Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

Я. И. Белопольская

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ И БАЛАНСА В РЕЖИМАХ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

§1. Введение

Целью этой работы является построение вероятностных моделей для законов сохранения и баланса в физических и биологических системах, а также в системах с переключениями режимов. Математические модели для таких законов сохранения представляют собой системы нелинейных параболических уравнений второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + D\sum_{i,j=1}^{d} F_{ij}(x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} B^i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} - g(x,u) = 0, \qquad (1.1)$$

относительно вектор-функции $u(t,x) \in R^{d_1}$, $t \in [0,T]$, $x \in R^d$. Здесь $B^i \in R^{d_1} \otimes R^{d_1}$, матрицы $D \in R^{d_1} \otimes R^{d_1}$, $F \in R^d \otimes R^d$ положительно определены, $F(x,u) = A(x,u)A^*(x,u)$, A^* – транспонированная матрица и все коэффициенты локально ограничены на $R^d \times R^{d_1}$.

Системы вида (1.1) можно разбить на несколько классов в зависимости от того, как входят в систему члены старшего порядка. Если предположить, что матрицы D и $B^i(x,u)$ коммутируют и каждая из них обладает простым спектром, то систему (1.1) можно свести к системе

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \lambda_m \sum_{i,j} F_{ij}(x,u)\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \kappa_m^i(x,u)\frac{\partial u_m}{\partial x_i} = g_m(x,u).$$

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, марковские цепи системы квазилинейных параболических уравнений, классические решения задачи Коши.

Работа поддержана грантом РФФИ 15-01-01453.

Здесь λ_m, $m = 1, \ldots, d_1$, – собственные числа матрицы D, а $\kappa_m(x,u)$ – собственные числа матриц B^i, соответствующие собственным векторам h_m, образующим базис в R^{d_1},

$$\langle h_m, Du\rangle = \lambda_m u_m,\ \langle h_m, \sum_i B^i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle = \sum_i \lambda^i_m(x,u)\frac{\partial u_m}{\partial x_i},$$

и $\langle a, b\rangle = \sum\limits_{k=1}^{d_1} a_k b_k$ – скалярное произведение в R^{d_1}.

Если же матрицы D и B^i не имеют общего полного набора собственных векторов, то возникает система, в которой члены, содержащие градиенты функций u_m, входят недиагональным образом, а члены, содержащие вторые производные, входят диагонально, но с различными коэффициентами.

В терминах решения задачи Коши для системы вида (1.1) цель этой работы состоит в построении вероятностного представления классического решения задачи Коши для наиболее общего класса систем семилинейных параболических уравнений с диагональным вхождением членов старшего порядка, а также в построении замкнутой системы стохастических соотношений, позволяющих (независимо от (1.1)) построить такое классическое решение.

С этой целью мы вначале выделим два класса систем с диагональным вхождением членов старшего порядка. К первому классу отнесем системы параболических уравнений, в которых члены второго порядка входят диагонально, но с различными коэффициентами, а недиагональное вхождение допустимо лишь для членов нулевого порядка, что соответствует описанным выше предположениям о наличии общей системы собственных векторов у матриц D и M_i в системе вида (1.1). Ко второму классу отнесем системы, в которых члены второго порядка также входят диагонально, но с одинаковыми коэффициентами, тогда как члены первого и нулевого порядка входят недиагональным образом. Заметим, что, с точки зрения теории уравнений в частных производных, характерной чертой систем, принадлежащих этим двум классам, является справедливость принципа максимума в ослабленной форме. А именно, как было отмечено в [1], если во всех уравнениях системы второго класса отбросить недиагональные младшие члены, а в старших членах заморозить коэффициенты, то для нормы классических решений системы, полученной таким образом, имеет место принцип максимума в той же форме, что и для уравнения теплопроводности. Аналогичный результат справедлив и для систем первого класса [2].

Как уже упоминалось выше, целью этой работы является развитие вероятностного подхода к построению классических решений задачи Коши для семилинейных параболических систем первого и второго классов, а также для более общего класса систем, содержащего эти два класса. Вероятностные представления классического решения задачи Коши для семилинейных систем первого класса изучались в большом количестве как теоретических, так и прикладных работ, например, [3, 4]. Системы этого типа возникают в качестве математических моделей так называемых систем с переключениями режимов, играющих важную роль в различных приложениях и, в частности, в биологических и финансовых моделях [5]. Системы второго класса возникают в качестве математических моделей различных законов сохранения. Вероятностные представления классических решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений второго класса изучались в ряде работ Ю. Л. Далецкого и автора [6, 7].

В этой работе мы построим вероятностные представления классического решения задачи Коши для семейства семилинейных параболических систем, включающего как системы первого, так и второго класса. Системы такого типа возникают в качестве математических моделей законов сохранения при наличии различных режимов в физической системе или в том случае, когда законы сохранения в системе содержат уравнения для физических величин различной природы, как, например, уравнения сжимаемой гидродинамики или магнитогидродинамики. С другой стороны системы такого вида возникают как математические модели стаеобразования в задачах популяционной динамики [8, 9].

Наконец, отметим, что не только классические решения задачи Коши для систем описанных выше классов допускают вероятностные представления. В ряде работ построены также вероятностные представления для обобщенных и вязкостных решений этой задачи. Например, вероятностные представления вязкостных решений задачи Коши для систем первого класса были получены с помощью подхода, основанного на теории обратных стохастических уравнений, в работах [10, 11], а вероятностные представления вязкостных решений задачи Коши систем второго класса были построены в работах [12, 13] на основе комбинации результатов теории как прямых СДУ, так и обратных СДУ. Вероятностные представления обобщенных решений задачи Коши для таких систем были построены в работах [14, 15].

§2. Стохастические уравнения, ассоциированные с задачей Коши для систем первого класса

В этом параграфе мы построим вероятностное представление классического решения задачи Коши для системы линейных параболических уравнений первого класса, используя тот факт, что саму систему можно интерпретировать как одно скалярное уравнение относительно новой функции с модифицированным фазовым пространством.

Пусть d и M – натуральные числа и $V = \{1, \ldots, M\}$ – заданное дискретное множество, $v(s,x,l)$ – ограниченная функция, заданная на $G = [0,T] \times R^d \times V$, K_v, L_v – положительные константы, а $v(g)$ – вещественная функция, удовлетворяющая оценкам $\sup_{g\in G}|v(g)| \leqslant K_v$, $|v(s,x,l) - v(s,y,l)| \leqslant L_v\|x-y\|$, $x,y \in R^d$.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных параболических уравнений первого класса

$$\frac{\partial u_m}{\partial s} + \mathcal{L}_m^v u^m + [Q^v u]_m = 0, \quad u^m(s,x) = u_0^m(x), \tag{2.1}$$

где

$$\mathcal{L}_m^v u^m = \langle a^m(x,v), \nabla u^m\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^m(x,v)\nabla^2 u_m [A^m]^*(x,v)$$

и

$$[Q^v u]_m = \sum_{l=1}^{M} q_{ml}(x,v)u_l,$$

$$\operatorname{Tr} A^m \nabla^2 u [A^m]^* = \sum_{i,j,k=1}^{d} A_{ki}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} A_{jk}^m$$

и матрица $Q(x,v) = (q_{lm}(x,v))$ обладает свойствами Q-матрицы, т.е.

1) $q_{lm}(x,v)$ – борелевская, равномерно ограниченная по x и полилинейная по v функция для всех l, $m \in V$ и $x \in R^d$, $u \in R^M$

2) $q_{lm}(x,v) \geqslant 0$ для всех $x \in R^d$, $u \in R^M$ и $l \neq m$

3) $q_{mm}(x,v) = -\sum_{l\neq m} q_{ml}(x,u)$ для всех $x \in R^d$, $u \in R^M$, $m \in V$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – заданное вероятностное пространство, $w(t) \in R^d$ – определенный на нем стандартный винеровский процесс. Рассмотрим стохастическое уравнение относительно случайного процесса $(\xi(t), \gamma(t)) \in R^d \times V$

$$d\xi(t) = a^v(\xi(t), \gamma(t))\, dt + A^v(\xi(t), \gamma(t))\, dw(t),\ \xi(s) = x,\ \gamma(s) = m, \quad (2.2)$$

где $a : R^d \times V \times R^M \to R^d$, $A : R^d \times V \times R^M \to R^d \otimes R^d$ и

$$\mathbf{P}(\gamma(t + \Delta t) = l | \gamma(t) = j, (\xi(\theta), \gamma(\theta)), \theta \leqslant t\} = q^v_{jl}(\xi(t))\Delta t + o(\Delta t), \quad (2.3)$$

если $l \neq j$. Здесь и ниже мы для краткости используем обозначения вида $a^v(x, l) \equiv a(x, l, v(x, l))$.

В этом парграфе мы исследуем свойства решения системы (2.2), (2.3) и, предполагая, что $u_0(x, m)$ – ограниченная, дважды дифференцируемая функция, рассмотрим функцию $u(s, x, m)$, заданную соотношением

$$u(s, x, m) = \mathbf{E}\left[u_0(\xi_{s,x}(T), \gamma_{s,m}(T))\right], \quad (2.4)$$

и исследуем ее свойства.

Заметим, что дискретную компоненту $\gamma(\theta)$, заданную соотношением (2.3), можно представить в виде стохастического интеграла относительно случайной пуассоновской меры $p(dt, dz)$, определенной на $[0, T] \times R_+$ (см. [16, 17]).

Действительно, для $x \in R^d$ и $l, m \in V$, $l \neq m$ пусть $\Delta_{lm}(x)$ – последовательные замкнутые слева и открытые справа интервалы на положительной полуоси вида

$$\Delta_{12}(x, v) = [0, q^v_{12}(x)),\ \Delta_{13}(x, v) = [q^v_{12}(x), [q^v_{12}(x) + q^v_{13}(x))),\ \ldots$$

$$\Delta_{21}(x, v) = [q^v_1(x), q^v_1(x) + q^v_{21}(x)),$$

$$\Delta_{23}(x, v) = [q^v_1(x) + q^v_{21}(x)), q^v_1(x) + q^v_{21}(x) + q^v_{23}(x))), \ldots,$$

$$\Delta_{2,M-1}(x, v) = [q^v_1(x) + \sum_{m \neq 2, m=1}^{M-2} q^v_{2m}(x), q^v_1(x) + \sum_{m \neq 2, m=1}^{M-1} q^v_{2m}(x)),$$

$$\Delta_{2M}(x, v) = [q^v_1(x) + \sum_{m \neq 2, m=1}^{M-1} q^v_{2m}(x), q^v_1(x) + q^v_2(x)),$$

$$[\Delta_{31}(x, v) = [q^v_1(x) + q^v_2(x), q^v_1(x) + q^v_2(x) + q^v_{13}(x)),\ \ldots,$$

и так далее, имеющие длину $q_{lm}(x)$. Пусть $-q_{mm}(x, v) = q^v_m(x)$, $\Delta_{mm}(x, v) = \varnothing$ и $\Delta_{lm}(x, v) = \varnothing$, если $q_{lm}(x, v) = 0$ для $l \neq m$. Зададим функцию $g^v : R^d \times V \times R_+ \to R$ с помощью соотношения

$$g^v(x,l,z) = \begin{cases} m-l, & \text{если } z \in \Delta_{lm}(x,v), \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

или

$$g^v(x,l,z) = \sum_{m=1}^{M} (m-l) I_{\{z \in \Delta_{lm}(x,v)\}}. \tag{2.5}$$

Тогда стохастический дифференциал процесса $\gamma(t)$, переходная вероятность которого определена соотношением (2.3), имеет вид

$$d\gamma(t) = \int_0^\infty g^v(\xi(t), \gamma(t-), z)\, p\,(dt, dz), \tag{2.6}$$

где $p\,(dt, dz)$ – пуассоновская случайная мера с интенсивностью

$$\mathbf{E} p(dt, dz) = dt\, dz,$$

причем процессы $p\,([0,t), dz)$ и $w(t)$ независимы. Обозначим

$$\mathcal{F}_t = \sigma\big\{(\xi(s), \gamma(s)), s \leqslant t\big\}$$

– поток σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$, порожденный $w(t)$ и $p([0,t), dz)$.

Если $f(x,m)$ – дважды дифференцируемая по $x \in R^d$ скалярная функция, $m \in V$, а процессы $\xi(t)$ и $\gamma(t)$ имеют стохастические дифференциалы вида (2.2) и (2.6) соответственно, то в силу формулы Ито справедливо соотношение

$$f(\xi(t), \gamma(t)) - f(\xi(t_1), \gamma s)) = \int_s^t \mathcal{G}^v f(\xi(\theta), \gamma(\theta))\, d\theta + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2,$$

где

$$\mathcal{G}^v f(x,m) = \mathcal{L}^v_m f(x,m) + [Q^v f](x,m), \tag{2.7}$$

$$\mathcal{M}_1 = \int_s^t \langle \nabla f(\xi(\theta), \gamma(\theta), A^v(\xi(\theta), \gamma(\theta))\, dw(\theta)\rangle, \mathcal{M}_2$$
$$= \int_s^t \int_R [f(\xi(\theta), \gamma(\theta-) + h^v(\xi(\theta), \gamma(\theta-), z)) - f(\xi(\theta), \gamma(\theta-)] \widetilde{p}(\, d\theta, dz).$$

Ниже нам понадобится следующее условие.

Условие **C 2.1**:

1) Функция $v(s,x,m)$ непрерывна по s, липшицева по x и ограничена при всех $(s,x,m)\in[0,T]\times R^d\times V$;

2) Матричнозначная функция $Q^v(x)$ задана соотношением

$$\sum_{m\in V} q_{ml}(x,v)g(x,m)=\sum_{m\in V,m\neq l} q^v_{ml}(x)[g(x,m)-g(x,l)],\quad l\in V,$$

и удовлетворяет оценке $\|q^v_{lm}(x)-q^{v_1}_{lm}(y)\|\leqslant L\|x-y\|+K_{v,v_1}|v-v_1|$, $|q^v_{lm}(x)|\leqslant K|v_l|^2$;

3) Справедливы оценки:

$$\begin{gathered}\|a^v(x,m)\|^2+\|A^v(x,m)\|^2\leqslant C[1+\|x\|^2+\|v\|^2];\\ \|a^v(x,m)-a^{v_1}(y,m)\|^2+\|A^v(x,m)-A^{v_1}(y,m)\|^2\\ \leqslant L[\|x-y\|^2+L_{v,v_1}\|v-v_1\|^2].\end{gathered}$$

Здесь $\|x\|^2=\sum\limits_{k=1}^{d}|x_k|^2$, $x\in R^d$, $\|A\|^2=\sum\limits_{i,k=1}^{d}|A_{ik}|^2$, $A\in R^d\otimes R^d$, а K, L и C здесь и ниже обозначают абсолютные константы, которые могут изменяться при переходе от одного соотношения к другому.

Из результатов Скорохода [17] вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $v(t,x,m)$, $m=1,\dots M$ – заданные ограниченные липшицевы функции и коэффициенты $a^v(x)$, $A^v(x),q^v(x)$ удовлетворяют условию* **C 2.1**. *Тогда существует единственное решение системы*

$$d\xi(\theta)=a^v(\xi(\theta),\gamma(\theta))\,d\theta+A^v(\xi(\theta),\gamma(\theta)\,dw(\theta),\quad \xi(s)=x, \tag{2.8}$$

$$d\gamma(\theta)=g^v(\xi(\theta),\gamma(\theta),z)\,p(\,d\theta,dz),\quad \gamma(s)=l, \tag{2.9}$$

$\sup_{t\in[s,T]}\mathbf{E}\|\xi(t)\|^2\leqslant C\|x\|^2e^{C^1T}$.

Доказательство этого утверждения основано на том факте, что эволюцию процесса $\xi(t)$ можно рассматривать на случайных интервалах $[\tau_k,\tau_{k+1})$, покрывающих отрезок $[0,T]$. Здесь $\{\tau_k\}$ – набор моментов остановки, заданных соотношениями

$$\tau_0=0,\quad \tau_k=\inf\{t:t>\tau_{k-1},\gamma(t)\neq\gamma(\tau_{k-1})\}.$$

На каждом интервале $[\tau_{k-1},\tau_k)$ существование решения уравнения (2.8) гарантируется классической теоремой существования и единственности решения диффузионного СДУ, поскольку на $[\tau_k,\tau_{k+1})$ в силу **C 2.1** выполнены условия этой теоремы. Для любых начальных значений $\xi(0)=x, \gamma(0)=l$ на интервале $[0,\tau_1]$ положим

$$(\xi(t),\gamma(t)) = \begin{cases} (\xi(t),l), & 0 \leqslant t < \tau_1, \\ (\xi(\tau_1),\gamma(\tau_1)) & t=\tau_1. \end{cases}$$

Далее положим $\bar{\xi}=\xi(\tau_1), \bar{w}(t)=w(t+\tau_1)-w(\tau_1)$ и определим процесс $(\bar{\xi}(t),\bar{\gamma}(t))$ на интервале $[0,\tau_2-\tau_1]$ с начальными условиями $\bar{\xi},\gamma(\tau_1)$. Пусть

$$(\xi(t),\gamma(t)) = (\bar{\xi}(t-\tau_1),\bar{\gamma}(t-\tau_1)), \quad t\in[\tau_1,\tau_2].$$

Продолжая эту процедуру, мы построим процесс $(\xi(t),\gamma(t))$ на всем интервале $[0,T]$ для любого конечного T, задав его соотношениями $\tau_n \leqslant T$

$$(\xi(t),\gamma(t)) = (\bar{\xi}(t-\tau_{k-1}),\bar{\gamma}(t-\tau_{k-1})), \quad t\in[\tau_{k-1},\tau_k],\ k=0,\dots,n.$$

Приведем еще одно, полезное для дальнейшего, представление марковской цепи $\gamma(t)$,

$$\gamma(t)=\sum_{m=1}^{M} mI_{\{\gamma(t)=m\}}=\chi(t)(1,\dots,M)^*, \tag{2.10}$$

где $\chi(t)=(\chi_1(t),\dots,\chi_M(t))=(I_{\gamma(t)=1},\dots,I_{\gamma(t)=M})\in R^{1\times M}$, $(1,\dots,M)^*$ – вектор-столбец и $I_{\gamma(t)=M}$ – индикатор множества. Поскольку марковская цепь $\gamma(t)$ не зависит от $w(t)$, то

$$\chi(t+\Delta t)-\chi(t)-\int_t^{t+\Delta t}\chi(\theta)Q^v(x)\,d\theta$$

– это $\mathcal{F}_t$-мартингал и $\mathbf{E}[\chi(t+\Delta t)-\chi(t)-\int_t^{t+\Delta t}\chi(\theta)Q^v(x)\,d\theta|\mathcal{F}_t]=0$. При этом, если $H(x,\gamma)=I_{\{\gamma=l\}}$, $l\in V$, то $\mathcal{G}^vH(x,\gamma)=Q^v(x)H(x,\gamma)$.

Ниже нам понадобится также ряд результатов, распространяющих на рассматриваемый случай соответствующие результаты работы [18]. Поскольку, в предположении, что $v(s,x,m)$ – заданная липшицева ограниченная функция, коэффициенты системы вида (2.8), (2.9) удовлетворяют условиям работы [18], то можно воспользоваться результатами и методами этой работы для получения априорных оценок. Нужные для дальнейшего результаты будут представлены в виде ряда последовательных утверждений.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1. *Тогда процесс*

$$\zeta(t) = (\xi(t), \gamma(t)) \in R^d \times V,$$

удовлетворяющий (2.8), (2.9)*, непрерывен по вероятности и в среднем квадратичном.*

Доказательство. Покажем, что $P(\|\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)\| \geqslant C) \to 0$ при $\Delta t \to 0$, где $\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t) = (\xi(t+\Delta t) - \xi(t), \gamma(t)) + (\xi(t), [\gamma(t+\Delta t) - \gamma(t)])$. При этом

$$\mathbf{E}\|\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)\|^2 \leqslant 2[\mathbf{E}\|\xi(t+\Delta t) - \xi(t)\|^2 + \mathbf{E}[\gamma(t+\Delta t) - \gamma(t)]^2].$$

Требуемая оценка первого слагаемого, в силу липшицевости коэффициентов, вытекает из леммы Гронуолла, а для оценки второго слагаемого следует воспользоваться представлением (2.10), из которого следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\gamma(t+\Delta t) - \gamma(t)]^2 &= \mathbf{E}[\chi(t+\Delta t) - \chi(t)]^2 \\ &\leqslant M \sum_{j=1}^{M} \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}[\chi_j(t+\Delta t) - \chi_j(t)]^2 | \mathcal{F}_t\Big] \leqslant M\Delta t \to 0,\end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big[[\chi_i(t+\Delta t) - \chi_i(t)]^2 | \mathcal{F}_t\Big] = \mathbf{E}\Big[\big(I_{\{\gamma(t+\Delta t)=i\}} - I_{\{\gamma(t)=i\}}\big)^2 | \mathcal{F}_t\Big] \\ &= \mathbf{E}\Big[I_{\{\gamma(t+\Delta t)=i\}} | \mathcal{F}_t\Big] - 2I_{\{\gamma(t)=i\}}\mathbf{E}\Big[I_{\{\gamma(t+\Delta t)=i\}} | \mathcal{F}_t\Big] + I_{\{\gamma(t)=i\}} = O(\Delta t)\end{aligned}$$

почти наверно.

Для доказательства гладкой зависимости решения системы (2.8), (2.9) от параметра x рассмотрим, наряду с диффузионным процессом с переключениями $(\xi_{s,x}(t), \gamma_{s,l}(t))$, еще один диффузионный процесс с переключениями $(\widetilde{\xi}_{s,x+\alpha h}(t),\ \widetilde{\gamma}_{s,l}(t))$, где α – вещественное число и $h \in R^d$. Процесс $\widetilde{\xi}(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\widetilde{\xi}(t) = x + \alpha h + \int_s^t a^v(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta))\, d\theta + \int_s^t A^v(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta))\, dw(\theta), \tag{2.11}$$

$$\widetilde{\gamma}(t) = l + \int_s^t \int_R g^v(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta-), z) p(d\theta, dz). \tag{2.12}$$

Обозначим

$$m(t) = m^{\alpha,l}(t) = \frac{1}{\alpha}[\widetilde{\xi}(t) - \xi(t)] \tag{2.13}$$

и оценим величину

$$\begin{aligned} m^{\alpha,l}(t) &= h + \frac{1}{\alpha}\int_s^t [a^v(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta)) - a^v(\xi(\theta), \gamma(\theta))]d\theta \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\int_s^t [A^v(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta)) - A^v(\xi(\theta), \gamma(\theta))]\, dw(\theta) \\ &= h + \kappa^\alpha + \frac{1}{\alpha}\int_s^t [a^v(\widetilde{\xi}(\theta), \gamma(\theta)) - a^v(\xi(\theta), \gamma(\theta))]d\theta \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\int_s^t [A^v(\widetilde{\xi}(\theta), \gamma(\theta)) - A^v(\xi(\theta), \gamma(\theta))]\, dw(\theta), \end{aligned} \tag{2.14}$$

где

$$\begin{aligned} \kappa^\alpha = \frac{1}{\alpha}\int_s^t & [a(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta))) \\ & - a(\widetilde{\xi}(\theta), \gamma(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(\theta), \gamma(\theta)))]d\theta \\ & + \frac{1}{\alpha}\int_s^t [A(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta))) \\ & - A(\widetilde{\xi}(\theta), \gamma(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(\theta), \gamma(\theta)))]\, dw(\theta). \end{aligned} \tag{2.15}$$

□

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия* **C 2.1**. *Тогда*

$$\lim_{\alpha\to 0} \mathbf{E}\big[\sup_{\theta\in[s,T]} \|\kappa^\alpha(\theta)\|^2\big] = 0.$$

Доказательство. В рассматриваемых условиях из неравенства Гёльдера и оценки Дуба для мартингалов вытекает оценка

$$\mathbf{E}\sup_{s\leqslant\theta\leqslant T} \|\kappa^\alpha(\theta)\|^2 \leqslant \frac{2T}{\alpha^2}\mathbf{E}[\int_s^t \|a(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta)))$$

$$-a(\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta)))\|^2 d\theta$$
$$+\frac{8T}{\alpha^2}\|\int\limits_s^t [A(\widetilde{\xi}(\theta),\widetilde{\gamma}(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(\theta),\widetilde{\gamma}(\theta)))$$
$$-A(\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta)))]\,dw(\theta)\|^2].$$

Оценим первое слагаемое в правой части последнего неравенства. Пусть $\Delta t = [\alpha]^\beta, \beta > 2$ и $[\frac{T-s}{\Delta t}]$ обозначает целую часть числа $\frac{T-s}{\Delta t}$. Тогда

$$\mathbf{E}\left[\int\limits_s^t \|a(\widetilde{\xi}(\theta),\widetilde{\gamma}(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(\theta),\widetilde{\gamma}(\theta))) - a(\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta)))\|^2 d\theta\right]$$
$$= \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{[\frac{T-s}{\Delta t}]-1}\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(\theta),\widetilde{\gamma}(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(\theta),\widetilde{\gamma}(\theta)))\right.$$
$$\left. - a(\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta)))\|^2 d\theta\right] \leqslant \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{[\frac{T-s}{\Delta t}]-1}[n_{1k}+n_{2k}+n_{3k}]\right],$$

где

$$n_{1k} = K\mathbf{E}\left[\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(\theta),\widetilde{\gamma}(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(\theta),\widetilde{\gamma}(\theta)))\right.$$
$$\left. - a(\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(\theta)))\|^2 d\theta\right],$$
$$n_{2k} = K\mathbf{E}\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(\theta)))$$
$$- a(\widetilde{\xi}(k\Delta t),\gamma(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(k\Delta t),\gamma(\theta)))]\|^2 d\theta,$$
$$n_{3k} = K\mathbf{E}\left[\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t),\gamma(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(k\Delta t),\gamma(\theta)))\right.$$
$$\left. - a(\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta)))\|^2 d\theta\right].$$

Из оценок в условии **C 2.1** следует, что

$$n_{1k} = \mathbf{E} \int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta))) - a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta)))\|^2 d\theta \leqslant K \int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} L[1 + L_v(\theta)]\mathbf{E}\|\widetilde{\xi}(\theta) - \widetilde{\xi}(k\Delta t)\|^2 d\theta$$

и, при $L_v(\theta) \leqslant K_1$, мы получим оценку $n_1 \leqslant K|\Delta t|^2$. Аналогично можно получить оценку $n_3 \leqslant K|\Delta t|^2$.

Величину n_{2k} при $k = 0, 1, \dots, [\frac{T-s}{\Delta t}]$ представим в виде

$$n_{2k} \leqslant g_k^1 + g_k^2 + g_k^3, \tag{2.16}$$

где

$$g_k^1 = K\mathbf{E}\Big[\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta))) - a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(k\Delta at), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta)))\|^2 d\theta \Big],$$

$$g_k^2 = K\mathbf{E}\Big[\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(k\Delta t), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta))) - a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(k\Delta t), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(k\Delta t)))\|^2 d\theta \Big],$$

$$g_k^3 = K\mathbf{E}\Big[\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(k\Delta t), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(k\Delta t))) - a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(\theta)))\|^2 d\theta \Big].$$

Первое слагаемое в правой части (2.16) можно оценить следующим образом.

$$g_k^1 = \mathbf{E} \int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\xi(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta)))$$

$$- a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(k\Delta t), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta)))\|^2 d\theta$$

$$= \mathbf{E} \int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta)))$$

$$- a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(k\Delta t), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta)))\|^2 I_{\{\widetilde{\gamma}(\theta) \neq \widetilde{\gamma}(k\Delta t)\}} d\theta$$

$$= \mathbf{E} \sum_{i \in V} \sum_{j \neq i} \int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), i, v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), i))$$

$$- a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), j, v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), j)))\|^2 \times I_{\{\widetilde{\gamma}(\theta)=j\}} I_{\{\widetilde{\gamma}(k\Delta t)=i\}} d\theta$$

$$\leqslant K\mathbf{E} \int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} C[1 + [1 + K_v]\|\widetilde{\xi}(k\Delta t)\|^2] I_{\{\widetilde{\gamma}(k\Delta t)=i\}}$$

$$\times \mathbf{E}[I_{\{\widetilde{\gamma}(\theta)=j\}} | \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(k\Delta t) = i] d\theta$$

$$\leqslant K\mathbf{E} \int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} C[1 + [1 + K_v]\|\widetilde{\xi}(k\Delta t)\|^2] I_{\{\widetilde{\gamma}(k\Delta t)=i\}} \sum_{i \neq j} q_{ij}^v(\widetilde{\xi}(k\Delta t))(\theta - k\Delta t)\, d\theta$$

$$+ \int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} O(|\theta - k\Delta t|) d\theta \leqslant K|\Delta t|^2.$$

Аналогично можно проверить, что $g_k^2 \leqslant K|\Delta t|^2$.

Оценим, наконец, величину $g_k^3 = g_k^{31} + g_k^{32}$, где

$$\begin{aligned} g_k^{31} &= \mathbf{E} \int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(k\Delta t), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(k\Delta t))) \\ &\quad - a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(k\Delta t)))\|^2 d\theta, \\ g_k^{32} &= \mathbf{E} \int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(k\Delta t))) \\ &\quad - a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(\theta)))\|^2 d\theta, \end{aligned} \tag{2.17}$$

воспользовавшись каплингом марковских процессов [19].

Пусть $(\gamma(t), \widetilde{\gamma}(t))$ – пара марковских цепей с конечным множеством состояний $V \times V$ и

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}((\gamma(t+\Delta t), \widetilde{\gamma}(t+\Delta t)) = (j,m) | (\gamma(t), \widetilde{\gamma}(t)) = (i,l),\ (\xi(t), \widetilde{\xi}(t)) = (x, \widetilde{x})) \\ &\qquad = \begin{cases} \widetilde{q}^v_{(i,l),(j,m)}(x,\widetilde{x})\Delta t + o(\Delta t), & \text{если } (i,l) \neq (j,m), \\ 1 + \widetilde{q}^v_{(i,l),(i,l)}(x,\widetilde{x})\Delta t + o(\Delta t), & \text{если } (i,l) = (j,m). \end{cases} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Матрица $\bar{Q}^v(x,\widetilde{x}) = (\bar{q}^v_{(i,l),(j,m)}(x,\widetilde{x}))$ называется каплингом матриц $Q^v(x) = (q^v_{ij}(x))$ и $Q^v(\widetilde{x}) = (q^v_{lm}(\widetilde{x}))$ и удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}^v(x,\widetilde{x})F(k,l) &= \sum_{j,m \in V\times V} \bar{q}^v_{(i,l),(j,m)}(x,\widetilde{x})[F(j,m) - F(i,l)] \\ &= \sum_j \big(q^v_{ij}(x) - q^v_{lj}(\widetilde{x})\big)^+ [F(j,l) - F(i,l)] \\ &\quad + \sum_j \big(q^v_{lj}(\widetilde{x}) - q^v_{ij}(x)\big)^+ [F(i,j) - F(i,l)] \\ &\quad + \sum_j \big(q^v_{ij}(x) \wedge q^v_{lj}(\widetilde{x})\big)[F(j,j) - F(i,l)] \end{aligned} \tag{2.19}$$

для любых функций F, определенных на $V \times V$. Напомним, что при $\theta \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ процесс $\widetilde{\gamma}(\theta)$ допускает представление вида $\widetilde{\gamma}(\theta) = \sum\limits_{m\in V} m I_{\{\widetilde{\gamma}(\theta)=m\}}$. Используя описанный выше каплинг с переходной вероятностью вида (2.18) для $m, j, i, l \in V$, $j \neq i$ и $\theta \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t)$, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[I_{\{\gamma(\theta)=j\}}|\gamma(k\Delta t)=m,\widetilde{\gamma}(k\Delta t)=i,\xi(k\Delta t)=x,\widetilde{\xi}(k\Delta t)=\widetilde{x}\Big]\\ =\sum_{l\in V}\mathbf{E}\Big[I_{\{\gamma(\theta)=j\}}I_{\{\widetilde{\gamma}(\theta)=l\}}|\gamma(k\Delta t)=m,\\ \widetilde{\gamma}(k\Delta t)=i,\xi(k\Delta t)=x,\widetilde{\xi}(k\Delta t)=\widetilde{x}\Big]\\ =\sum_{l\in V}\widetilde{q}_{(m,i),(j,l)}(x,\widetilde{x})(\theta-k\Delta t)+o(\theta-k\Delta t)=O(\Delta t).\end{aligned}\tag{2.20}$$

Из (2.18) и (2.20) вытекает, что

$$\begin{aligned}g_k^{31}&=\mathbf{E}\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}\Big\|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(k\Delta t),v(\theta,\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(k\Delta t)))\\ &\quad-a(\widetilde{\xi}(k\Delta t),\gamma(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(k\Delta t)))\Big\|^2\,d\theta\\ &=\mathbf{E}\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}\Big\|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t),\gamma(\theta),v(\theta,\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(k\Delta t)))\\ &\quad-a(\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(k\Delta t),v(\theta,\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(k\Delta t)))\Big\|^2 I_{\{\gamma(\theta)\neq\widetilde{\gamma}(k\Delta t)\}}\,d\theta\\ &=\mathbf{E}\sum_{i\in V}\sum_{j\neq i}\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}\Big\|a(\widetilde{\xi}(k\Delta t),i,v(\theta,\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(k\Delta t)))\\ &\quad-a(\widetilde{\xi}(k\Delta t),j,v(\theta,\widetilde{\xi}(k\Delta t),\widetilde{\gamma}(k\Delta t)))\Big\|^2 I_{\{\widetilde{\gamma}(\theta)=j\}}I_{\{\widetilde{\gamma}(k\Delta t))=i\}}\,d\theta\\ &\leqslant K\mathbf{E}\sum_{i,m\in V}\sum_{j\neq i}\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}\Big[1+\Big\|\widetilde{\xi}(k\Delta t)\Big\|^2\Big]I_{\{\widetilde{\gamma}(k\Delta t)=i,\gamma(k\Delta t)=m\}}\\ &\quad\times\mathbf{E}\Big[\gamma(\theta)=j|\gamma(k\Delta t)=m,\widetilde{\gamma}(k\Delta t)=i,\xi(k\Delta t)=x,\widetilde{\xi}(k\Delta t)=\widetilde{x}\Big]\,d\theta\\ &=O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

Аналогично с учетом ограниченности функции $v(\theta,x,k)$ из (2.19) можно получить оценку $g_k^{32}=O((\Delta t)^2)$.

Поскольку, по предположению $\gamma(s) = \widetilde{\gamma}(s) = \gamma$, $\widetilde{\xi}(s) = \widetilde{x}$, то

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int\limits_s^{s+\Delta t} \Big\| a(\widetilde{\xi}(s), \widetilde{\gamma}(s), v(\theta, \widetilde{\xi}(s), \widetilde{\gamma}(s)))\\
&\qquad\qquad - a(\widetilde{\xi}(s), \gamma(s), v(\theta, \widetilde{\xi}(s), \gamma(s)))\Big\|^2 d\theta\\
&= \mathbf{E}\int\limits_s^{s+\Delta t} \Big\| a(\widetilde{x}, \gamma(s), v(\theta, \widetilde{x}, \gamma(s))) - a(\widetilde{x}, \gamma(\theta), v(\theta, \widetilde{x}, \gamma(\theta)))\Big\|^2 d\theta\\
&= \mathbf{E}\int\limits_s^{s+\Delta t} \sum_{j\neq l} \Big\| a(\widetilde{x}, l, v(\theta, \widetilde{x}, l) - a(\widetilde{x}, j, v(\theta, \widetilde{x}, j)) \Big\|^2 |_{\gamma(\theta)=j}\, d\theta\\
&= \int\limits_s^{s+\Delta t} \sum_{j\neq l} \Big\| a(\widetilde{x}, l, v(\theta, \widetilde{x}, l) - a(\widetilde{x}, j, v(\theta, \widetilde{x}, j))\Big\|^2 q^v_{lj}(\widetilde{x})\theta + o(\theta)]\, d\theta\\
&\leqslant K(\Delta t)^2.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Заметим, что приведенные выше рассуждения справедливы для всех $k = 1, \ldots, [\frac{T-s}{\Delta t}]$, и, следовательно, справедливы оценки

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\int\limits_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} &\Big\| a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \widetilde{\gamma}(\theta)))\\
&\qquad - a(\widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(\theta), v(\theta, \widetilde{\xi}(k\Delta t), \gamma(\theta)))\Big\|^2 d\theta \leqslant K(\Delta t)^2.
\end{aligned}$$

Из полученных оценок вытекает неравенство

$$\mathbf{E}\int\limits_s^T \Big\| a^v(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\alpha}(\theta)) - a^v(\widetilde{\xi}(\theta), \alpha(\theta))\Big\|^2 d\theta \leqslant \sum_{k=0}^{[\frac{T-s}{\Delta t}]} K(\Delta t)^2 \leqslant K(\Delta t).$$

Аналогично можно получить оценку и для стохастического интеграла

$$\mathbf{E}\Big\| \int\limits_s^T [A^v(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\alpha}(\theta)) - A^v(\widetilde{\xi}(\theta), \alpha(\theta))]\, dw(\theta)\Big\|^2 \leqslant K(\Delta t).$$

Возвращаясь к величине $\kappa^{\Delta}(\theta)$ вида (2.15), и принимая во внимание соотношение $\Delta t = \Delta x^{\beta}$, получим оценку

$$\mathbf{E}\left[\sup_{\theta\in[s,T]} \|\kappa^{\Delta}(\theta)\|^2\right] \leqslant \frac{K\Delta t}{[\Delta x]^2} = K[\Delta x]^{\beta-2} \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0, \quad (2.22)$$

поскольку $\beta > 2$. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть выполнено условие* **C 2.1** *и* $(\xi^v_{s,x}(t),\ \gamma^v_{s,\gamma}(t))$ *– решение системы* (2.8), (2.9). *Тогда справедливы оценки*

$$\mathbf{E}\left[\sup_{\theta\in[s,T]} |\xi_{\widetilde{x},\gamma}(\theta) - \xi_{x,\gamma}(\theta)|^2\right] \leqslant K|\widetilde{x} - x|^2,$$

где K зависит только от T, s и от констант в условии **C 2.1**.

Доказательство. Пусть $(\xi(\theta), \gamma(\theta))$ и $(\widetilde{\xi}(\theta), \widetilde{\gamma}(\theta)$ удовлетворяют системе (2.8) ,(2.9) и начальным условиям $\xi(s) = x, \gamma(s) = \gamma$ и $\widetilde{\xi}(s) = \widetilde{x}, \widetilde{\gamma}(s) = \gamma$ соответственно. Обозначим $\Delta = \widetilde{x} - x$ и оценим величину $\sup_{\theta\in[s,T_1]} \|\widetilde{\xi}(\theta) - \xi(\theta)\|$ для $T_1 \leqslant T$,

$$\sup_{\theta\in[s,T_1]} \|\widetilde{\xi}(\theta) - \xi(\theta)\|^2 \leqslant 3\Delta^2 + 3\sup_{\theta\in[s,T_1]} \|\zeta(\theta)\|^2 + 3\sup_{\theta\in[s,T_1]} \|\eta(\theta)\|^2,$$

где

$$\begin{aligned}
\zeta(\theta) = \int_s^\theta &[a^v(\widetilde{\xi}(t), \widetilde{\gamma}(t)) - a^v(\widetilde{\xi}(t), \gamma(t))]\,dt \\
&+ \int_s^\theta [A^v(\widetilde{\xi}(t), \widetilde{\gamma}(t)) - A^v(\widetilde{\xi}(t), \gamma(t))]\,dw(t), \\
\eta(\theta) = \int_s^\theta &[a^v(\widetilde{\xi}(t), \gamma(t)) - a^v(\xi(t), \gamma(t))]\,dt \\
&+ \int_s^\theta [A^v(\widetilde{\xi}(t), \gamma(t)) - A^v(\xi(t), \gamma(t))]\,dw(t).
\end{aligned}$$

Из (2.22) следует, что $\mathbf{E}\sup_{\theta\in[s,T_1]} \|\zeta(\theta)\|^2 \leqslant K\Delta^{\beta} = O(\Delta^{\beta}) = o(\Delta^2)$ $\beta > 2$, при этом из неравенства Гёльдера и неравенства Дуба для мартингалов получим

$$\mathbf{E}\sup_{\theta\in[s,T_1]}\|\eta(\theta)\|^2\leqslant 2\mathbf{E}\Big\|\int\limits_s^{T_1}[a^v(\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta))-a^v(\xi(\theta),\gamma(\theta))]\,d\theta\Big\|^2$$

$$+\,8\mathbf{E}\Big\|\int\limits_s^{T_1}[A^v(\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta))-A^v(\xi(\theta),\gamma(\theta))]\,dw(\theta)\Big\|^2$$

$$\leqslant K(T+1)\int\limits_s^{T_1}\mathbf{E}\big[\sup_{\theta\in[s,\theta]}\|\widetilde{\xi}(\theta)-\xi(\theta)\|^2\big]\,d\theta.$$

Отсюда в силу леммы Гроноулла следует оценка

$$\mathbf{E}\left[\sup_{\theta\in[s,T_1]}\|\widetilde{\xi}(\theta)-\xi(\theta)\|^2\right]\leqslant K\Delta^2.$$

Покажем далее, что при выполнении некоторых дополнительных условий процесс $\xi_{s,x}(\theta)$, удовлетворяющий (2.8), дифференцируем по начальным данным.

Пусть $\nabla_x a^v(x)=(\frac{\partial a^v}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial a^v}{\partial x_d})$, $\sup_x\|\nabla v(x)\|\leqslant K_v^1$ и $\nabla a(x,v)=\nabla_x a(x,v)+\nabla_v a(x,v)\nabla_x v$.

Будем говорить, что выполнено условие **C 2.2**, если выполнено условие **C 2.1** и справедливы оценки

$$\|\nabla_h^k a^v(x,m)\|^2+\|\nabla_h A^v(x,m)\|^2\leqslant K[1+K_v^1]\|h\|^{2k},\quad k=1,2.\qquad\square$$

Теорема 2.5. *Пусть выполнено условие* **C 2.2**. *Тогда решение* $\xi_{s,x}(t)$ *уравнения*

$$d\xi(\theta)=a^v(\xi(\theta),\gamma(\theta))\,d\theta+A^v(\xi(\theta),\gamma(\theta)\,dw(\theta),\quad \xi(s)=x,\qquad(2.23)$$

дважды дифференцируемо по начальным данным, процесс

$$\nu(t)=\nabla_h\xi_{s,x}(t)$$

удовлетворяет уравнению

$$d\nu(t)=h+\int\limits_s^t\nabla_{\nu(\theta)}a^v(\xi(\theta),\gamma(\theta))\,d\theta+\int\limits_s^t\nabla_{\nu(\theta)}A^v(\xi(\theta),\gamma(\theta))\,dw(\theta),$$

где $\nabla_{\nu(\theta)} a^v(\xi(\theta),\gamma(\theta)) = \langle [\nabla_x a^v(\xi(\theta),\gamma(\theta)) + \nabla_v A^v(\xi(\theta),\gamma(\theta))$ $\nabla_x v(\theta,\xi(\theta),\gamma(\theta))], \nu(\theta)\rangle$ *и справедлива оценка*

$$\mathbf{E}\|\nu(t)\|^2 \leqslant \exp\Big\{\int_s^t C[1+K_v^1(\theta)]\,d\theta\Big\}\|h\|^2. \tag{2.24}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\xi}(t)$ – решение уравнения (2.23) с начальным условием $\widetilde{\xi}(s) = x+\alpha h$. Поскольку коэффициенты $a^v(x,l)$, $A^v(x,l)$ СДУ (2.23) дважды дифференцируемы по x, то справедливо представление

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\int_0^t [a^v(\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta)) - a^v(\xi(\theta),\gamma(\theta))]\,d\theta \\
&\quad= \frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^1 \frac{d}{d\lambda} a^v(\xi(\theta)+\lambda(\widetilde{\xi}(\theta)-\xi(\theta)),\gamma(\theta))d\lambda\,d\theta \\
&\quad= \int_0^t \left[\int_0^1 \nabla a^v(\xi(\theta)+\lambda(\widetilde{\xi}(\theta)-\xi(\theta)),\gamma(\theta))d\lambda\right] m^{\Delta}(\theta)\,d\theta,
\end{aligned}$$

где $m^{\alpha}(t) = \frac{\widetilde{\xi}(t)-\xi(t)}{\alpha}$. Из предложения 2.4 следует, что для любого $\theta\in[s,T]$, $\widetilde{\xi}(\theta)-\xi(\theta)\to 0$ по вероятности при $\Delta\to 0$. Отсюда вытекает, что

$$\int_0^1 \nabla a^v(\xi(\theta)+\lambda(\widetilde{\xi}(\theta)-\xi(\theta)),\gamma(\theta))d\lambda \to \nabla a^v(\xi(\theta)\gamma(\theta)$$

по вероятности при $\alpha\to 0$. Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\int_0^t [A^v(\widetilde{\xi}(\theta),\gamma(\theta)) - A^v(\xi(\theta),\gamma(\theta))]\,dw(\theta) \\
&\quad= \frac{1}{\alpha}\int_0^t \left[\int_0^1 \frac{d}{d\lambda} A^v(\xi(\theta)+\lambda(\widetilde{\xi}(\theta)-\xi(\theta)),\gamma(\theta))d\lambda\right] dw(\theta) \\
&\quad= \int_0^t \left[\int_0^1 \nabla A^v(\xi(\theta)+\lambda(\widetilde{\xi}(\theta)-\xi(\theta)),\gamma(\theta))d\lambda\right] m^{\Delta}(\theta)\,dw(\theta)
\end{aligned}$$

и

$$\int_0^1 \nabla A^v(\xi(\theta)+\lambda(\widetilde{\xi}(\theta)-\xi(\theta)),\gamma(\theta))d\lambda \to \nabla A^v(\xi(\theta),\gamma(\theta))$$

по вероятности при $\alpha \to 0$. При этом приведенные в этом параграфе результаты позволяют доказать, что

$$\mathbf{E}\|m^\alpha(t)-\nu(t)\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{2.25}$$

Для того, чтобы проверить справедливость оценки (2.24), воспользуемся формулой Ито и свойствами коэффициентов СДУ (2.23), вытекающими из условия **C 2.2**, что приведет к оценке

$$\mathbf{E}\|\nu(t)\|^2 \leqslant 1+\int_0^t C[1+K_v^1(\theta)]\,\mathbf{E}\|\nu(\theta)\|^2\,d\theta,$$

откуда немедленно вытекает оценка (2.24).

С помощью аналогичных рассуждений можно также доказать существование вторых производных по начальным данным у процесса $\xi_{s,x}(t)$, удовлетворяющего (2.8). □

В заключение этого параграфа обсудим зависимость решения $(\xi^v_{s,x}(\theta),\gamma^v_{s,m}(\theta))$ системы, состоящей из уравнения (2.23) и уравнения

$$d\gamma(\theta)=g^v(\xi(\theta),\gamma(\theta),z)p\,(d\theta,dz), \quad \gamma(s)=m, \tag{2.26}$$

от функции v, а также свойства функции

$$u(s,x,m)=\mathbf{E}[u_0(\xi^v_{s,x}(T),\gamma_{s,m}(T))]. \tag{2.27}$$

Лемма 2.6. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1. *Тогда решение* $\xi^v_{s,x}(t)$ *уравнения* (2.23) *удовлетворяет следующим оценкам*

$$\mathbf{E}\|\xi^v_{s,x}(t)\|^2 \leqslant 3\Big[\|x\|^2+(T+1)\int_s^t [C_0+C_1K_v(\theta)]\,d\theta\Big]e^{CT},$$

$$\mathbf{E}\|\xi^v_{s,x,\gamma}(t)-\xi^v_{s,\widetilde{x},\gamma}(t)\|^2 \leqslant 3\|x-\widetilde{x}\|^2\exp\Big\{C\int_s^t L_v(\theta)\,d\theta\Big\},$$

$$\mathbf{E}\|\xi^v(t)-\xi^{\widetilde{v}}(t)\|^2 \leqslant K\int_s^t \|v(\theta)-\widetilde{v}(\theta)\|_\infty\,d\theta,$$

где $\|v\|_\infty = \sup_{R^d \times V} |v(x,\gamma)|$.

Доказательство этих оценок вполне аналогично доказательству утверждений лемм 2.3 и 2.4 с учетом оценок в условии **C 2.1**.

Теорема 2.7. *Пусть при каждом* $m \in V$ $u_0(x,m)$ *– дважды дифференцируемая ограниченная функция и выполнены условия теоремы* 2.4. *Тогда функция* $u(s,x,m)$ *вида* (2.27) *ограничена и дважды дифференцируема.*

Доказательство. Ограниченность функции $u(s,x,m)$ вытекает из ограниченности функции $u_0(x,m)$. Покажем, что функция $u(s,x,m)$ дифференцируема. Пусть $(s,x,m) \in Y$, $\leqslant \Delta < 1$, $\widetilde{x} = x + \Delta$ и

$$(\xi(\theta),\gamma(\theta)) = (\xi_{x,m}(\theta),\gamma_{x,m}(\theta)), \quad (\widetilde{\xi}(\theta),\widetilde{\gamma}(\theta)) = (\xi_{\widetilde{x},m}(\theta),\gamma_{\widetilde{x},m}(\theta)).$$

Из теоремы 2.5 следует, что процесс $\nu(\theta) = \nabla\xi(\theta)$ существует и непрерывен в среднем квадратичном относительно s и x. Оценим величину

$$\begin{aligned}\frac{u(s,\widetilde{x},m) - u(s,x,m)}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha}\mathbf{E}[u_0(\widetilde{\xi}(T),\widetilde{\gamma}(T)) - u_0(\xi(T),\gamma(T))] \\ &= \frac{1}{\alpha}\mathbf{E}[u_0(\widetilde{\xi}(T),\widetilde{\gamma}(T)) - u_0(\widetilde{\xi}(T),\gamma(T))] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\mathbf{E}[u_0(\widetilde{\xi}(T),\gamma(T)) - u_0(\xi(T),\gamma(T))].\end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, использовавшиеся при доказательстве леммы 2.4, получим

$$\frac{1}{\alpha^2}\mathbf{E}[\sup_{\theta\in[0,T]} |u_0(\widetilde{\xi}(T),\widetilde{\gamma}(T)) - u_0(\widetilde{\xi}(T),\gamma(T))|^2] \to 0 \quad \text{при}\, \alpha \to 0.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha}\mathbf{E}[|u_0(\widetilde{\xi}(T),\gamma(T)) - u_0(\xi(T),\gamma(T))] \\ &\qquad = \frac{1}{\alpha}\mathbf{E}\Big[\int_0^1 \frac{d}{d\lambda}u_0(\xi(T) + \lambda(\widetilde{\xi}(T) - \xi(T)),\gamma(T))d\lambda\Big] \\ &\qquad\quad = \mathbf{E}\Big[\langle m^\alpha(T), \int_0^1 \nabla u_0(\xi(T) + \lambda(\widetilde{\xi}(T) - \xi(T)),\gamma(T))\,d\lambda\rangle\Big],\end{aligned}$$

где $m^{\alpha}(\theta) = \frac{\widetilde{\xi}(\theta)-\xi(\theta)}{\alpha}$, то

$$\left|\frac{1}{\alpha}\mathbf{E}[u_0(\widetilde{\xi}(T),\gamma(T)) - u_0(\xi(T),\gamma(T))] - \mathbf{E}\left[\langle \nu(T), \nabla u_0(\xi(T),\gamma(T))\rangle\right]\right|$$

$$\leqslant \mathbf{E}\Big|\langle m^{\alpha}(T), \int_0^1 \nabla u_0(\xi(T) + \lambda(\widetilde{\xi}(T) - \xi(T)), \gamma(T))\, d\lambda\rangle$$

$$-\langle \nu(T), \nabla u_0(\xi(T),\gamma(T))\rangle\Big| = a_1 + a_2.$$

Здесь

$$a_1 = \mathbf{E}\Big|\Big\langle m^{\alpha}(T), \Big[\int_0^1 \nabla u_0(\xi(T) + \lambda[\widetilde{\xi}(T) - \xi(T)], \gamma(T))d\lambda - \nabla u_0(\xi(T),\gamma(T))\Big]\Big\rangle\Big|,$$

$$a_2 = \mathbf{E}\big|\langle [m^{\alpha}(T) - \nu(T)], \nabla u_0(\xi(T),\gamma(T))\rangle\big|.$$

При этом

$$a_2 \leqslant [\mathbf{E}\|\nabla u_0(\xi(T),\gamma(T))\|^2]^{\frac{1}{2}}[\mathbf{E}\|m^{\alpha}(T) - \nu(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant K[\mathbf{E}\|m^{\alpha}(T) - \nu(T)\|^2]^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad \text{при}\, \alpha \to 0.$$

Для того, чтобы получить оценку для a_1, заметим, что, в силу оценок в **C 2.2**, (2.25) и предложения 2.1, при $0 \leqslant \alpha < 1$ справедливо неравенство $a_2 \leqslant K$. Далее, как следует из предложения 2.1, $\widetilde{\xi}(T) \to \xi(T)$ по вероятности при $\alpha \to 0$. Отсюда вытекает, что при $\alpha \to 0$

$$\mathbf{E}\left\|\nabla u_0(\xi(T) + \lambda[\widetilde{\xi}(T) - \xi(T)], \gamma(T)) - \nabla u_0(\xi(T),\gamma(T))\right\|^2 \to 0$$

и, в силу неравенства Коши–Шварца, получаем, что

$$a_1 = \sqrt{\mathbf{E}\|\nu(T)\|^2}\Big(\mathbf{E}\Big\|\int_0^1 \nabla u_0(\xi(T) + \lambda[\widetilde{\xi}(T) - \xi(T)], \gamma(T))\, d\lambda$$

$$-\nabla u_0(\xi(T),\gamma(T))\Big\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Таким образом, мы показали, что при $\alpha \to 0$

$$\left|\frac{u(s,x,m) - u(s,\widetilde{x},m)}{\alpha} - \mathbf{E}[\langle \nu_{s,h}(T), \nabla u_0(\xi_{s,x}(T), \gamma_{s,m}(T))\rangle]\right| \to 0.$$

Аналогично можно проверить существование второй производной по x у функции $u(s,x,m)$ вида (2.27) при выполнении условия **C 2.2**. $\square$

§3. Вероятностная интерпретация семилинейных параболических систем первого класса

В этом параграфе мы рассмотрим стохастическую систему,

$$d\xi(\theta) = a^u(\xi(\theta),\gamma(\theta))\,d\theta + A^u(\xi(\theta),\gamma(\theta))\,dw(\theta), \quad \xi(s) = x, \tag{3.1}$$

$$d\gamma(\theta) = \int\limits_R h^u(\xi(\theta),\gamma(\theta-),z)p(d\theta,dz), \quad \gamma(s) = l, \tag{3.2}$$

$$u(s,x,m) = \mathbf{E}[u_0(\xi_{s,x}(T),\gamma_{s,m}(T))]. \tag{3.3}$$

и сформулируем условия, при которых функция $u(s,x,m)$ вида (3.3) является классическим решением задачи Коши

$$\frac{\partial u^m}{\partial s} + \mathcal{L}^u_m u^m + \sum_{l=1}^{M} q_{lm}(x,u)u^l = 0, \quad u^m(s,x) = u^m_0(x), \tag{3.4}$$

где L^u_m имеет вид (2.1).

Решением системы (3.1)–(3.3) назовем тройку

$$(\xi_{s,x}(t),\gamma_{s,m}(t),u(s,x,m)),$$

где $(\xi_{s,x}(t),\gamma_{s,m}(t))$ – двухкомпонентный $\mathcal{F}_t$-измеримый процесс, для которого равенства

$$\xi(t) = x + \int\limits_s^t a^u(\xi(\theta),\gamma(\theta))\,dt + \int\limits_s^t A^u(\xi(\theta),\gamma(\theta))\,dw(\theta), \tag{3.5}$$

$$\gamma(t) = l + \int\limits_s^t \int\limits_R h^u(\xi(\theta),\gamma(\theta),z)p(d\theta,dz) \tag{3.6}$$

выполняются с вероятностью 1, и функция $u(s,x,m)$ вида (3.3) – это ограниченная скалярная функция, заданная на $[0,T]\times R^d\times V$ и удовлетворяющая условию Липшица по x.

Для доказательства существования решения системы (3.1)–(3.3) рассмотрим систему последовательных приближений

$$d\xi^n(\theta) = a^{u^n}(\xi(\theta),\gamma^n(\theta))\,d\theta + A^{u^n}(\xi(\theta),\gamma^n(\theta))\,dw(\theta), \xi^n(s) = x, \tag{3.7}$$

$$\gamma^n(t) = h^{u^n}(\xi^n(\theta),\gamma^n(\theta-),z)p(d\theta,dz), \quad \gamma^n(s) = l, \tag{3.8}$$

$$u^{n+1}(s,x,m)=\mathbf{E}[u_0(\xi^n_{s,x}(T),\gamma^n_{s,m}(T))]. \tag{3.9}$$

Отметим, что на каждом шаге последовательных приближений мы имеем дело со стохастическим уравнением (3.7), коэффициенты которого зависят от марковской цепи и удовлетворяют условию **C 2.1**. В силу предложения 2.1 решение СДУ (3.7) существует и единственно. При этом из (3.9) и ограниченности функции $u_0(x,m)$ следует, что последовательность функций $u^{n+1}(s,x,m)$ равномерно ограничена. Покажем также, что последовательность $u^{n+1}(s,x,m)$ равностепенно непрерывна, для чего достаточно показать, что последовательность $\nabla u^n(s,x,m)$ равномерно ограничена.

Обозначим

$$K_0=\sup_x|u_0(x,m)|,\quad K_v(t)=\sup|v(s,x,m)|,\quad K^1_v=\sup\|\nabla v(s,x,m)\|,$$

и пусть Θ – подпространство пространства $C_b([s,T]\times R^d\times V)$ непрерывных ограниченных функций с нормой

$$\|v_m\|_\Theta=\sup_{\theta\in[s,T]}\sup_x|v(\theta,x,m)|,\quad m\in V,$$

состоящее из функций v_l, удовлетворяющих условию Липшица.

Лемма 3.1. *Пусть выполнено условие* **C 2.2** *и* $(\xi_{s,x}(t),\ \gamma_{s,m}(t))$ *– решение системы* (2.8)*,* (2.9) *и*

$$u(s,x,m)=Eu_0(\xi_{s,x}(T),\gamma_{s,m}(T)).$$

Тогда существует такой отрезок $[T_1,T]$ *и такая положительная ограниченная на этом отрезке функция* $M(s)$*, что из оценок*

$$\|v(s,x,m)-v(s,\widetilde{x},m)\leqslant M(s)\|x-\widetilde{x}\|^2,\quad \sup_x\|\nabla v(s,x,m)\|^2\leqslant M(s)$$

вытекают оценки

$$\|u(s,x,m)\|^2\leqslant K_{u_0},\quad \|u(s,x,m)-u(s,\widetilde{x},m)\leqslant M(s)\|x-\widetilde{x}\|^2,$$
$$\sup_x\|\nabla u(s,x,m)\|^2\leqslant M(s).$$

Доказательство. Заметим, что для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что существует такая непрерывная функция $M(s)$, ограниченная на некотором временном интервале $[T_1,T]$, что из оценки

$$\sup_x\|\nabla v(s,x,m)\|^2\leqslant M(s)$$

следует оценка

$$\sup_x \|\nabla u(s,x,m)\|^2 \leqslant M(s),$$

где

$$\nabla u(s,x,m) = \mathbf{E}[\langle \nabla u_0(\xi_{s,x}(T), \gamma_{s,m}(T)), \nu(T)\rangle] \text{ при } s \in [T_1, T].$$

Оценим функцию

$$\nabla_h u(s,x,m) = \mathbf{E}[\langle \nabla u_0(\xi_{s,x}(T), \gamma_{s,m}(T)), \nu(T)\rangle],$$

воспользовавшись оценкой (2.24),

$$\sup_x |\langle h, \nabla u(s,x,m)\rangle|^2 \leqslant K_{u_0}\mathbf{E}\|\nu(T)\|^2$$

$$\leqslant K_{u_0} \exp\left\{ \int_s^t C[1 + K_v^1(\theta)]\, d\theta \right\} \|h\|^2.$$

Пусть $M(s)$ – решение интегрального уравнения

$$M(s) = K_0 exp\left\{ \int_s^T C[1 + M(\theta)] M(\theta)\, d\theta \right\}$$

или, эквивалентно, решение задачи Коши

$$\frac{dM}{ds} = -C[1 + M(s)]M(s), \quad m(T) = K_0.$$

Тогда, как нетрудно проверить,

$$M(s) = \frac{K_0 e^{C(T-s)}}{1 + K_0 - K_0 e^{C(T-s)}} \tag{3.10}$$

является ограниченной функцией при $s \in [T_1, T]$, где $\delta = T - T_1$ удовлетворяет оценке

$$\delta < \frac{1}{C} \ln[1 + \frac{1}{K_0}]. \tag{3.11}$$

□

Лемма 3.2. *Пусть $\xi^n(t)$ – случайные процессы, заданные соотношениями (3.7), (4.6). Тогда существует интервал $[T_1, T]$, такой что система функций*

$$\nabla u^n(s,x,m) = E\langle \nabla u_0(\xi^{n-1}_{s,x}(T), \gamma^{n-1}_{s,m}(T)), \nu^{n-1}(T)\rangle$$

равномерно ограничена при всех $s \in [T_1, T]$.

Утверждение этой леммы вытекает из результатов леммы 3.1.

Теорема 3.3. *Пусть выполнено условие* **C 2.2** *и* $u_0(x,m)$ *– дифференцируемая по* x *ограниченная функция* $\forall m \in V$. *Тогда семейство функций* $u^n(s,x,m)$ *вида* (3.3) *равностепенно непрерывно и система* (3.1)–(3.3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Из леммы 3.2 следует, что при каждом $s \in [T_1,T]$ справедлива оценка $\sup_{x,m} \|\nabla u^n(s,x,m)\|^2 \leqslant M(s)$ где функция $M(s)$, заданая соотношением (3.10), является ограниченной функцией на интервале $[T_1,T]$, длина δ которого удовлетворяет оценке (3.11). Следовательно, при каждом $m \in V, s \in [T_1,T]$ семейство функций $u^n(s,x,m)$, заданное соотношением (3.9), равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно, откуда, в силу теоремы Арцела–Асколи, следует, что существует непрерывная по x предельная функция $u^(s,x,m)$ при каждом $s \in [T_1,T], m \in V$.

Обозначим

$$r^n(s,x,m) = |u^{n+1}(s,x,m) - u^n(s,x,m)|^2 \quad \text{и} \quad \alpha^n(s) = \sup_x r^n(s,x,m).$$

Используя оценки леммы 2.4, получим

$$r^n(s,x,m) \leqslant 2K_0^1(T+1) \int_s^t L_{u^{n+1},u^n} \mathbf{E} \|u^n(\theta,\gamma^n(\theta))$$

$$- u^{n-1}(\theta,\gamma^{n-1}(\theta))\|_\Theta^2 \, d\theta \, e^{K \int_s^t M(\theta)\, d\theta},$$

$T_1 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Итерируя полученную оценку, придем к неравенству

$$r^n(s,x,m) \leqslant \kappa^n \int_s^t \dots \int_s^{t_n} \|u^1(\theta_n,m) - u_0(m)\|_\Theta \, d\theta_n \dots d\theta, \qquad (3.12)$$

где κ зависит от $T, T_1, u_0(m)$ и констант в оценках условий **C 2.2**, поскольку ограниченность функций $u^n(s,x,m)$ гарантирована леммами 3.2 и 3.3. Равномерная ограниченность функций $u^n(s,x,m)$ позволяет получить оценку $\|u^1(s,m) - u_0(m)\|^2 \leqslant \text{const} < \infty$ и, следовательно,

$$\|u^n(s,m) - u^{n-1}(s,m)\|_\Theta^2 \leqslant \frac{\kappa^n}{n!} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Аналогично можно показать, что

$$r^{n,p}(s,x,m) = |u^n(s,x,m) - u^p(s,x,m)|^2 \to 0 \quad \text{при } n,p \to \infty,$$

равномерно по s, x, т.е. семейство функций $u^n(s,x,m)$ является фундаментальным семейством в пространстве $C_b([T_1,T]\times R^d\times V)$. Таким образом, при каждом m семейство $u^n(s,x,m)$ равномерно по s,x сходится к предельной функции $u(s,x,m)$. При этом предельная функция $u(s,x,m)$ удовлетворяет условию Липшица по x, поскольку, в силу леммы 3.2, справедлива оценка

$$|u^n(s,x,m)-u^n(s,\widetilde{x},m)|^2\leqslant M(s)\|x-\widetilde{x}\|^2,$$

где $M(s)$ задана соотношением (3.10) и эта оценка равномерна по n.

Покажем, наконец, что решение системы (3.1)–(3.3) единственно. Предположим противное, т.е. пусть существуют две тройки

$$(\xi(t),\gamma(t),u(s,x,m)) \quad \text{и} \quad (\eta\,(t),\gamma(t),\,g\,(s,x,m)),$$

удовлетворяющие (3.1)–(3.3) где u и g – ограниченные липшицевы функции. Оценим разность

$$\begin{aligned}|u(s,x,m)-g(s,x,m)|^2&\leqslant L_0\,\mathbf{E}\,\|\xi(t)-\eta(t)\|^2\\ &\leqslant\int\limits_s^T L_0[1+L_{u,g}]\,\mathbf{E}\,\|\xi(\theta)-\eta(\theta)\|^2\,d\theta\\ &+\int\limits_s^T L_{u,g}|u(\theta,\xi(\theta),\gamma(\theta))-g(\theta,\xi(\theta),\gamma(\theta))|\,d\theta\end{aligned}\tag{3.13}$$

При этом, воспользовавшись оценками в условии **C 2.1** и леммой Гронуолла, получим

$$\begin{aligned}\chi(t)=\mathbf{E}\,\|\xi(t)-\eta(t)\|^2&\leqslant\int\limits_s^T C\,\mathbf{E}\,[1+L_{u,g}]\|\xi(\theta)-\eta(\theta)\|^2\,d\theta\\ &+\int\limits_s^T\mathbf{E}\,\|v(\theta,\xi(\theta),\gamma(\theta))-g(\theta,\xi(\theta),\gamma(\theta))\|^2\,d\theta\\ &\leqslant\int\limits_s^T C\;\mathbf{E}\,\|v(\theta,\xi(\theta),\gamma(\theta))-g(\theta,\xi(\theta),\gamma(\theta))\|^2\,d\theta\,e^{\int_s^t[1+L_u(\tau)]d\tau}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Возвращаясь к (3.13), получим

$$|u(s,x,m)-g(s,x,m)|^2 \leqslant \int_s^T C\mathbf{E}\|u(\theta,\xi(\theta),\gamma(\theta))-g(\theta,\xi(\theta),\gamma(\theta))\|^2\,d\theta\, e^{\int_s^t [1+L_u(\tau)]d\tau}$$

и, следовательно, для функции $m(s) = \sup_{x,m}|u(s,x,m)-g(s,x,m)|$ получим оценку $m(s) \leqslant K\int_s^T m(\theta)\,d\theta$, из которой, в силу леммы Гронуолла, вытекает соотношение $m(s)=0$, что завершает доказательство единственности решения системы (3.1)–(3.3) в силу теоремы о единственности решения стохастического уравнения с липшицевыми коэффициентами. □

Далее из теоремы 2.5 и теоремы 3.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* **C 2.2** *и* $u_0(x,m)$ *– дважды дифференцируемая ограниченная функция. Тогда функция* $u(s,x,m)$ *вида* (3.3) *дважды дифференцируема и представляет собой единственное классическое решение системы* (3.4).

Доказательство. Гладкость функции $u_0(x,m)$ и гладкая зависимость процесса $\xi_{s,x}(t)$ от начальных данных позволяют доказать гладкость функции $u(s,x)$ вида (3.3). Поскольку в условиях теоремы функция $u(s,x,m) = \mathbf{E}\,u_0(\xi_{s,x}(T),\gamma_{s,m}(T))$ дважды дифференцируема, то применяя формулу Ито и вычисляя математическое ожидание, получим соотношение

$$\mathbf{E}\,u(t,\xi_{s,x}(t),\gamma_{s,m}(t)) = u(s,x,m)+\int_s^t \mathbf{E}\left[\frac{\partial u(\theta,\xi(\theta),\gamma(\theta))}{\partial\theta}+\mathcal{L}^u u(\theta,\xi(\theta),\gamma(\theta))\right]d\theta,$$

из которого следует, что $u(s,x,m)$ является классическим решением задачи (3.4). Для доказательства единственности решения (3.4) предположим обратное, т.е. предположим, что существует два классических решения $u(s,x,m)$ и $v(s,x,m)$, причем функция $u(s,x,m)$ задана соотношением (3.3). Тогда, как нетрудно проверить с помощью формулы Ито, поскольку $v(s,x,m)$ – дважды дифференцируемая по x и дифференцируемая по s функция, то случайный процесс

$\kappa(\theta) = v(\theta, \xi(\theta), \gamma(\theta))$ удовлетворяет соотношению

$$dv(\theta, \xi(\theta), \gamma(\theta)) = \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} + \mathcal{L}^u v(\theta, \xi(\theta), \gamma(\theta))\right] d\theta$$
$$+ Q^u v(\theta, \xi(\theta), \gamma(\theta))\, d\theta + \langle \nabla v(\theta, \xi(\theta), \gamma(\theta)), A^u(\theta, \xi(\theta), \gamma(\theta))\, dw(\theta)\rangle.$$

Интегрируя последнее соотношение по θ от s до T, получим равенство

$$\mathbf{E}\left[v(T, \xi_{s,x}(T), \gamma_{s,m}(T))\right] - v(s, x, m)$$
$$= \int_s^T \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} + \mathcal{L}^u v(\theta, \xi_{s,x}(\theta), \gamma_{s,m}(\theta))\right] d\theta + \int_s^T Q^u v(\theta, \xi_{s,x}(\theta), \gamma_{s,m}(\theta)) d\theta = 0.$$

При этом последнее равенство вытекает из того факта, что $v(s, x, m)$ – классическое решение задачи (3.4). Таким образом, $v(s, x, m)$ допускает представление

$$v(s, x, m) = \mathbf{E}\left[u_0(\xi_{s,x}(T), \gamma_{s,m}(T))\right]$$

и, следовательно, $v(s, x, m) = u(s, x, m)$, что завершает доказательство теоремы. □

§4. Вероятностная интерпретация систем второго класса и комбинированных систем

В этом параграфе мы опишем вероятностную интерпретацию классической задачи Коши для семилинейных параболических систем второго класса. Для простоты мы рассмотрим лишь семилинейные системы и приведем здесь лишь те результаты этой теории, которые понадобятся нам ниже. Доказательства этих результатов можно найти в работах [6, 14] и монографии [7].

Рассмотрим задачу Коши для системы параболических уравнений второго класса

$$\frac{\partial u_k}{\partial s} + \mathcal{L}^u u_k + \sum_{l=1}^{d_1} \sum_{i=1}^{d} B^i_{lk}(x, u) \nabla_i u_l + \sum_{l=1}^{d_1} c_{lk}(x, u) u_l = 0, \tag{4.1}$$

$$u_k(T, x) = u_{k0}(x), \tag{4.2}$$

где $\mathcal{L}^u u_k = a(x, u) \cdot \nabla u_k + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A^*(x, u) \nabla^2 u_k A(x, u)$, и построим вероятностное представление ее классического решения.

Наряду с этим, мы сведем решение задачи (4.1), (4.2) к решению соответствующей системы стохастических уравнений, причем существование и единственность решения стохастической системы можно доказать при более слабых условиях на коэффициенты $a(x,u), A(x,u)$ и начальную функцию $u_0(x)$. Далее, мы сформулируем условия, гарантирующие эквивалентность обеих задач. В заключение этого параграфа мы покажем, что аналогичные результаты справедливы и для класса нелинейных параболических систем, включающего системы как первого, так и второго класса.

Будем говорить что выполнено условие **C 4.1**, если при $u \in R^{d_1}, x \in R^d$, $y \in R^d, v \in R^{d_1}$
1. $\|a(x,u)\|^2 + \operatorname{Tr} A^2(x,u) \leqslant K[1+\|x\|^2] + C_u\|u\|^2$,

$\|a(x,u)-a(y,v)\|^2 + \operatorname{Tr}[A(x,u)-A(y,v)]^2 \leqslant L\|x-y\|^2 + L_{u,v}\|u-v\|^2.$

2. $B^i_{ml} = \sum\limits_{k=1}^{d} C^k_{ml}A_{ki}$ и коэффициенты $c(x,u) \in R^{d_1}\otimes R^{d_1}$, $C(x,u) \in R^{d_1}\otimes R^{d_1}\otimes R^d$ удовлетворяют оценкам

$$\|c(x,u)h\|^2 + \operatorname{Tr} C^2(x,u)h \leqslant K[1+C_u\|u\|^2]\|h\|^2,$$

$$\|[c(x,u)-c(y,v)]h\|^2+\|[C(x,u)-C(y,v)]h\|^2 \leqslant [L\|x-y\|^2+L_{u,v}|u-v|^2]\|h\|^2,$$

а функция u_0 удовлетворяет оценкам

$$\sup_x \|u_0(x)\| \leqslant K_0 < \infty, \quad \|u_0(x)-u_0(y)\|^2 \leqslant L_0\|x-y\|^2.$$

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$d\xi_{s,x}(\theta) = a^u(\xi_{s,x}(\theta))\,d\theta + A^u(\xi_{s,x}(\theta))\,dw(\theta), \quad \xi(s)=x, \tag{4.3}$$

$$d\eta(\theta) = c^u(\xi_{s,x}(\theta))\eta(\theta)\,d\theta + C^u(\xi_{s,x}(\theta))(\eta(\theta),\,dw(\theta)), \tag{4.4}$$

$$\langle h, u(s,x)\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle], \quad \eta(s)=h\in R^{d_1}. \tag{4.5}$$

Заметим, что если $u(s,x)$ – классическое решение задачи (4.1), (4.2), то условие **C 4.1** гарантирует выполнение условий теоремы существования и единственности решения стохастического уравнения. После этого, применяя формулу Ито, нетрудно проверить, что функция $u(s,x)$, заданная соотношением (4.5), удовлетворяет (4.1). Другими словами, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие* **C 4.1** *и* $u(s,x)$ *– единственное классическое решение задачи* (4.1), (4.2). *Тогда существует единственное решение стохастической системы* (4.3)–(4.5) *и соотношение* (4.5) *задает вероятностное представление решения задачи Коши* (4.1), (4.2).

Будем говорить, что выполнено условие **C 4.2**, если все коэффициенты $a^u(x), A^u(x)$, $c^u(x)$, $C^u(x)$, а также функция u_0 удовлетворяют условию **C 4.1** вместе с производными до второго порядка.

Как было показано в работах [6, 7], справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.2. *Пусть выполнено условие* **C 4.2**. *Тогда существует единственное решение* $(\xi_{s,x}(t), \eta_{s,h}(t), u(s,x))$ *системы СДУ* (4.3)–(4.5), *определенное для всех* s *из некоторого интервала,* $s \in [T_1, T]$, $T_1 < T$, *длина которого зависит от коэффициентов* $a_u(x), A_u(x)$, $c_u(x), C_u(x)$ *и функции* u_0. *При этом случайный процесс* $\xi(t)$ $\mathcal{F}_t$*-измерим и обладает марковским свойством, а процесс* $\eta(t)$ *порождает мультипликативный операторный функционал* $S(t,s)$ *процесса* $\xi(t)$ *по формуле* $\eta(t) = S(t,s)h$.

Теорема 4.3. *Пусть выполнено условие* **C 4.2**. *Тогда существует единственное классическое решение задачи Коши* (4.1), (4.2), *определенное для всех* $s \in [T_1, T]$ *из некоторого интервала, длина* $\delta = |T - T_1|$ *которого зависит от коэффициентов* $a_u(x), A_u(x)$, $c_u(x), C_u(x)$ *и функции* $u_0(x)$.

Приведем, наконец, одно важное наблюдение, показывающее, что систему (4.1), (4.2) можно свести к скалярному уравнению относительно некоторой скалярной функции.

Введем обозначения $\kappa = (x, h)$,

$$q(\kappa) = \begin{pmatrix} a^u(x) \\ c^u(x)h \end{pmatrix}, Q^u(\kappa) = \begin{pmatrix} A^u(x) & 0 \\ 0 & C^u(x)h \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Важным характеристическим свойством системы (4.3)–(4.5) является тот факт, что эта система эквивалентна скалярному уравнению для функции $\Phi(s, x, h) = \langle h, u(s, x) \rangle$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} Q^*(x,h) \nabla^2 \Phi Q(x,h) + \langle q(x,h), \nabla \Phi \rangle = 0, \tag{4.7}$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} Q^* \nabla^2 \Phi(s,x,h) Q &= A^*_{ki} \frac{\partial^2 \Phi(s,x,h)}{\partial x_i \partial x_j} A_{jk} + 2C^{lm}_k h_l \frac{\partial^2 \Phi(s,x,h)}{\partial x_j \partial h_m} A_{jk} \\ &= A^*_{ki} \frac{\partial^2 \Phi(s,x,h)}{\partial x_i \partial x_j} A_{jk} + 2C^{lm}_k h_l \frac{\partial^2 \Phi(s,x,h)}{\partial x_j \partial h_m} A_{jk}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже, если не оговорено противное, мы будем предполагать суммирование по повторяющимся индексам. Из линейности $\Phi(s,x,h)$ по h вытекает, что $\frac{\partial^2\Phi(s,x,h)}{\partial h_q \partial h_p} \equiv 0$. Кроме того

$$\langle q, \nabla\Phi(s,x,h)\rangle = \sum_j a_j \frac{\partial\Phi(s,x,h)}{\partial x_j} + \sum_{m,l} c_{lm} h_m \frac{\partial\Phi(s,x,h)}{\partial h_l}.$$

Объединим рассмотрения двух предыдущих параграфов с результатами, приведенными в этом параграфе. Это позволит рассмотреть достаточно общий класс систем с диагональным вхождением старших членов с различными коэффициентами и недиагональным вхождением всех младших членов.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных параболических уравнений, обобщающей линейные системы первого и второго класса,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k(x,m)}{\partial s} + \mathcal{L}_m(x)u_k(x,m) + \sum_{j=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d} B^i_{jk}(x,m)\nabla_i u_j(x,m) \\ + \sum_{j=1}^{d_1} c_{jk}(x,m)u_j(x,m) + \sum_{l=1}^{M} q_{ml}(x)u_k(x,l) = 0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где

$$\mathcal{L}_m(x)u_k(x,m) = \langle a_m(x), \nabla u^m_k(x)\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^*_m(x)\nabla^2 u^m_k(x) A_m(x),$$

$u^m_k(x) \equiv u_k(x,m)$, и построим вероятностное представление ее классического решения.

Заметим, прежде всего, что систему (4.8) можно записать в виде одного скалярного уравнения относительно функции

$$\Phi(s,x,h,m) = \Phi(s,x,h,m) = \langle h, u(s,x,m)\rangle.$$

Соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} N^*_m(x,h)\nabla^2\Phi N_m(x,h) + \langle n_m(x,h), \nabla\Phi\rangle = 0, \tag{4.9}$$

где

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr} N_m^* \nabla^2 \Phi(s,x,h,m) N_m \\ &= A_{ki}^m \frac{\partial^2 \Phi(s,x,h,m)}{\partial x_i \partial x_j} A_{jk}^m + 2C_k^{pq}(m) h \frac{\partial^2 \Phi(s,x,h,m)}{\partial x_j \partial h_q} A_{jk} \langle n, \nabla \Phi(s,x,h)\rangle \\ &\qquad = a_j(m) \frac{\partial \Phi(s,x,h,m)}{\partial x_j} + c_{qp}(m) h_q \frac{\partial \Phi(s,x,h,m)}{\partial h_p}.\end{aligned}$$

При этом из линейности Φ по h вытекает, что $\frac{\partial^2 \Phi(s,x,h,m)}{\partial h_q \partial h_p} \equiv 0$.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений, ассоциированную с задачей Коши (4.8),

$$d\xi(t) = a(\xi(t), \gamma(t))\, dt + A(\xi(t), \gamma(t))\, dw(t), \xi(s) = x, \tag{4.10}$$

$$d\gamma(t) = \int\limits_R h(\xi(t), \gamma(t), z) p(dt, dz), \quad \gamma(s) = l, \quad \eta(s) = h, \tag{4.11}$$

$$d\eta(\theta) = c(\xi_{s,x}(\theta), \gamma(\theta)) \eta(\theta)\, d\theta + C(\xi_{s,x}(\theta), \gamma(\theta))(\eta(\theta),\, dw(\theta)). \tag{4.12}$$

Система уравнений (4.10), (4.11) была изучена в п.2. Поскольку коэффициенты уравнения (4.12) удовлетворяют условиям п.2, то для этого уравнения также справедливы все результаты п.2. Используя эти результаты и свойства мультипликативных операторных функционалов, нетрудно проверить, что функция $u(s,x,m)$, заданная соотношением

$$\langle h, u(s,x,m)\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta(T), u_0(\xi_{s,x}(T), \gamma_{s,m}(T))\rangle], \tag{4.13}$$

непрерывна и ограничена по x, если функция $u_0(x,m)$ непрерывна и ограничена. Если при этом коэффициенты $a(x,m,u)$, $A(x,m,u)$, $c(x,m,u)$, $C(x,m,u)$ и функция $u_0(x,m)$ дважды дифференцируемы по x, то и функция $u(s,x,m)$ дважды дифференцируема по x. Применяя к функции $\Phi(s,x,h,m) = \langle h, u(s,x,m)\rangle$ и процессам $(\xi(\theta), \gamma(\theta), \eta(\theta))$ формулу Ито, можно проверить, что функция $u(s,x,m)$ вида (4.13) удовлетворяет (4.8).

Применим полученные выше результаты к построению вероятностных представлений классического решения задачи Коши для семилинейной параболической системы

$$\frac{\partial u_k(x,m)}{\partial s} + \mathcal{L}^u_m u_k(x,m) + \sum_{j=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d} B^{i,u}_{jk}(x,m)\nabla_i u_j(x,m)$$
$$+ \sum_{j=1}^{d_1} c^u_{jk}(x,m)u_j(x,m) + \sum_{l=1}^{M} q^u_{ml}(x)u_k(x,l) = 0, \tag{4.14}$$

$$u(T,x,m) = u_0(x,m), \tag{4.15}$$

где

$$\mathcal{L}^u_m u_k(x,m)$$
$$= \langle a(x,m,u), \nabla u_k(x,m)\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^*(x,m,u)\nabla^2 u_k(x,m)A(x,m,u).$$

Рассмотрим с этой целью систему стохастических уравнений

$$d\xi(t) = a^u(\xi(t),\gamma(t))\,dt + A^u(\xi(t),\gamma(t))\,dw(t), \xi(s) = x, \tag{4.16}$$

$$d\gamma(t) = \int_R h^u(\xi(t),\gamma(t-),z)p(dt,dz), \quad \gamma(s) = l, \quad \eta(s) = h, \tag{4.17}$$

$$d\eta(\theta) = c^u(\xi(\theta),\gamma(\theta))\eta(\theta)\,d\theta + C^u(\xi(\theta),\gamma(\theta))(\eta(\theta),\, dw(\theta)), \tag{4.18}$$

и замкнем ее соотношением

$$\langle h, u(s,x,m)\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta(T), u_0(\xi_{s,x}(T),\gamma_{s,m}(T))\rangle. \tag{4.19}$$

Будем говорить что выполнено условие **C 4.3**, если справедливы следующие оценки:

$$\|a(x,u,m)\|^2 + \operatorname{Tr} A^2(x,u,m) \leqslant K[1+\|x\|^2] + C_u\|u\|^2, \quad x\in R^d,$$
$$\|a(x,u,m) - a(y,v,m)\|^2 + \operatorname{Tr}[A(x,u,m) - A(y,v,m)]^2$$
$$\leqslant L\|x-y\|^2 + L_{u,v}\|u-v\|^2,$$

$$B^i_{lq}(x,m,u) = \sum_{k=1}^{d} C^k_{lq}(x,m,u)A^u_{ki}(x,m,u), \quad x,y\in R^d, \quad u,v\in R^{d_1},$$
$$i = 1,\dots,d, \quad l,q = 1,\dots,d_1, \quad m = 1,\dots,M,$$

$c(x,m,u)\in R^{d_1}\otimes R^{d_1}, C(x,m,u)\in R^{d_1}\otimes R^{d_1}\otimes R^d$ и

$$\|c(x,m,u)h\|^2 + \operatorname{Tr} C^2(x,m,u)h \leqslant K[1 + C_u\|u\|^2]\|h\|^2,$$
$$\|[c(x,m,u) - c(y,m,v)]h\|^2 + \operatorname{Tr}[[C(x,m,u) - C(y,m,v)]h]^2$$

$$\leqslant [L\|x-y\|^2 + L_{u,v}|u-v|^2]\|h\|^2, \quad u,v \in R^{d_1}, \quad h \in R^{d_1}$$

$q_{lm}(x,u)$ – борелевская равномерно ограниченная по x и полилинейная по u для всех $l,m \in V, x \in R^d, u \in R^{d_1}$ $q_{lm}(x,u) \geqslant 0$, если $l \neq m$, $q_{mm}(x,u) = -\sum\limits_{l\neq m} q_{ml}(x,u)$ для всех $x \in R^d, m \in V, u \in R^{d_1}$ и

$$\sup_x \|u_0(x,m)\| \leqslant K_0 < \infty, \quad \|u_0(x,m) - u_0(y,m)\|^2 \leqslant L_0\|x-y\|^2.$$

Предположив, что существует единственное классическое решение задачи Коши (4.14), (4.15), рассмотрим систему стохастических уравнений (4.16)–(4.19).

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия* **C 4.3** *и существует единственное классическое решение задачи Коши* (4.14), (4.15)*. Тогда существует единственное решение стохастической системы* (4.16)–(4.19)*, и функция* $u(s,x,m) \in R^{d_1}$ *вида* (4.19) *задает вероятностное представление этого классического решения.*

Доказательство. Заметим, что если $u_k(s,x,m)$ – классическое решение задачи (4.14), (4.15) и выполнены условия **C 4.3**, то коэффициенты стохастических уравнений (4.16)–(4.19) удовлетворяют классическим условиям существования и единственности решения СДУ, что гарантирует существование процессов $\xi(\theta), \eta(\theta), \gamma(\theta)$, удовлетворяющих (4.16)–(4.18). Далее, поскольку, по предположению, $u(s,x)$ дважды дифференцируема по x, то, применяя формулу Ито, нетрудно проверить справедливость соотношения (4.19). □

Заметим, что, отказавшись от априорного предположения предыдущей теоремы, можно рассмотреть замкнутую систему соотношений (4.16)–(4.19) и, комбинируя методы параграфа 2 и работ [6, 7], доказать ее разрешимость при выполнении условий **C 4.3**.

Теорема 4.5. *Предположим в дополнение к условиям* **C 4.3***, что все коэффициенты и начальная функция дважды дифференцируемы. Тогда существует единственное решение системы* (4.16)–(4.19) *и функция* $u(s,x,m) \in R^{d_1}$ *вида* (4.19) *определяет единственное решение задачи Коши* (4.14), (4.15) *на некотором интервале* $[T_1, T]$*, длина которого зависит от* $u_0(x,m)$ *и коэффициентов системы* (4.14).

Доказательство этой теоремы будет приведено в другой работе.

Замечание. Рассмотрим систему вида

$$\frac{\partial u_k(x,m)}{\partial s}+\mathcal{L}^u(x,m)u_k(x,m)+\sum_{j=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d}B_{jk}^{i,u}(x,m)\nabla_i u_j(x,m)=0, \quad (4.20)$$

$$u_k(T,x,m)=u_{0k}(x,m), k=1,\dots,d_1, m=1,\dots M, \quad (4.21)$$

возникающую как математическая модель ряда законов сохранения. Для того, чтобы построить ее вероятностную интерпретацию, нам нужно добавить и вычесть в левой части слагаемые вида $\sum_{l=1}^{M} q_{lm}u_k(x,l)$. Пусть

$$[c(m)h]_k(m)=\sum_{l=1}^{M} q_{lm}h_k(l), \quad s\leqslant t\leqslant T,$$

$$B_{jk}^i(x,m,u(x,m))=\sum_{r=1}^{d} C_{jk}^r(x,,m,u(x,m))A_{ir}(x,m,u(x,m)).$$

Используя полученные выше результаты, можно показать, что следующая система стохастических соотношений

$$d\xi(t)=a^u(\xi(t),\gamma(t))\,dt+A^u(\xi(t),\gamma(t))\,dw(t), \quad \xi(s)=x,$$

$$d\gamma(t)=\int_R h^u(\gamma(t-),z)p(dt,dz), \quad \gamma(s)=m, \quad \eta(s)=h(m)\in R^{d_1},$$

$$d\eta(\theta)=c(\gamma_{s,m}(\theta)))\eta(\theta)\,d\theta$$
$$+C(\xi_{s,x}(\theta),\gamma(\theta),u(\theta,\xi_{s,x}(\theta),\gamma_{s,m}(\theta)))(\eta(\theta),\,dw(\theta)),$$

$$\sum_m\langle h(m),u(s,x,m)\rangle=\sum_m \mathbf{E}\left[\langle\eta_{s,h(m)}(T),u_0(\xi_{s,x}(T),\gamma_{s,m}(T))\rangle\right] \quad (4.22)$$

ассоциирована с задачей Коши (4.20), (4.21) в том смысле, что соотношение (4.22) задает вероятностное представление классического решения этой задачи.

Литература

1. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, 1967.
2. L. C. Evans, *A strong maximum principle for parabolic systems in a convex set.* — Proc. AMS **138**, No. 9 (2010) 3179–3185.
3. M. Freidlin, *Functional Integration and Partial Differential Equations*, Princeton Univ. Press, 1985.

4. D. Becherer, M. Schweizer, *Classical solutions to reaction-diffusion systems for hedging problems with interacting Ito and point processes.* — Ann. Appl. Probab. **15**, No. 2 (2005), 1111–1144.
5. S. I. Boyarchenko, S. Z. Levendorskii, *Pricing American options in regime-switching models.* — SIAM J. Control Optim. **48** (2009), 1353–1376.
6. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Исследование задачи Коши для квазилинейных параболических систем при помощи марковских случайных процессов.* — Изв. вузов. Матем., **12** (1978), 6–17.
7. Ya. Belopolskaya, Yu. Dalecky, *Stochastic Equations and Differential Geometry*, Kluwer Academic Publishers, 1990.
8. Yu. Tyutyunov, I. Senina, R. Arditi, *Clustering due to acceleration in the response to population gradient: a simple self-organization model.* — Amer. Naturalist, **164**, No. 6 (2004), 722–735.
9. R. Arditi, J.-M. Callois, Yu. Tyutyunov, C. Jost, *Does mutual interference always stabilize predator-prey dynamics? A comparison of models.* — Comptes Rendus Biologies, **327** (2004), 1037–1057.
10. E. Pardoux, *Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order.* — Stochast. Anal. Relat. Topics: The Geilo Workshop, Birkhäuser (1996), 79–127.
11. E. Pardoux, F. Pradeilles, Z. Rao, *Probabilistic interpretation of a system of semilinear parabolic partial differential equations.* — Ann. Inst. Henri Poincaré (B) Probab. Statist. **33**, No. 4 (1997), 467–490.
12. Я. И. Белопольская, *Прямые-обратные стохастические уравнения, связанные с системами квазилинейных параболических уравнений и теоремы сравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **412**, (2013), 15–46.
13. Ya. Belopolskaya, *Probabilistic counterparts of nonlinear parabolic PDE systems Modern Stochastics and Applications.* — Springer Optimization and Its Applications **90** (2014), 71–94.
14. Ya. Belopolskaya, *Probabilistic approaches to nonlinear parabolic equations in jet-bundles.* — Global Stochast. Anal. **1** (2011), 3–40.
15. Ya. Belopolskaya, W. Woyczynski, *Generalized solution of the Cauchy problem for systems of nonlinear parabolic equations and diffusion processes.* — Stochast. Dynamics **11**, No. 1 (2012), 1–31.
16. J. Jacod, A. N. Shiryayev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York, 1980.
17. A. V. Skorohod, *Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
18. G. Yin, C. Zhu, *Properties of solutions of stochastic differential equations with continuous-state-dependent switching.* — J. Diff. Eq. **249** (2010), 2409–2439.
19. M.-F. Chen, *From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems*, World Scientific, Singapore, 2004.

Belopolskaya Ya. I. Probabilistic models of parabolic conservation and balance laws and systems with switching regimes.

We construct a probabilistic representation of the Cauchy problem classical solution for systems of semilinear parabolic equations such that their second order terms enter in a diagonal way with different coefficients while lower order term enter in nondiagonal way. Systems of this kind arise as mathematical models of parabolic conservation and balance laws and as mathematical models of dynamical systems with switching regimes.

С.-Петербургский Государственный
Архитектурно-Строительный Университет,
ул. 2-я Красноармейская 4,
Санкт-Петербург 190005, Россия
E-mail: yana@yb1569.spb.edu
yana.belopolskaya@gmail.com

Поступило 14 ноября 2016 г.