(z)\sigma^2(z)\rho(b,a)} & \text{при } a \leqslant x \leqslant z, \\ \frac{2\lambda\rho(b,x)\rho(z,a)}{w(z)\sigma^2(z)\rho(b,a)} & \text{при } z \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{2.4}$$

Обозначим $F(a,b,x,z) := G_z(x)$. Применяя (1.11), нетрудно проверить, что при $a < x < z < b$

$$F'_b(a,b,x,z) = \frac{2\lambda w(b)\rho(z,a)\rho(x,a)}{w(z)\sigma^2(z)\rho^2(b,a)},$$

и при $a < z < x < b$

$$F'_a(a,b,x,z) = -\frac{2\lambda w(a)\rho(b,z)\rho(b,x)}{w(z)\sigma^2(z)\rho^2(b,a)}.$$

Вернемся к вычислению слагаемого I_2. При $x < z$ имеем

$$I_2 = \int\limits_z^{x+v} \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-A(\tau)}; b-v < \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s), X(\tau) < z, \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) \in db\Big\}$$

$$= \int\limits_z^{x+v} F'_b(b-v,b,x,z)\,db = \frac{2\lambda}{w(z)\sigma^2(z)} \int\limits_z^{x+v} \frac{w(b)\rho(z,b-v)\rho(x,b-v)}{\rho^2(b,b-v)}\,db.$$

Аналогично при $z < x$ имеем

$$I_2 = \int\limits_{x-v}^{z} \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-A(\tau)}; \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) < a+v, X(\tau) < z, \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) \in da\Big\}$$

$$= -\int\limits_{x-v}^{z} F'_a(a,v+a,x,z)\,da = \frac{2\lambda}{w(z)\sigma^2(z)} \int\limits_{x-v}^{z} \frac{w(a)\rho(a+v,z)\rho(a+v,x)}{\rho^2(a+v,a)}\,da.$$

Суммируя слагаемые I_1 и I_2, получим следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть $f(x)$ – кусочно непрерывная неотрицательная функция. Тогда при $|z-x| < v$*

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-A(\theta_v^\tau)}; X(\theta_v^\tau) < z\big\} \tag{2.5}$$

$$= \begin{cases} \frac{w(z+v)\rho(x,z)}{\rho^2(z+v,z)} + \frac{2\lambda}{w(z)\sigma^2(z)} \int\limits_{x-v}^{z} \frac{w(u)\rho(u+v,z)\rho(u+v,x)}{\rho^2(u+v,u)}\,du, \\ \qquad\qquad \textit{при} \quad x-v < z < x, \\ \frac{w(z-v)\rho(z,x)}{\rho^2(z,z-v)} + \frac{2\lambda}{w(z)\sigma^2(z)} \int\limits_{z}^{x+v} \frac{w(u)\rho(z,u-v)\rho(x,u-v)}{\rho^2(u,u-v)}\,du, \\ \qquad\qquad \textit{при} \quad x < z < x+v, \end{cases}$$

где функция ρ и вронскиан w определены по фундаментальным решениям ψ и φ – уравнения (2.1).

Пример 2.1. Рассмотрим броуновское движение с линейным сносом: $W_\mu(t) = \mu t + W(t)$, $t \geqslant 0$. Вычислим

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-\alpha\theta_v^\tau}; W_\mu(\theta_v^\tau) < z\big\}.$$

В данном случае $\sigma(x) \equiv 1$, $\mu(x) \equiv \mu$, $f(x) \equiv \alpha > 0$,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{(\Upsilon-\mu)x}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-(\Upsilon+\mu)x}, \quad w(x) = \Upsilon e^{-2\mu x},$$

$$\rho(b,a) = e^{-(b+a)\mu}\,\mathrm{sh}((b-a)\Upsilon),$$

где $\Upsilon := \sqrt{2\lambda + 2\alpha + \mu^2}$.

Применяя теорему 2.1, нетрудно вычислить, что при $|z-x| < v$

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-\alpha\theta_v^\tau}; W_\mu(\theta_v^\tau) < z\big\} = \frac{\Upsilon e^{(z-x)\mu}}{\mathrm{sh}^2(v\Upsilon)}\,\mathrm{sh}(|z-x|\Upsilon)$$

$$+\frac{\lambda e^{(z-x)\mu}}{\mathrm{sh}^2(v\Upsilon)}\Big(\frac{\mathrm{ch}(v\Upsilon)}{\Upsilon}\,\mathrm{sh}((v-|z-x|)\Upsilon) - (v-|z-x|)\,\mathrm{ch}((z-x)\Upsilon)\Big).$$

Интегрируя это равенство по z из интервала $(x-v, x+v)$, получим

$$\mathbf{E}_x e^{-\alpha\theta_v^\tau} = \tfrac{2\lambda+2\alpha+\mu^2}{(\lambda+\alpha)\,\mathrm{sh}^2(v\Upsilon)}\Big[\mathrm{ch}(v\Upsilon)\,\mathrm{ch}(v\mu) - 1 - \tfrac{\mu}{\Upsilon}\,\mathrm{sh}(v\Upsilon)\,\mathrm{sh}(v\mu)\Big]$$

$$+\tfrac{\lambda}{\mathrm{sh}^2(v\Upsilon)}\Big[\tfrac{2\,\mathrm{ch}(v\Upsilon)(\mathrm{ch}(v\Upsilon)-\mathrm{ch}(v\mu))}{\Upsilon^2-\mu^2} + \tfrac{1-\mathrm{ch}(v(\Upsilon+\mu))}{(\Upsilon+\mu)^2} + \tfrac{1-\mathrm{ch}(v(\Upsilon-\mu))}{(\Upsilon-\mu)^2}\Big]$$

$$= \tfrac{\lambda}{\lambda+\alpha} + \tfrac{2\alpha\Upsilon}{(\lambda+\alpha)\,\mathrm{sh}^2(v\Upsilon)}\Big(\tfrac{\mathrm{sh}^2(v(\Upsilon+\mu)/2)}{\Upsilon+\mu} + \tfrac{\mathrm{sh}^2(v(\Upsilon-\mu)/2)}{\Upsilon-\mu}\Big).$$

Литература

1. J. P. Imhof, *On the range of Brownian motion and its inverse process.* — Ann. Probab. **13** (1985), 1–13.
2. P. Vallois, *Decomposition of the Brownian path via the range process.* — Stoch. Proc. Appl. **55** (1995) 211–226.
3. А. Н. Бородин, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный к размаху.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **260** (1999) 50–72.
4. А. Н. Бородин, *Случайные процессы*, Санкт-Петербург, Лань, 2013.
5. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы*, Санкт-Петербург, Лань, 2016.

Borodin A. N. On distributions of integral functionals of diffusions stopped at inverse range time.

In the paper we develop the methods for computations of distributions of integral functionals of diffusions stopped at inverse range time. We consider also the moment, which is the minimum of inverse range time and the exponentially distributed stopping time independent of the diffusion. An interesting example of the applications of these methods is considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург 191023;
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб, 7/9
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 15 октября 2016 г.