Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

В. Н. Чугунов

ОБ ОПИСАНИИ ПАР АНТИКОММУТИРУЮЩИХ ГАНКЕЛЕВЫХ МАТРИЦ

1. Постановка задачи

Теплицевой называется комплексная $n\times n$-матрица T, имеющая вид

$$T=\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1}\\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2}\\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

а *ганкелевой* называется комплексная $n\times n$-матрица H вида

$$H=\begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0\\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1}\\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Переставив столбцы теплицевой матрицы в обратном порядке, получим ганкелеву матрицу. Напротив, всякая ганкелева матрица H может быть получена указанным способом из соответствующей теплицевой матрицы T. Эту связь между H и T можно описать матричным соотношением

$$H=T\mathcal{P}_n,$$

где $\mathcal{P}_n$ есть так называемая перъединичная матрица:

$$\mathcal{P}_n=\begin{pmatrix} & & & & 1\\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Ключевые слова: теплицева матрица, ганкелева матрица, циркулянт, косой циркулянт, антикоммутирующие матрицы.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда No. 14-11-00806.

Теплицева матрица (1) называется *циркулянтом*, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

косым циркулянтом при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и *ϕ-циркулянтом*, когда

$$t_{-j} = \phi t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Для ганкелевых матриц, как и для теплицевых, также определены понятия ганкелевого циркулянта, если

$$h_{-j} = h_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

ганкелевого косого циркулянта при

$$h_{-j} = -h_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и ганкелевого ϕ-циркулянта, когда

$$h_{-j} = \phi h_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где $\phi \in \mathbf{C}$.

Задача об антикоммутировании ганкелевых матриц заключается в описании пар ганкелевых матриц H_1 и H_2, удовлетворяющих соотношению

$$H_1 H_2 + H_2 H_1 = 0. \tag{3}$$

Данная работа посвящена описанию полного решения поставленной задачи. Представлено решение для комплексного случая. В вещественном случае существует небольшое отличие, о чем будет сказано ниже. Структура статьи следующая. В разделе 2 сформулирован главный результат, как совокупность требуемых пар (H_1, H_2), в виде теоремы, доказательству которой будут отданы разделы 3–5.

Прежде чем описывать множество решений, напомним некоторые определения и факты.

Ганкелева матрица H называется верхнетреугольной, если

$$\{H\}_{km} = 0 \qquad \text{при} \qquad k + m > n + 1,$$

и нижнетреугольной при выполнении условий

$$\{H\}_{km} = 0 \qquad \text{при} \qquad k + m < n + 1.$$

Согласно [1], если C – циркулянт, то для него справедливо спектральное разложение вида

$$C = F_n^* D F_n, \tag{4}$$

где $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ – диагональная матрица, F_n – (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \ldots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \ldots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \ldots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ – первообразный корень n-ой степени из единицы.

Если S – косой циркулянт, то формула (4) приобретает вид

$$S = G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^*,$$

где

$$G_{-1} = \operatorname{diag}(1, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{n-1}),$$

ψ – корень n-ой степени из (-1) вида $\psi = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

Введем обозначения: если $\mathcal{Z}$ – $(n-1)\times 2$-матрица, то $\mathcal{Z}^{(k,m)}$ – 2×2-подматрица в $\mathcal{Z}$, образованная k-ой и m-ой строками. Пусть I_n – единичная матрица порядка n.

2. Главный результат

Основным результатом, который будет установлен в данной работе, является следующее утверждение.

Теорема. *Ненулевые ганкелевы матрицы H_1 и H_2 антикоммутируют тогда и только тогда, когда они принадлежат хотя бы одному из следующих классов*:

Класс 1. *Для $j = 1$ или $j = 2$ матрица H_j является скалярным кратным перъединичной матрицы, а H_{3-j} косоперсимметрична.*

Класс 2. *Матрица H_1 является ганкелевым циркулянтом вида*

$$H_1 = F_n^* D_1 F_n \mathcal{P}_n,$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ – диагональная матрица, а матрица H_2 – ганкелев циркулянт вида

$$H_2 = F_n^* D_2 F_n \mathcal{P}_n,$$

где $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ *– диагональная матрица, при этом*

$$d_1^{(1)} d_1^{(2)} = 0,$$

$$d_j^{(1)} d_{n+2-j}^{(2)} + d_j^{(2)} d_{n+2-j}^{(1)} = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \tfrac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Класс 3. *Матрица* H_1 *является ганкелевым косым циркулянтом вида*

$$H_1 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n,$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ *– диагональная матрица, а матрица* H_2 *является ганкелевым косым циркулянтом вида*

$$H_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n,$$

где $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ *– диагональная матрица, при этом*

$$d_1^{(1)} d_2^{(2)} + d_1^{(2)} d_2^{(1)} = 0,$$

$$d_j^{(1)} d_{n+3-j}^{(2)} + d_j^{(2)} d_{n+3-j}^{(1)} = 0, \qquad j = 3, 4, \ldots, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Класс 4. *Матрицы* H_1 *и* H_2 *– ганкелевы* ϕ*-циркулянт и* $1/\phi$*-циркулянт* ($\phi \neq 0, \pm 1$) *соответственно. При этом* H_1 *и* H_2 *делят нуль, т.е.* $H_1 H_2 = 0$.

Класс 5. *Для* $j = 1$ *или* $j = 2$ *матрица* H_j *является ганкелевой верхней треугольной с* k *нулевыми последними столбцами, а* H_{3-j} *– ганкелева нижняя треугольная матрица с нулевыми первыми* $n - k$ *столбцами.*

Класс 6. *Пусть* C *– циркулянт с первой строкой* $c^\top$, S *– косой циркулянт с первой строкой* $s^\top$, *удовлетворяющие условию* $CC^\top = SS^\top = \mu I_n$ *и не являющиеся одновременно скалярными матрицами.* (*В вещественном случае* C *и* S *ортогональны с точностью до скалярного множителя*). *Определим векторы* u *и* v *по формулам*

$$u = \frac{c+s}{2}, \quad v = \frac{c-s}{2}.$$

Тогда

$$H_1 = \alpha (C_1 + S_1 + C_2 - S_2) \mathcal{P}_n,$$

$$H_2 = \beta (C_1 - S_1 + C_2 + S_2) \mathcal{P}_n,$$

где C_1 и S_1 – соответственно циркулянт и косой циркулянт с первой строкой $u^\top$, C_2 и S_2 – соответственно циркулянт и косой циркулянт с первой строкой $v^\top$.

3. Доказательство главного результата

В разделах 3–5 мы докажем сформулированную выше теорему. Основная цель доказательства – полное решение уравнения (3). При доказательстве не будем различать случаи необходимости и достаточности, так как все совершаемые преобразования являются эквивалентными.

Сначала заметим, что, в силу вида рассматриваемого уравнения, если каждую из матриц H_1 и H_2, являющихся решением, умножить на произвольные числа, то полученная пара останется решением.

От пары искомых ганкелевых матриц H_1 и H_2 перейдем к паре теплицевых матриц T_1 и T_2, соответствующих H_1 и H_2, т.е. $H_1 = T_1\mathcal{P}_n$ и $H_2 = T_2\mathcal{P}_n$. Рассматриваемое уравнение приобретает вид

$$T_1\mathcal{P}_nT_2\mathcal{P}_n + T_2\mathcal{P}_nT_1\mathcal{P}_n = 0.$$

Будучи персимметричными, матрицы T_1 и T_2 удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{P}_nT_1\mathcal{P}_n = T_1^\top, \quad \mathcal{P}_nT_2\mathcal{P}_n = T_2^\top,$$

которые приводят решаемое уравнение к виду

$$T_1T_2^\top + T_2T_1^\top = 0. \tag{5}$$

4. Особые случаи

Прежде, чем описывать решение уравнения (5), рассмотрим четыре особых случая.

4.1. T_1 или T_2 – скалярная матрица. Если одна из матриц T_1 или T_2 скалярная, то вторая должна быть кососимметричной. Получаем класс 1.

4.2. T_1 и T_2 – циркулянты. Пусть матрицы T_1 и T_2 являются циркулянтами вида

$$T_1 = F_n^*D_1F_n, \tag{6}$$

$$T_2 = F_n^*D_2F_n, \tag{7}$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}\right)$, $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Запишем формулы для транспонированного циркулянта из [2]:

$$T_1^\top = F_n^* \widehat{D}_1 F_n, \quad T_2^\top = F_n^* \widehat{D}_2 F_n, \tag{8}$$

где $\widehat{D}_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_n^{(1)}, \dots, d_2^{(1)}\right)$, $\widehat{D}_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_n^{(2)}, \dots, d_2^{(2)}\right)$.

Подстановка выражений (6), (7) и (8) для матриц T_1, T_2, $T_1^\top$ и $T_2^\top$ в уравнение (5) приводит к соотношению

$$F_n^* D_1 F_n F_n^* \widehat{D}_2 F_n + F_n^* D_2 F_n F_n^* \widehat{D}_1 F_n = 0,$$

которое равносильно равенству

$$D_1 \widehat{D}_2 + D_2 \widehat{D}_1 = 0.$$

В результате получаем класс 2.

4.3. T_1 и T_2 – косые циркулянты. Теперь исследуем случай, когда матрицы T_1 и T_2 являются косыми циркулянтами вида

$$T_1 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*, \tag{9}$$

$$T_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^*, \tag{10}$$

где $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}\right)$, $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Как было показано в [2],

$$T_1^\top = G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_1 F_n G_{-1}^*, \quad T_2^\top = G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_2 F_n G_{-1}^*, \tag{11}$$

где

$$\widetilde{D}_1 = \operatorname{diag}\left(d_2^{(1)}, d_1^{(1)}, d_n^{(1)}, \dots, d_3^{(1)}\right), \ \widetilde{D}_2 = \operatorname{diag}\left(d_2^{(2)}, d_1^{(2)}, d_n^{(2)}, \dots, d_3^{(2)}\right).$$

Подстановка выражений (9), (10) и (11) для матриц $T_1, T_2, T_1^\top$ и $T_2^\top$ в уравнение (5) приводит к соотношению

$$G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_2 F_n G_{-1}^* + G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* \widetilde{D}_1 F_n G_{-1}^* = 0,$$

которое равносильно равенству

$$D_1 \widetilde{D}_2 + D_2 \widetilde{D}_1 = 0.$$

В результате получаем класс 3.

4.4. T_1 – ϕ-циркулянт, T_2 – $1/\phi$-циркулянт ($\phi \neq 0, \pm 1$). В случае, когда T_1 – ϕ-циркулянт, T_2 – $1/\phi$-циркулянт ($\phi \neq 0, \pm 1$), перепишем решаемое уравнение в виде

$$T_1 T_2^\top = -T_2 T_1^\top. \tag{12}$$

Так как T_1 – ϕ-циркулянт, T_2 – $1/\phi$-циркулянт, то $T_2^\top$ и $T_1 T_2^\top$ — ϕ-циркулянты, $T_1^\top$ и $T_2 T_1^\top$ – $1/\phi$-циркулянты. Поэтому, в силу условия $\phi \neq \pm 1$, уравнение (12) эквивалентно системе

$$\begin{cases} T_1 T_2^\top = \mu I_n, \\ T_2 T_1^\top = -\mu I_n, \end{cases}$$

которая после транспонирования второго условия приобретает вид

$$\begin{cases} T_1 T_2^\top = \mu I_n, \\ T_1 T_2^\top = -\mu I_n. \end{cases}$$

Следовательно, $\mu = 0$ и $H_1 H_2 = T_1 T_2^\top = 0$. Получаем класс 4.

5. Общий подход

Опишем теперь общий подход для решения уравнения (5).

Случай, когда одна из матриц T_1 или T_2 является скалярной, уже был исследован. Далее считаем, что ни одна из матриц T_1, T_2 не является скалярной.

Обозначим элементы первой строки матрицы T_1 через a_0, a_1, ..., a_{n-1}, а первого столбца – через a_0, a_{-1}, ..., $a_{-(n-1)}$. Аналогично, элементы первой строки матрицы T_2 обозначим через b_0, b_1, ..., b_{n-1}, а первого столбца – через b_0, b_{-1}, ..., $b_{-(n-1)}$.

Представим матрицы T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = a_0 I_n + \widehat{T}_1, \qquad T_2 = b_0 I_n + \widehat{T}_2,$$

где $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ имеют нулевую диагональ, и подставим их в уравнение (5):

$$(a_0 I_n + \widehat{T}_1)(b_0 I_n + \widehat{T}_2)^\top + (b_0 I_n + \widehat{T}_2)(a_0 I_n + \widehat{T}_1)^\top = 0.$$

После упрощения получаем

$$\widehat{T}_1 \widehat{T}_2^\top + \widehat{T}_2 \widehat{T}_1^\top = -2a_0 b_0 I_n - a_0(\widehat{T}_2^\top + \widehat{T}_2) - b_0(\widehat{T}_1^\top + \widehat{T}_1).$$

Правая часть является теплицевой матрицей, значит и левая часть должна быть теплицевой:

$$\{\widehat{T}_1 \widehat{T}_2^\top + \widehat{T}_2 \widehat{T}_1^\top\}_{k,j} = \{\widehat{T}_1 \widehat{T}_2^\top + \widehat{T}_2 \widehat{T}_1^\top\}_{k+1,j+1}, \qquad k, j = 1, \ldots, n-1. \tag{13}$$

Подробная запись последнего равенства

$$\sum_{m=1}^{n}\{\widehat{T}_1\}_{k,m}\{\widehat{T}_2\}_{j,m}+\sum_{m=1}^{n}\{\widehat{T}_2\}_{k,m}\{\widehat{T}_1\}_{j,m}$$
$$-\sum_{m=1}^{n}\{\widehat{T}_1\}_{k+1,m}\{\widehat{T}_2\}_{j+1,m}-\sum_{m=1}^{n}\{\widehat{T}_2\}_{k+1,m}\{\widehat{T}_1\}_{j+1,m}=0,$$

в силу теплицевости T_1 и T_2, эквивалентна условию

$$\sum_{m=1}^{n}a_{m-k}b_{m-j}+\sum_{m=1}^{n}b_{m-k}a_{m-j}$$
$$-\sum_{m=1}^{n}a_{m-k-1}b_{m-j-1}-\sum_{m=1}^{n}b_{m-k-1}a_{m-j-1}=0.$$

Заменим индексы суммирования m на p: в первой и второй суммах $p=m$, в третьей и четвертой $p=m-1$:

$$\sum_{p=1}^{n}a_{p-k}b_{p-j}+\sum_{p=1}^{n}b_{p-k}a_{p-j}-\sum_{p=0}^{n-1}a_{p-k}b_{p-j}-\sum_{p=0}^{n-1}b_{p-k}a_{p-j}=0.$$

Выполняя элементарные преобразования, приходим к равенству

$$a_{n-k}b_{n-j}-a_{-k}b_{-j}+b_{n-k}a_{n-j}-b_{-k}a_{-j}=0,$$

которое идентично соотношению

$$a_{n-k}b_{n-j}+b_{n-k}a_{n-j}=a_{-k}b_{-j}+b_{-k}a_{-j}.$$

Заменив k на $n-k$ и j на $n-j$, имеем

$$a_kb_j+b_ka_j=a_{-(n-k)}b_{-(n-j)}+b_{-(n-k)}a_{-(n-j)}. \tag{14}$$

Введем в рассмотрение две дополнительные $(n-1)\times 2$-матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ зададим как

$$\mathcal{F}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ \vdots & \vdots\\ a_{n-1} & b_{n-1}\end{bmatrix},\quad \mathcal{G}=\begin{bmatrix} a_{-(n-1)} & b_{-(n-1)}\\ a_{-(n-2)} & b_{-(n-2)}\\ \vdots & \vdots\\ a_{-1} & b_{-1}\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Теперь условие (14) можно записать в виде

$$\mathcal{F}\mathcal{P}_2\mathcal{F}^{\top}=\mathcal{G}\mathcal{P}_2\mathcal{G}^{\top}. \tag{16}$$

Установим справедливость следующего утверждения.

Лемма. *Если матрицы* T_1 *и* T_2 *нескалярные, то* rank $\mathcal{F}$ = rank $\mathcal{G}$.

Доказательство. Пусть сначала rank $\mathcal{F} = 2$, тогда найдутся числа k и m такие, что 2×2-матрица $\mathcal{F}^{(k,m)}$ невырожденна. Запишем соотношение (16) для k-ых и m-ых строк и столбцов

$$\mathcal{F}^{(k,m)}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top = \mathcal{G}^{(k,m)}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{G}^{(k,m)}\right)^\top.$$

Матрица в левой части невырожденна, значит и матрица в правой части должна быть невырожденной. Поэтому $\mathcal{G}^{(k,m)}$ невырожденна, и rank $\mathcal{G} = 2$. Так как матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ входят в условие (16) равноправно, то из условия rank $\mathcal{G} = 2$ следует соотношение rank $\mathcal{F} = 2$.

Теперь рассмотрим случай rank $\mathcal{F} = 1$. В силу приведенных выше рассуждений получаем, что rank $\mathcal{G} \leqslant 1$. Покажем, что rank $\mathcal{G} = 1$. Предположим обратное $\mathcal{G} = 0$. Так как матрица $\mathcal{G}$ содержит элементы матриц T_1 и T_2 с отрицательными индексами, то в этом случае T_1 и T_2 будут верхнетреугольными. В силу условия леммы о нескалярности матриц T_1 и T_2 заключаем, что матрица $\mathcal{F}$ не имеет нулевых столбцов. Введем ненулевой $(n-1)$-мерный вектор z и ненулевые числа α_1 и β_1 такие, что $\mathcal{F} = z(\alpha_1 \quad \beta_1)$. Тогда равенство (16) примет вид

$$z(\alpha_1 \quad \beta_1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} z^\top = 0.$$

Это эквивалентно условию

$$\alpha_1\beta_1 z z^\top = 0. \tag{17}$$

Так как $z \neq 0$, то найдется число m такое, что $z_m \neq 0$. Запишем равенство (17) для диагонального элемента m:

$$\alpha_1\beta_1 z_m^2 = 0.$$

Получаем противоречие с условиями $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$ и $z_m \neq 0$. Значит rank $\mathcal{G} = 1$. Лемма доказана. □

На основании данной леммы, в силу нескалярности матриц T_1 и T_2, возможны лишь два случая: rank $\mathcal{F}$ = rank $\mathcal{G} = 1$ и rank $\mathcal{F}$ = rank $\mathcal{G} = 2$. Последовательно проанализируем их.

5.1. rank $\mathcal{F}$ = rank $\mathcal{G} = 1$. Введем ненулевые $(n-1)$-мерные векторы $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ и числа α_1, β_1, α_2 и β_2 такие, что

$$\mathcal{F} = z^{(1)}(\alpha_1 \quad \beta_1), \quad \mathcal{G} = z^{(2)}(\alpha_2 \quad \beta_2).$$

В этом случае соотношение (16) приобретает вид

$$\alpha_1\beta_1 z^{(1)}\left(z^{(1)}\right)^\top = \alpha_2\beta_2 z^{(2)}\left(z^{(2)}\right)^\top. \tag{18}$$

Условия нескалярности T_1 и T_2 можно записать как неравенства

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \tag{19}$$

$$|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0. \tag{20}$$

Сначала рассмотрим равенство (18) при условии $\alpha_1 = 0$. Так как вектор $z^{(2)}$ ненулевой, то $\alpha_2\beta_2 = 0$. В силу (19) $\alpha_2 \neq 0$, поэтому $\beta_2 = 0$, и из (20) следует, что $\beta_1 \neq 0$. В данном случае матрицы T_1 и T_2 имеют вид

$$T_1 = a_0 I_n + L, \quad T_2 = b_0 I_n + U,$$

где L и U – строго нижняя и строго верхняя треугольные теплицевы матрицы. Подстановка в (5) дает условие

$$(a_0 I_n + L)(b_0 I_n + U)^\top + (b_0 I_n + U)(a_0 I_n + L)^\top = 0,$$

идентичное равенству

$$2a_0 b_0 I_n + a_0(U + U^\top) + b_0(L + L^\top) + (LU^\top + UL^\top) = 0.$$

Так как L и U – строго нижняя и верхняя треугольные теплицевы матрицы, то $LU^\top$ – строго нижняя треугольная теплицева матрица, а $UL^\top$ – строго верхняя треугольная теплицева матрица. Приходим к совокупности условий

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 0, \\ b_0 L + a_0 U^\top + LU^\top = 0. \end{cases}$$

Предположим, что $b_0 \neq 0$, тогда $a_0 = 0$, и выполняется равенство

$$L(b_0 I_n + U^\top) = 0.$$

Матрица $b_0 I_n + U^\top$ невырожденная, поэтому $L = 0$. Значит, матрица T_1 скалярная. Но мы рассматриваем ситуацию, когда матрица T_1 нескалярная. Таким образом, если $b_0 \neq 0$, мы не получаем новых решений. Аналогично рассматривается случай $a_0 \neq 0$.

Единственно возможная ситуация $a_0 = b_0 = 0$. В этом случае имеем условие $LU^\top = 0$. Последнее равенство возможно, если первые k строк матрицы L и первые $n - k$ столбцов матрицы U нулевые. В терминах исходных ганкелевых матриц это означает, что матрица H_1 является ганкелевой нижней треугольной с k нулевыми первыми столбцами, а H_2 – ганкелевой верхней треугольной с $n - k$ нулевыми последними столбцами. Получаем подкласс класса 5. Случай $\beta_1 = 0$ также дает подкласс класса 5.

Теперь рассмотрим условия $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$. Так как вектор $z^{(1)}$ ненулевой, то найдется такое число m, что $z_m^{(1)} \neq 0$. Рассмотрим соотношение (18) в диагональной позиции (m, m):

$$\alpha_1 \beta_1 \left(z_m^{(1)}\right)^2 = \alpha_2 \beta_2 \left(z_m^{(2)}\right)^2.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_2 \neq 0, \quad \beta_2 \neq 0, \quad z_m^{(2)} \neq 0. \tag{21}$$

По условию задачи, исходные матрицы H_1 и H_2 можно умножать на произвольные ненулевые числа, поэтому будем считать, что $\alpha_1 = \beta_1 = 1$.

С учетом введенных векторов $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ по матрицам $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ имеем соотношения:

$$\begin{cases} a_j = z_j^{(1)}, \\ b_j = z_j^{(1)}, \\ a_{-(n-j)} = \alpha_2 z_j^{(2)}, \\ b_{-(n-j)} = \beta_2 z_j^{(2)}, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{22}$$

Тогда условие (14) примет вид

$$z_k^{(1)} z_j^{(1)} = \alpha_2 \beta_2 z_k^{(2)} z_j^{(2)}, \quad k, j = 1, 2 \ldots, n-1. \tag{23}$$

Запишем равенство (23) для $j = m$:

$$z_k^{(1)} z_m^{(1)} = \alpha_2 \beta_2 z_k^{(2)} z_m^{(2)},$$

которое с учетом (21) эквивалентно условию

$$z_k^{(2)} = \frac{z_m^{(1)}}{\alpha_2 \beta_2 z_m^{(2)}} z_k^{(1)}, \quad k = 1, 2 \ldots, n-1.$$

Значит, векторы $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ коллинеарны. Пусть $z^{(2)} = \gamma z^{(1)}$. Введем числа $\widetilde{\alpha}_2 = \gamma \alpha_2$, $\widetilde{\beta}_2 = \gamma \beta_2$. Теперь соотношения (22) можно переписать как

$$\begin{cases} a_j = z_j^{(1)}, \\ b_j = z_j^{(1)}, \\ a_{-(n-j)} = \widetilde{\alpha}_2 z_j^{(1)}, \\ b_{-(n-j)} = \widetilde{\beta}_2 z_j^{(1)}, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{24}$$

а условие (23) – как

$$(1-\widetilde{\alpha}_2\widetilde{\beta}_2)z_k^{(1)}z_j^{(1)}=0,\quad k,j=1,2\ldots,n-1.$$

Так как $z^{(1)}\neq 0$, то $\widetilde{\alpha}_2\widetilde{\beta}_2=1$. Положим $\widetilde{\alpha}_2=\phi$, тогда $\widetilde{\beta}_2=1/\phi$, и условия (24) примут вид

$$\begin{cases} a_j=z_j^{(1)},\\ b_j=z_j^{(1)},\\ a_{-(n-j)}=\phi z_j^{(1)},\\ b_{-(n-j)}=\frac{1}{\phi}z_j^{(1)}, \end{cases}\qquad j=1,2,\ldots,n-1.$$

Получаем, что матрица T_1 – ϕ-циркулянт, а матрица T_2 – $1/\phi$-циркулянт. Этот случай уже был рассмотрен.

5.2. rank $\mathcal{F}$ = rank $\mathcal{G}$= 2. Так как rank $\mathcal{F}=2$, то найдутся числа k и m такие, что матрица $\mathcal{F}^{(k,m)}$ невырожденна. Запишем соотношение (16) для k-ых и m-ых строк и столбцов:

$$\mathcal{F}^{(k,m)}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top=\mathcal{G}^{(k,m)}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{G}^{(k,m)}\right)^\top.$$

Из невырожденности матрицы $\mathcal{F}^{(k,m)}$ следует невырожденность матрицы $\mathcal{G}^{(k,m)}$. Далее распишем (16) лишь для k-ых и m-ых столбцов:

$$\mathcal{F}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top=\mathcal{G}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{G}^{(k,m)}\right)^\top.$$

Выразим отсюда матрицу $\mathcal{G}$ как

$$\mathcal{G}=\mathcal{F}\mathcal{P}_2\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top\left(\left(\mathcal{G}^{(k,m)}\right)^\top\right)^{-1}\mathcal{P}_2.$$

Введем матрицу

$$W=\mathcal{P}_2\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top\left(\left(\mathcal{G}^{(k,m)}\right)^\top\right)^{-1}\mathcal{P}_2,$$

тогда

$$\mathcal{G}=\mathcal{F}W,\tag{25}$$

и условие (16) примет вид

$$\mathcal{F}\mathcal{P}_2\mathcal{F}^\top=\mathcal{F}W\mathcal{P}_2W^\top\mathcal{F}^\top,$$

что идентично соотношению

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{P}_2-W\mathcal{P}_2W^\top\right)\mathcal{F}^\top=0.$$

Запишем последнее условие для k-ых и m-ых строк и столбцов:

$$\mathcal{F}^{(k,m)}\left(\mathcal{P}_2 - W\mathcal{P}_2 W^\top\right)\left(\mathcal{F}^{(k,m)}\right)^\top = 0.$$

В силу невырожденности матрицы $\mathcal{F}^{(k,m)}$ получаем

$$W\mathcal{P}_2 W^\top = \mathcal{P}_2. \tag{26}$$

Представим матрицу W в виде

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

С учетом (27) соотношение (26) имеет вид

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

После элементарных преобразований получаем условие

$$\begin{pmatrix} 2w_{11}w_{12} & w_{11}w_{22} + w_{12}w_{21} \\ w_{11}w_{22} + w_{12}w_{21} & 2w_{21}w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

эквивалентное системе

$$\begin{cases} w_{11}w_{12} = 0, \\ w_{21}w_{22} = 0, \\ w_{11}w_{22} + w_{12}w_{21} = 1. \end{cases} \tag{28}$$

Рассмотрим два случая в зависимости от равенства нулю параметра w_{11}. Пусть сначала $w_{11} \neq 0$, тогда в силу (28) $w_{12} = 0$, $w_{22} \neq 0$ и $w_{21} = 0$. Обозначим $w_{11} = \phi$. Матрица W будет диагональной $W = \mathrm{diag}(\phi, 1/\phi)$. Это означает, что матрица T_1 является ϕ-циркулянтом, а T_2 – $1/\phi$-циркулянт. Такая ситуация уже была разобрана.

Теперь до конца доказательства $w_{11} = 0$, тогда в силу (28) $w_{12} \neq 0$, $w_{21} \neq 0$ и $w_{22} = 0$. Обозначим $w_{21} = \lambda \neq 0$. Матрица W имеет вид

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

и условия (25) можно записать как

$$\begin{cases} a_{-(n-j)} = \lambda b_j, \\ b_{-(n-j)} = \frac{1}{\lambda} a_j, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Введем циркулянт C_1 и косой циркулянт S_1 с одинаковыми первыми строками

$$u = \frac{1}{2\lambda}(a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{n-1}),$$

а также циркулянт C_2 и косой циркулянт S_2 с совпадающими первыми строками

$$v = \frac{1}{2}(b_0, \quad b_1, \quad \dots, \quad b_{n-1}).$$

В этом случае матрицы T_1 и T_2 можно записать в виде

$$T_1 = \lambda(C_1 + S_1) + \lambda(C_2 - S_2),$$

$$T_2 = (C_2 + S_2) + (C_1 - S_1).$$

Определим циркулянт C и косой циркулянт S по формулам

$$C = C_1 + C_2, \quad S = S_1 - S_2.$$

Тогда справедливы равенства

$$T_1 = \lambda(C + S), \quad T_2 = C - S.$$

После подстановки в уравнение (5) получаем соотношение

$$\lambda(C + S)(C - S)^\top + \lambda(C - S)(C + S)^\top = 0,$$

которое можно упростить до вида

$$CC^\top = SS^\top.$$

В левой части стоит циркулянт, в правой – косой циркулянт. Поэтому последнее равенство возможно лишь при выполнении условий

$$CC^\top = SS^\top = \mu I_n. \tag{29}$$

Зафиксируем циркулянт C и косой циркулянт S, удовлетворяющие условиям (29) и не являющиеся одновременно скалярными матрицами. Последнее требование обеспечивает нескалярность T_1 и T_2. В вещественном случае условия (29) означают, что C и S ортогональны с точностью до скалярного множителя. Обозначим через $c^\top$ и $s^\top$ первые строки C и S. В силу определения u, v имеем

$$u + v = c, \quad u - v = s.$$

Отсюда получаем

$$u = \frac{c + s}{2}, \quad v = \frac{c - s}{2}.$$

Как уже было сказано, матрицы H_1 и H_2 определяются с точностью до констант, поэтому можем записать их в виде

$$H_1 = \alpha(C_1 + S_1 + C_2 - S_2)\mathcal{P}_n,$$

$$H_2 = \beta(C_1 - S_1 + C_2 + S_2)\mathcal{P}_n.$$

Приходим к классу 6. Все возможные варианты рассмотрены. Теорема полностью доказана.

Литература

1. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами.* М., Наука, 1987.
2. В. Н. Чугунов, *О частных решениях нормальной $T + H$-задачи.* — ЖВМ и МФ **50**, No. 4 (2010), 612–617.

Chugunov V. N. On a description of pairs of anti-commuting Hankel matrices.

A complete description of the sets of pairs of anti-commuting Hankel matrices is given.

Институт вычислительной математики РАН
ул. Губкина 8, 119333 Москва, Россия
E-mail: chugunov.vadim@gmail.com

Поступило 19 сентября 2016 г.