Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

О. В. Маркова

КОММУТАТИВНЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ ИНДЕКСА НИЛЬПОТЕНТНОСТИ $n-1$ В АЛГЕБРЕ МАТРИЦ ПОРЯДКА n

§1. Введение

Описание коммутативных матричных подалгебр и изучение их числовых характеристик является классической областью исследований. Для функции размерности эти исследования восходят к работе И. Шура 1905 г. [10], в которой получена верхняя оценка размерности $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$ коммутативных подалгебр алгебры матриц порядка n над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x. Эта область активно развивалась в течение XX века, достаточно упомянуть работу Н. Джекобсона 1944 г. [4], в которой оценка Шура была перенесена на случай произвольного поля, работу М. Герштенхабера 1961 г. [2], в которой получена оценка размерности коммутативной алгебры, порождённой двумя матрицами, монографию Д. А. Супруненко и Р. И. Тышкевич 1966 г. [12], а также, например, работы [1,5,6,11]. В статье А. Паза сформулирована задача вычисления длины для матричной алгебры и, в частности, получена верхняя оценка $n-1$ для длины коммутативных подалгебр алгебры комплексных матриц порядка n. В работе [3] (совместно с А. Э. Гутерманом) и работе автора [7] верхняя оценка А. Паза доказана для длины коммутативных подалгебр матричной алгебры над произвольным полем и описаны коммутативные подалгебры максимальной длины. Для дальнейшего изучения коммутативных матричных подалгебр заданной длины требуется описание нильпотентных подалгебр алгебры матриц различных индексов нильпотентности. Данная работа посвящена коммутативным нильпотентным подалгебрам индекса нильпотентности $n-1$ алгебры матриц порядка n.

Ключевые слова: алгебра нильтреугольных матриц, коммутативная нильпотентная матричная подалгебра, индекс нильпотентности.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантом РФФИ 15-01-01132.

Пусть далее $M_n(\mathbb{F})$ обозначает алгебру матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$, $T_n(\mathbb{F})$ – подалгебру верхнетреугольных матриц в $M_n(\mathbb{F})$, $N_n(\mathbb{F})$ – подалгебру нильпотентных матриц в $T_n(\mathbb{F})$ (иными словами, алгебру верхних нильтреугольных матриц). Через $E_{i,j}$ будем обозначать матричную единицу, т.е. матрицу с 1 на позиции (i,j) и нулями на остальных местах. Через ${}^TA$ обозначим транспонированную матрицу для матрицы A.

Через $\langle S\rangle$ будем обозначать линейную оболочку подмножества S некоторого линейного пространства.

Пусть $\mathcal{A}$ – конечномерная ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{F}$. *Нильпотентный элемент* (или *нильпотент*) a алгебры $\mathcal{A}$ – элемент, удовлетворяющий равенству $a^n = 0$ для некоторого натурального n. Минимальное значение n, для которого справедливо это равенство, называется *индексом нильпотентности* элемента a. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *ниль-алгеброй*, если каждый её элемент является нильпотентным; *ниль-индексом* $\nu(\mathcal{A})$ ниль-алгебры $\mathcal{A}$ назовём максимальный индекс нильпотентности её элементов. *Индексом нильпотентности алгебры* $\mathcal{A}$ называется число k, такое что $\mathcal{A}^k = (0)$, но $\mathcal{A}^{k-1} \neq (0)$. Если такое k существует, алгебра называется *нильпотентной индекса* k. Любая нильпотентная алгебра, очевидно, является ниль-алгеброй.

Для максимальных (относительно включения) коммутативных нильпотентных подалгебр в $M_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$ известны следующие характеризационные результаты.

Теорема 1.1 ([12, глава 3, теорема 1]). *Пусть $n \geqslant 3$ и $\mathcal{A}$ – максимальная коммутативная нильпотентная подалгебра в $M_n(\mathbb{C})$ индекса нильпотентности $n-1$. Тогда*

1. *$\mathcal{A}$ сопряжена с одной из следующих трёх попарно несопряжённых алгебр:*

$$\mathcal{B}_{1;n} = \langle A, A^2, \dots, A^{n-2}, E_{1,n}\rangle,$$
$$\mathcal{B}_{2;n} = \langle A, A^2, \dots, A^{n-2}, E_{n,n-1}\rangle,$$
$$\mathcal{B}_{3;n}(1) = \langle A, A^2, \dots, A^{n-2}, E_{1,n} + E_{n,n-1}\rangle,$$

где $A = E_{1,2} + \dots + E_{n-2,n-1}$.

2. *Алгебры $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha) = \langle A, A^2, \dots, A^{n-2}, E_{1,n} + \alpha E_{n,n-1}\rangle$, где $\alpha \neq 0 \in \mathbb{C}$, сопряжены в $M_n(\mathbb{C})$ с алгеброй $\mathcal{B}_3(1)$.*

Теорема 1.2 ([8]). *Пусть $n > 3$ и пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле нулевой характеристики, или характеристики $p > n-1$. Обозначим*

через $\mathbb{F}^*$ *мультипликативную группу поля* $\mathbb{F}$, *через* Q *– подгруппу* $\mathbb{F}^*$, *образованную квадратами элементов из* $\mathbb{F}^*$. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– максимальная коммутативная нильпотентная подалгебра в* $M_n(\mathbb{F})$ *индекса нильпотентности* $n-1$. *Тогда*

1. *при нечётном* n *алгебра* $\mathcal{A}$ *сопряжена с одной из трёх попарно несопряжённых алгебр* $\mathcal{B}_{1;n}$, $\mathcal{B}_{2;n}$ *и* $\mathcal{B}_{3;n}(1)$;

2. *при чётном* n *алгебра* $\mathcal{A}$ *сопряжена с одной из попарно несопряжённых алгебр* $\mathcal{B}_{1;n}$, $\mathcal{B}_{2;n}$, $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{B}_{3;n}(\alpha_i), \ldots$, *где* $\{\alpha_j\}$ *– полная система представителей* $\mathbb{F}^*$ *по модулю* Q.

При этом в доказательстве этих теорем существенно используется существование в такой алгебре элемента a, индекс нильпотентности которого совпадает с индексом нильпотентности всей алгебры, т.е. совпадение ниль-индекса и индекса нильпотентности алгебры. Этим объясняется условие на характеристику поля, поскольку при таком условии существование требуемого элемента вытекает из следующего результата, принадлежащего Г. Фробениусу.

Теорема 1.3 ([12, глава 1, предложение 5, следствие]). *Пусть* $s \in \mathbb{N}$ *и пусть* $\mathbb{F}$ *– поле с условием* $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$ *или* $\operatorname{char}\mathbb{F} > s$.

1. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– коммутативная ассоциативная алгебра произвольной размерности над* $\mathbb{F}$. *Если для любого* $a \in \mathcal{A}$ *выполнено* $a^s = 0$, *то* $\mathcal{A}^s = (0)$.

2. *Если* $\mathcal{A}$ *– нильпотентная коммутативная ассоциативная алгебра над* $\mathbb{F}$ *индекса нильпотентности* s, *то существует элемент* $a \in \mathcal{A}$, *такой, что* $a^{s-1} \neq 0$.

В данной работе для всех $n \geqslant 5$ будет дано конструктивное доказательство существования элемента индекса нильпотентности $n-1$ в любой нильпотентной коммутативной подалгебре индекса нильпотентности $n-1$ в алгебре $N_n(\mathbb{F})$ (как следствие, в алгебре $M_n(\mathbb{F})$) над полем $\mathbb{F}$, состоящим из не менее, чем n элементов. Из этого результата следует улучшение приведённых выше классификационных теорем относительно основного поля. В случаях $n = 3, 4$ нильпотентные коммутативные подалгебры индекса нильпотентности $n-1$ в $M_n(\mathbb{F})$ будут описаны с точностью до сопряжённости над любым полем $\mathbb{F}$.

§2. О коммутативных нильпотентных подалгебрах алгебр матриц порядков 3 и 4

Теорема 2.1. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Тогда произвольная коммутативная нильпотентная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_3(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 2 сопряжена с одной из следующих попарно несопряжённых алгебр:*

(1) $\mathcal{B}_{0;3} = \langle E_{1,2} \rangle$;
(2) $\mathcal{B}_{1;3} = \langle E_{1,2},\ E_{1,3} \rangle$;
(3) $\mathcal{B}_{2;3} = \langle E_{1,2},\ E_{3,2} \rangle$.

Доказательство. Алгебра $\mathcal{A}$ по условию ненулевая, т.е. $\dim \mathcal{A} \geqslant 1$; с другой стороны по теореме Шура [12, глава 2, теорема 19], $\dim \mathcal{A} \leqslant [9/4] = 2$.

1. Пусть $\dim \mathcal{A} = 2$. В [12, глава 2, §3] показано, что существует невырожденная матрица $T \in M_3(\mathbb{F})$ такая, что любая матрица из алгебры $\mathcal{A}_T = T\mathcal{A}T^{-1}$ имеет вид либо $\begin{pmatrix} 0 & y_{1,2} & y_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{1,3} \\ 0 & 0 & y_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; алгебры $\mathcal{B}_{1;3}$ и $\mathcal{B}'_{2;3} = \langle E_{1,3}, E_{2,3} \rangle$ не сопряжены.

Тогда в первом случае верно равенство $\mathcal{A}_T = \mathcal{B}_{1;3}$. Во втором случае имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{B}'_{2;3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \mathcal{B}_{2;3}.$$

Таким образом, алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена либо с алгеброй $\mathcal{B}_{1;3}$, либо с $\mathcal{B}_{2;3}$.

2. Пусть $\dim \mathcal{A} = 1$, т.е. $\mathcal{A} = \langle A \rangle$, где $A \neq 0$, но $A^2 = 0$. Нильпотентная матрица A над произвольным полем приводится к жордановой нормальной форме, которая совпадает с матрицей $E_{1,2}$. Следовательно, алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с алгеброй $\mathcal{B}_{0;3}$. □

Вообще, в работах [8, 12] было фактически доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2 ([8, 12])**.** *Пусть $n > 3$ и пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q – подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Пусть $\mathcal{A}$ – коммутативная нильпотентная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$, содержащая матрицу B индекса нильпотентности $n-1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_n(\mathbb{F})$ с одной из следующих подалгебр:*

(i) $\mathcal{B}_{0;n} = \langle A, A^2, \dots, A^{n-2} \rangle$ *– подалгебра, порождённая матрицей* $A = E_{1,2} + \dots + E_{n-2,n-1}$*;*

(ii) $\mathcal{B}_{1;n} = \langle E_{1,n},\ C \mid C \in \mathcal{B}_{0;n} \rangle$*;*

(iii) $\mathcal{B}_{2;n} = \langle E_{n,n-1},\ C \mid C \in \mathcal{B}_{0;n} \rangle$*;*

(iv) $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha) = \langle E_{1,n} + \alpha E_{n,n-1},\ C \mid C \in \mathcal{B}_{0;n} \rangle$*, где* $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$.

2. *Подалгебры разных типов не сопряжены между собой; подалгебры типов (ii)–(iv) являются максимальными по включению коммутативными нильпотентными подалгебрами и содержат подалгебру $\mathcal{B}_{0;n}$, не являющуюся максимальной по включению.*

3. *При нечётном n и произвольном $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, подалгебра $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)$ сопряжена с подалгеброй $\mathcal{B}_{3;n}(1)$; при чётном n и произвольном $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, подалгебра $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)$ сопряжена с одной из попарно несопряжённых подалгебр $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha_1), \dots, \mathcal{B}_{3;n}(\alpha_i), \dots$, где $\{\alpha_j\}$ – полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по модулю Q.*

В алгебре матриц порядка 4 коммутативные нильпотентные подалгебры индекса нильпотентности 3 удаётся классифицировать над произвольным полем, причём классификация зависит от того, равна ли характеристика поля 2.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле характеристики отличной от 2. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q – подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Пусть $\mathcal{A}$ – коммутативная нильпотентная подалгебра в $M_4(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 3. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из попарно несопряжённых алгебр $\mathcal{B}_{0;4}$, $\mathcal{B}_{1;4}$, $\mathcal{B}_{2;4}$, $\mathcal{B}_{3;4}(\alpha_1), \dots, \mathcal{B}_{3;4}(\alpha_i), \dots$, где $\{\alpha_j\}$ – полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по модулю Q.*

Доказательство. По определению, в $\mathcal{A}$ существуют элементы A и B такие, что $AB = BA \neq 0$. Следовательно, в $\mathcal{A}$ есть ненулевые элементы, откуда $2 \leqslant \nu(\mathcal{A}) \leqslant n - 1 = 3$. При этом, если $\nu(\mathcal{A}) = 2$, то $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB = 2AB = 0$, и в случае $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ отсюда следует, что также $AB = 0$, противоречие. Значит, если $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$, то $\nu(\mathcal{A}) = 3$, т.е. алгебра $\mathcal{A}$ содержит элемент индекса нильпотентности 3 и, соответственно, удовлетворяет условиям классификационной теоремы 2.2. $\square$

Теорема 2.4. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики 2. Пусть $\mathcal{A}$ – коммутативная нильпотентная подалгебра в $M_4(\mathbb{F})$ индекса нильпотен-*

тности 3. *Тогда* $\nu(\mathcal{A}) = 2$ *тогда и только тогда, когда алгебра* $\mathcal{A}$ *сопряжена в* $M_4(\mathbb{F})$ *с алгеброй* $\mathcal{B}_{4;4} = \langle E_{1,2} + E_{3,4},\ E_{1,3} + E_{2,4},\ E_{1,4}\rangle$.

Доказательство. Положим $A_4 = E_{1,2} + E_{3,4}$, $B_4 = E_{1,3} + E_{2,4}$. Заметим, что

$$A_4^2 = B_4^2 = E_{1,4}^2 = 0, \quad A_4E_{1,4} = E_{1,4}A_4 = B_4E_{1,4} = E_{1,4}B_4 = 0,$$
$$A_4B_4 = B_4A_4 = E_{1,4},$$

поэтому алгебра $\mathcal{B}_{4;4}$ является коммутативной подалгеброй в алгебре $N_4(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 3 и ниль-индекса $\nu(\mathcal{B}_{4;4}) = 2$.

Всякая нильпотентная коммутативная подалгебра в матричной алгебре над произвольным полем сопряжением переводится в нильтреугольную подалгебру (см., например, [12, глава 2, теорема 6]). Поэтому существует невырожденная матрица $T \in M_4(\mathbb{F})$ такая, что алгебра $\mathcal{A}_T = T\mathcal{A}T^{-1} \subset N_4(\mathbb{F})$, причём $\mathcal{A}_T$ также является коммутативной матричной подалгеброй индекса нильпотентности 3 и ниль-индекса 2. Следовательно, найдутся матрицы $X, Y \in \mathcal{A}_T$ такие, что

$$X^2 = Y^2 = 0,\ XY = YX \neq 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что X и Y линейно независимы.

Запишем общий вид матриц X и Y:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ 0 & 0 & x_{2,3} & x_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & x_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & y_{1,2} & y_{1,3} & y_{1,4} \\ 0 & 0 & y_{2,3} & y_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & y_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{1,2}x_{2,3} & x_{1,2}x_{2,4} + x_{1,3}x_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,3}x_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{2.1}$$

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{1,2}y_{2,3} & y_{1,2}y_{2,4} + y_{1,3}y_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & y_{2,3}y_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{2.2}$$

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{1,2}y_{2,3} & x_{1,2}y_{2,4} + x_{1,3}y_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,3}y_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \tag{2.3}$$

$$YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{1,2}x_{2,3} & y_{1,2}x_{2,4} + y_{1,3}x_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & y_{2,3}x_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \tag{2.4}$$

$$XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{1,2}y_{2,3} - y_{1,2}x_{2,3} & x_{1,2}y_{2,4} + x_{1,3}y_{3,4} - y_{1,2}x_{2,4} - y_{1,3}x_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,3}y_{3,4} - y_{2,3}x_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.5}$$

Покажем, что $x_{2,3} = y_{2,3} = 0$. Предположим противное. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_{2,3} \neq 0$. Тогда из соотношения (2.1) получаем, что

$$x_{1,2} = x_{2,3}^{-1} \cdot 0 = 0, \quad x_{3,4} = x_{2,3}^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Подставляя эти значения в соотношение коммутативности (2.5), заключаем, что также

$$y_{1,2} = x_{2,3}^{-1} \cdot 0 = 0, \quad y_{3,4} = x_{2,3}^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Откуда $XY = 0$, противоречие.

Следовательно, соотношения (2.1)–(2.5) примут такой вид:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{1,2}x_{2,4} + x_{1,3}x_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{2.6}$$

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & y_{1,2}y_{2,4} + y_{1,3}y_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{2.7}$$

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{1,2}y_{2,4} + x_{1,3}y_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \tag{2.8}$$

$$YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & y_{1,2}x_{2,4} + y_{1,3}x_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \tag{2.9}$$

$$XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{1,2}y_{2,4} + x_{1,3}y_{3,4} - y_{1,2}x_{2,4} - y_{1,3}x_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.10}$$

Из (2.8) заключаем, что $E_{1,4} \in \mathcal{A}_T$.

Из (2.8) и (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} &(x_{1,2}, x_{1,3}) \neq (0,0), \quad (x_{2,4}, x_{3,4}) \neq (0,0), \\ &(y_{1,2}, y_{1,3}) \neq (0,0), \quad (y_{2,4}, y_{3,4}) \neq (0,0), \\ &(x_{1,2}, y_{3,4}) \neq (0,0), \quad (x_{1,3}, y_{2,4}) \neq (0,0), \\ &(y_{1,2}, x_{3,4}) \neq (0,0), \quad (y_{1,3}, x_{2,4}) \neq (0,0). \end{aligned}$$

Тогда из (2.6) и (2.7) получаем, что в каждой из пар $(x_{1,2},\ x_{3,4})$, $(x_{1,3},\ x_{2,4})$, $(y_{1,2},\ y_{3,4})$, $(y_{1,3},\ y_{2,4})$ оба элемента обращаются либо не обращаются в ноль одновременно.

Откуда

$$(x_{1,2}, y_{1,2}) \neq (0,0), \quad (x_{1,3}, y_{1,3}) \neq (0,0).$$

Без ограничения общности далее будем считать, что $x_{1,2} \neq 0$, и тогда $x_{3,4} \neq 0$.

Если векторы $(x_{1,2}, x_{3,4})$ и $(y_{1,2}, y_{3,4})$ линейно независимы, то существуют такие числа γ_1, γ_2, δ_1, $\delta_2 \in \mathbb{F}$, что

$$\begin{aligned} (1,0) &= \gamma_1(x_{1,2}, x_{3,4}) + \delta_1(y_{1,2}, y_{3,4}), \\ (0,1) &= \gamma_2(x_{1,2}, x_{3,4}) + \delta_2(y_{1,2}, y_{3,4}), \\ &\begin{vmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = \gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 \neq (\gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1)XY &= (\gamma_2 X + \delta_2 Y)(\gamma_1 X + \delta_1 Y) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Противоречие.

Таким образом, $(y_{1,2}, y_{3,4}) = \lambda(x_{1,2}, x_{3,4})$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}$. Заменяя исходную матрицу Y матрицей $Y - \lambda X$, получим, что $y_{1,2} = y_{3,4} = 0$.

Тогда, по доказанному выше, $y_{1,3} \neq 0$ и $y_{2,4} \neq 0$.

Если векторы $(x_{1,3}, x_{2,4})$ и $(y_{1,3}, y_{2,4})$ линейно независимы, то существуют такие числа γ_3, γ_4, δ_3, $\delta_4 \in \mathbb{F}$, что $(1,0) = \gamma_3(x_{1,3}, x_{2,4}) + \delta_3(y_{1,3}, y_{2,4})$, $(0,1) = \gamma_4(x_{1,3}, x_{2,4}) + \delta_4(y_{1,3}, y_{2,4})$, $\begin{vmatrix} \gamma_3 & \delta_3 \\ \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} = \gamma_3\delta_4 + \gamma_4\delta_3 \neq 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} 0 \neq (\gamma_3\delta_4 + \gamma_4\delta_3)XY &= (\gamma_4 X + \delta_4 Y)(\gamma_3 X + \delta_3 Y) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Противоречие.

Таким образом, $(x_{1,3}, x_{2,4}) = \mu(y_{1,3}, y_{2,4})$ для некоторого $\mu \in \mathbb{F}$. Заменяя исходную матрицу X матрицей $X - \mu Y$, получим, что $x_{1,3} = x_{2,4} = 0$.

Также из соотношения коммутативности (2.10) заключаем, что $x_{1,2}y_{2,4} - y_{1,3}x_{3,4} = 0$. Значит, векторы $(x_{1,2}, x_{3,4})$, $(y_{1,3}, y_{2,4})$ пропорциональны.

Итак, мы установили, что существуют ненулевые числа $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ такие, что матрицы $A_1 = \alpha E_{1,2} + \beta E_{3,4}$, $A_2 = \alpha E_{1,3} + \beta E_{2,4}$, $E_{1,4}$ содержатся в алгебре $\mathcal{A}_T$.

Рассмотрим произвольную матрицу $Z = \{z_{i,j}\} \in N_4(\mathbb{F})$, коммутирующую с матрицами A_1 и A_2. Имеем

$$(A_1Z - ZA_1)_{1,3} = \alpha z_{2,3} = 0, \quad (A_1Z - ZA_1)_{1,4} = \alpha z_{2,4} - \beta z_{1,3} = 0,$$
$$(A_2Z - ZA_2)_{1,4} = \alpha z_{3,4} - \beta z_{1,2} = 0,$$

т.е. $Z = z_{3,4}\beta^{-1}A_1 + z_{2,4}\beta^{-1}A_2 + z_{1,4}E_{1,4} \in \langle A_1, A_2, E_{1,4}\rangle$.

Следовательно,

$$\mathcal{A}_T = \langle A_1, A_2, E_{1,4}\rangle,$$

и алгебра $\mathcal{A}_T$ является максимальной по включению коммутативной нильпотентной подалгеброй.

Положим $D = \alpha^{-1}E_{1,1} + E_{2,2} + E_{3,3} + \beta E_{4,4} \in D_4(\mathbb{F})$. Имеем

$$\begin{aligned} DA_1D^{-1} &= E_{1,2} + E_{3,4}, \quad DA_2D^{-1} = E_{1,3} + E_{2,4}, \\ DE_{1,4}D^{-1} &= (\alpha\beta)^{-1}E_{1,4}, \\ D\mathcal{A}_TD^{-1} &= \mathcal{B}_{4;4}, \ (DT)\mathcal{A}(DT)^{-1} = \mathcal{B}_{4;4}. \end{aligned}$$

□

Как следствие получаем следующий результат.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики 2. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q – подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Пусть $\mathcal{A}$ – коммутативная нильпотентная подалгебра в $M_4(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 3. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из попарно несопряжённых алгебр $\mathcal{B}_{0;4}$, $\mathcal{B}_{1;4}$, $\mathcal{B}_{2;4}$, $\mathcal{B}_{4;4}$, $\mathcal{B}_{3;4}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{B}_{3;4}(\alpha_i), \ldots$, где $\{\alpha_j\}$ – полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по* $\bmod Q$.

Доказательство. Действительно, как показано в доказательстве теоремы 2.5, есть две возможности: $\nu(\mathcal{A}) = 3$ и $\nu(\mathcal{A}) = 2$. Эти случаи рассмотрены в теоремах 2.2 и 2.4 соответственно.

Осталось только заметить, что индекс нильпотентности элемента сохраняется при сопряжении, поэтому алгебра $\mathcal{B}_{4;4}$ не сопряжена с другими подалгебрами. □

§3. Существование элемента индекса нильпотентности $n-1$

В данном параграфе будет показано, что при $n \geqslant 5$ произвольная коммутативная нильпотентная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$ над полем мощности не менее n содержит элемент индекса нильпотентности $n-1$.

Нам потребуется следующий специальный класс матриц.

Определение 3.1. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ называется *циклической*, если

$$\dim_{\mathbb{F}}(\langle E,\ C,\ C^2, \ldots,\ C^{n-1}\rangle) = n.$$

Предложение 3.2. *Пусть $n \geqslant 2$ и $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Тогда матрица $C = c_{i,j} \in N_n(\mathbb{F})$ такая, что $c_{k,k+1} \neq 0$ для всех $k = 1, \ldots, n-1$, является циклической.*

Доказательство. Матрицы $E, C, \ldots, C^{n-1}$ линейно независимы, поскольку при $m < n$ для $C^m = \{c_{i,j;m}\}$ выполнены равенства $c_{i,j;m} = 0$, $j < i + m$, и $c_{i,i+m;m}$ равны некоторым произведениям элементов $c_{i,i+1;1} = c_{i,i+1} \neq 0$. Значит, матрица C циклическая. □

Предложение 3.3. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$. Рассмотрим произвольные матрицы $X_1, \ldots, X_{n-2} \in N_n(\mathbb{F})$, $X_r = \{x_{i,j;r}\}$, и их произведение $Y = X_1 \cdots X_{n-2}$, $Y = \{y_{i,j}\}$. Тогда*

1. $y_{1,n-1} = \prod\limits_{i=1}^{n-2} x_{i,i+1;i}$;

2. $y_{2,n} = \prod\limits_{i=1}^{n-2} x_{i+1,i+2;i}$;

3. $y_{1,n} = \sum\limits_{i=1}^{n-2} \left(\prod\limits_{j=1}^{i-1} x_{j,j+1;j} \cdot x_{i,i+2;i} \cdot \prod\limits_{k=i+1}^{n-2} x_{k+1,k+2;k} \right)$.

Доказательство. 1. Элемент $y_{1,n-1}$ равен сумме слагаемых вида

$$x_{1,i_1;1} \cdot x_{i_1,i_2;2} \cdots x_{i_{n-4},i_{n-3};n-3} \cdot x_{i_{n-3},n-1;n-2},$$

где $2 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-3} \leqslant n-2$. Таким образом, нам нужно выбрать $n-3$ различных натуральных числа, лежащих на отрезке $[2, n-2]$. Все натуральные числа, принадлежащие отрезку $[2, n-2]$, – это числа $2, 3, \ldots, n-2$, их ровно $n-3$, следовательно, $i_r = r+1$ для каждого $r = 1, \ldots, n-3$. Значит, $y_{1,n-1} = \prod\limits_{i=1}^{n-2} x_{i,i+1;i}$.

2. Элемент $y_{2,n}$ образован слагаемыми вида

$$x_{2,i_1;1} \cdot x_{i_1,i_2;2} \cdots x_{i_{n-4},i_{n-3};n-3} \cdot x_{i_{n-3},n;n-2},$$

где $3 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-3} \leqslant n-1$, т.е. нам нужно выбрать $n-3$ различных натуральных числа, лежащих на отрезке $[3, n-1]$. Все натуральные числа, принадлежащие отрезку $[3, n-1]$, – это числа $3, 4, \ldots, n-1$, их ровно $n-3$, следовательно, $i_r = r+2$ для каждого $r = 1, \ldots, n-3$. Значит, $y_{2,n} = \prod\limits_{i=1}^{n-2} x_{i+1,i+2;i}$.

3. Элемент $y_{1,n}$ образован слагаемыми вида

$$x_{1,i_1;1} \cdot x_{i_1,i_2;2} \cdots x_{i_{n-4},i_{n-3};n-3} \cdot x_{i_{n-3},n;n-2},$$

где $2 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-3} \leqslant n-1$, т.е. нам нужно выбрать $n-3$ различных натуральных числа, лежащих на отрезке $[2, n-1]$. Все натуральные числа, принадлежащие отрезку $[2, n-1]$, – это числа $2, 3, \ldots, n-1$, их ровно $n-2$. Следовательно, набор чисел $(i_1, \ldots, i_{n-3})$ возможно выбрать $C_{n-2}^{n-3} = n-2$ различными способами, т.е. для каждого $m = 1, \ldots, n-2$ получим набор I_m вида: $(I_m)_j = j+1$ при

$1 \leqslant j \leqslant m-1$, $(I_m)_j = j+2$, $m \leqslant j \leqslant n-3$. Значит,

$$y_{1,n} = \sum_{i=1}^{n-2} \left(\prod_{j=1}^{i-1} x_{j,j+1;j} \cdot x_{i,i+2;i} \cdot \prod_{k=i+1}^{n-2} x_{k+1,k+2;k} \right). \qquad \square$$

Дальнейшие доказательства будут основываться на следующем усиленном варианте утверждения [3, предложение 7.4].

Предложение 3.4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ – поле и $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Если V – подпространство в $\mathbb{F}^n$ такое, что для каждого $i = 1, \dots, n$ найдётся вектор $v(i) \in V$, удовлетворяющий условию $v(i)_i \neq 0$ (векторы $v(i)$ не обязательно попарно различны), то существует такой вектор $v \in V$, $v \in \langle v(i) |\ i = 1, \dots, n \rangle$, что $v_i \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n.

База индукции. При $n = 1$ утверждение верно.

Шаг индукции. Допустим, что $n > 1$ и для $n-1$ утверждение доказано. Это означает, что существует вектор $v^0 \in \langle v(i) |\ i = 1, \dots, n-1 \rangle$ такой, что $v_i^0 \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Добавляем к рассмотрению вектор $v^1 = v(n)$. Если $v_n^0 \neq 0$, то положим $v = v^0$; если $v_i^1 \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$, то положим $v = v^1$. В противном случае рассмотрим векторы $v^0 + av^1$, $a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$. Пусть $y_i(x) = v_i^1 x + v_i^0$, $i = 1, \dots, n-1$. При каждом i $v_i^0 \neq 0$ по построению, значит уравнение $y_i(x) = 0$ имеет в $\mathbb{F}$ не более одного решения. При этом вектор v^1 имеет нулевую координату, значит по крайней мере одно из уравнений $y_i(x) = 0$ несовместно. Следовательно, если $X = \{x \in \mathbb{F} |\ \exists i \in \{1, \dots, n-1\}\ y_i(x) = 0\}$, то $|X| \leqslant n-2$. Из условия на число элементов поля следует, что найдётся $a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$, такое что $a \notin X$, т.е. $v_i^0 + av_i^1 \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Вектор $v^0 + av^1 \in \langle v(i) |\ i = 1, \dots, n \rangle$ и есть искомый. $\square$

В терминах теории кодирования предложение 3.4 допускает следующую компактную формулировку: если $|\mathbb{F}| \geqslant n$, то любой линейный код над $\mathbb{F}$, имеющий реальную длину n, содержит слово веса n.

Предложение 3.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\mathbb{F}$ – поле и $|\mathbb{F}| \geqslant n-1$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A}$ в $N_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$. Тогда существует индекс $r = r(\mathcal{A}) \in \{1, \dots, n-1\}$ такой, что для любой матрицы $B = \{b_{i,j}\} \in \mathcal{A}$ выполнено равенство $b_{r,r+1} = 0$.*

Доказательство. По определению, $\nu(\mathcal{A}) \leqslant n-1$, следовательно, алгебра $\mathcal{A}$ не содержит циклической матрицы.

Как показано в предложении 3.2, матрица $C \in N_n(\mathbb{F})$ такая, что все элементы $c_{k,k+1} \neq 0$, является циклической. Следовательно, для любой матрицы $X = \{x_{i,j}\} \in \mathcal{A}$ существует индекс $r(X) \in \{1, \dots, n-1\}$ такой, что $x_{r(X),r(X)+1} = 0$. При этом, если для каждого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ найдётся матрица $A_i \in \mathcal{A}$ такая, что $(A_i)_{i,i+1} \neq 0$, то из предложения 3.4 получаем, что существует линейная комбинация матриц A_i – матрица $B = \{b_{i,j}\}$ такая, что все элементы $b_{k,k+1} \neq 0$, т.е. циклическая, противоречие. Таким образом, существует общий индекс $r = r(\mathcal{A}) \in \{1, \dots, n-1\}$ такой, что для любой матрицы $B = \{b_{i,j}\} \in \mathcal{A}$ выполнено соотношение $b_{r,r+1} = 0$. □

В следующих четырёх леммах построение требуемой матрицы индекса нильпотентности $n-1$ проведём отдельно для различных значений $r(\mathcal{A})$.

Лемма 3.6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$ и $\mathbb{F}$ – произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n-1$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A}$ в $N_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$ такую, что $r(\mathcal{A}) = 1$. Тогда существует элемент $A \in \mathcal{A}$ индекса нильпотентности $n-1$.*

Доказательство. Построим матрицу $A \in \mathcal{A}$ индекса нильпотентности $n-1$.

По определению индекса нильпотентности алгебры, существуют матрицы $B_1, \dots, B_{n-2} \in \mathcal{A}$, $B_k = \{b_{i,j;k}\}$, такие, что $B_1 \cdots B_{n-2} \neq 0$. При этом, по определению умножения матриц, $(B_1 \cdots B_{n-2})_{i,j} = 0$ для всех i, j таких, что $0 \leqslant j - i \leqslant n-3$.

Также, согласно предложению 3.3,

$$\begin{aligned}(B_1 \cdots B_{n-2})_{1,n-1} &= b_{1,2;1} \cdot (b_{2,3;2} \cdots b_{n-2,n-1;n-2}) \\ &= 0 \cdot (b_{2,3;2} \cdots b_{n-2,n-1;n-2}) = 0.\end{aligned}$$

Значит, хотя бы один из двух элементов $(B_1 \cdot B_2 \cdots B_{n-2})_{1,n}$ и $(B_1 \cdot B_2 \cdots B_{n-2})_{2,n}$ не равен нулю. Имеем

$$
\begin{aligned}
(B_1 \cdots B_{n-2})_{1,n} &= b_{1,3;1} \cdot (b_{3,4;2} \cdots b_{n-1,n;n-2}) \\
&\quad + b_{1,2;1} \cdot \sum_{i=2}^{n-2} \left(\prod_{j=2}^{i-1} b_{j,j+1;j} \cdot b_{i,i+2;i} \cdot \prod_{k=i+1}^{n-2} b_{k+1,k+2;k} \right) \\
&= b_{1,3;1} \cdot (b_{3,4;2} \cdots b_{n-1,n;n-2})
\end{aligned}
$$

и

$$
(B_1 \cdot B_2 \cdots B_{n-2})_{2,n} = b_{2,3;1} \cdot (b_{3,4;2} \cdots b_{n-1,n;n-2}).
$$

Следовательно, $b_{3,4;2} \cdots b_{n-1,n;n-2} \neq 0$. Это означает, что $b_{j,j+1;j-1} \neq 0$ для всех $j \in \{3, \ldots, n-1\}$ и существует индекс $\varepsilon \in \{0, 1\}$ такой, что $b_{1+\varepsilon,3;1} \neq 0$.

Тогда из предложения 3.4 получаем, что существует линейная комбинация матриц B_m – матрица $A = \{a_{i,j}\}$ такая, что все элементы $a_{1+\varepsilon,3}, a_{k,k+1}$, $k \in \{3, \ldots, n-1\}$, не равны нулю. Откуда

$$
(A^{n-2})_{1+\varepsilon,n} = a_{1+\varepsilon,3} \cdot \left(\prod_{k=3}^{n-1} a_{k,k+1} \right) \neq 0,
$$

$$
A^{n-2} \neq 0, \quad A^{n-1} = 0,
$$

т.е. $\nu(\mathcal{A}) = n - 1$. □

Лемма 3.7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$ и $\mathbb{F}$ – произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A}$ в $N_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$ такую, что $r(\mathcal{A}) = 2$. Тогда существует элемент $A \in \mathcal{A}$ индекса нильпотентности $n-1$.*

Доказательство. Построим матрицу $A \in \mathcal{A}$ индекса нильпотентности $n-1$. Для этого рассмотрим матрицы $B_1, \ldots, B_{n-2} \in \mathcal{A}$, как в доказательстве леммы 3.6.

Имеем

$$
\begin{aligned}
(B_1 \cdots B_{n-2})_{1,n-1} &= b_{1,2;1} \cdot b_{2,3;2} \cdot (b_{3,4;3} \cdots b_{n-2,n-1;n-2}) \\
&= b_{1,2;1} \cdot 0 \cdot (b_{3,4;3} \cdots b_{n-2,n-1;n-2}) = 0, \\
(B_1 \cdots B_{n-2})_{2,n} &= b_{2,3;1} \cdot (b_{3,4;2} \cdots b_{n-1,n;n-2}) \\
&= 0 \cdot (b_{3,4;2} \cdots b_{n-1,n;n-2}) = 0.
\end{aligned}
$$

Значит, в силу условия $B_1 \cdot B_2 \cdots B_{n-2} \neq 0$, элемент $(B_1 \cdot B_2 \cdots B_{n-2})_{1,n}$ не равен нулю. Согласно предложению 3.3,

$$\begin{aligned}(B_1 \cdots B_{n-2})_{1,n} = \sum_{i=1}^{n-2} \left(\prod_{j=1}^{i-1} b_{j,j+1;j} \cdot b_{i,i+2;i} \cdot \prod_{k=i+1}^{n-2} b_{k+1,k+2;k} \right) \\ + (b_{1,3;1}b_{3,4;2} + b_{1,2;1}b_{2,4;2}) \cdot (b_{4,5;3} \cdots b_{n-1,n;n-2}) \\ + b_{1,2;1}b_{2,3;2} \sum_{i=3}^{n-2} \left(\prod_{j=3}^{i-1} b_{j,j+1;j} \cdot b_{i,i+2;i} \cdot \prod_{k=i+1}^{n-2} b_{k+1,k+2;k} \right) \\ = (b_{1,3;1}b_{3,4;2} + b_{1,2;1}b_{2,4;2}) \cdot (b_{4,5;3} \cdots b_{n-1,n;n-2}).\end{aligned}$$

Следовательно, $b_{4,5;3} \cdots b_{n-1,n;n-2} \neq 0$. Это означает, что $b_{j,j+1;j-1} \neq 0$ для всех $j \in \{4, \ldots, n-1\}$. Также $b_{1,3;1}b_{3,4;2} + b_{1,2;1}b_{2,4;2} \neq 0$.

Отдельно рассмотрим всевозможные случаи обращения в ноль элементов матриц B_i на позициях $(1,3)$, $(3,4)$, $(1,2)$, $(2,4)$.

(1) Предположим, существует индекс $j \in \{2,3\}$ такой, что равенство $b_{1,j;q} = 0$ выполняется для всех $q = 1, \ldots, n-2$. В этом случае неравенство $b_{1,3;1}b_{3,4;2} + b_{1,2;1}b_{2,4;2} \neq 0$ влечёт $b_{1,5-j;1}b_{5-j,4;2} \neq 0$, откуда $b_{1,5-j;1} \neq 0$, $b_{5-j,4;2} \neq 0$. Тогда из предложения 3.4 получаем, что существует линейная комбинация матриц B_m – матрица $A = \{a_{i,j}\}$ такая, что все элементы $a_{1,5-j}, a_{5-j,4}, a_{k,k+1}$, $k \in \{4, \ldots, n-1\}$, не равны нулю, и $a_{1,j} = 0$. Откуда

$$(A^{n-2})_{1,n} = a_{1,5-j}a_{5-j,4} \cdot \left(\prod_{k=4}^{n-1} a_{k,k+1} \right) \neq 0,$$

$$A^{n-2} \neq 0, \quad A^{n-1} = 0,$$

т.е. $\nu(\mathcal{A}) = n-1$.

(2) Предположим, существует индекс $j \in \{2,3\}$ такой, что равенство $b_{j,4;q} = 0$ выполняется для всех $q = 1, \ldots, n-2$. В этом случае неравенство $b_{1,3;1}b_{3,4;2} + b_{1,2;1}b_{2,4;2} \neq 0$ влечёт $b_{1,5-j;1}b_{5-j,4;2} \neq 0$, откуда $b_{1,5-j;1} \neq 0$, $b_{5-j,4;2} \neq 0$. Тогда из предложения 3.4 получаем, что существует линейная комбинация матриц B_m – матрица $A = \{a_{i,j}\}$ такая, что все элементы $a_{1,5-j}, a_{5-j,4}, a_{k,k+1}$, $k \in \{4, \ldots, n-1\}$, не равны нулю, и $a_{j,4} = 0$. Откуда

$$(A^{n-2})_{1,n} = a_{1,5-j}a_{5-j,4} \cdot \left(\prod_{k=4}^{n-1} a_{k,k+1} \right) \neq 0,$$

$$A^{n-2} \neq 0, \quad A^{n-1} = 0,$$

т.е. $\nu(\mathcal{A}) = n-1$.

(3) Осталось рассмотреть случай, когда существуют индексы s_1, s_2, s_3, $s_4 \in \{1, \dots, n-2\}$ такие, что $b_{1,3;s_1} \neq 0$, $b_{3,4;s_2} \neq 0$, $b_{1,2;s_3} \neq 0$, $b_{2,4;s_4} \neq 0$. Из предложения 3.4 получаем, что существует линейная комбинация матриц B_m – матрица $A = \{a_{i,j}\}$ такая, что все элементы $a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,4}, a_{3,4}, a_{k,k+1}$, $k \in \{4, \dots, n-1\}$, не равны нулю, и $a_{2,3} = 0$. Предположим, что $A^{n-2} = 0$ и приведём это утверждение к противоречию. Имеем

$$(A^{n-2})_{1,n} = (a_{1,3}a_{3,4} + a_{1,2}a_{2,4}) \cdot a_{4,5} \cdots a_{n-1,n} = 0,$$

$$a_{1,3}a_{3,4} + a_{1,2}a_{2,4} = 0. \tag{3.1}$$

Обозначим $\alpha = a_{1,2} \neq 0$, $\beta = a_{1,3} \neq 0$. Пусть $q = \alpha^{-1}a_{3,4}$. Тогда $q \neq 0$, $a_{3,4} = q\alpha$, и из равенства (3.1) получаем выражение $a_{2,4} = -\beta\alpha^{-1}a_{3,4} = -q\beta$.

Рассмотрим, какие условия возникают для матрицы $Y = \{Y_{i,j}\} \in N_n(\mathbb{F})$, если Y коммутирует с матрицей A. Положим $G = [A, Y] = AY - YA$, обозначим $G = \{g_{i,j}\}$. Тогда из условия $G = 0$ получаем

$$g_{1,3} = a_{1,2}Y_{2,3} - Y_{1,2}a_{2,3} = \alpha Y_{2,3} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{2,3} = 0, \tag{3.2}$$

$$g_{3,5} = a_{3,4}Y_{4,5} - Y_{3,4}a_{4,5} = q\alpha Y_{4,5} - Y_{3,4}a_{4,5} = 0$$
$$\Rightarrow \quad Y_{3,4} = q\alpha \cdot (Y_{4,5}a_{4,5}^{-1}), \tag{3.3}$$

$$g_{2,5} = a_{2,3}Y_{3,5} + a_{2,4}Y_{4,5} - Y_{2,3}a_{3,5} - Y_{2,4}a_{4,5} = -q\beta Y_{4,5} - Y_{2,4}a_{4,5} = 0$$
$$\Rightarrow \quad Y_{2,4} = -q\beta \cdot (Y_{4,5}a_{4,5}^{-1}), \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} g_{1,4} &= a_{1,2}Y_{2,4} + a_{1,3}Y_{3,4} - Y_{1,2}a_{2,4} - Y_{1,3}a_{3,4} \\ &= \alpha \cdot (-q\beta \cdot (Y_{4,5}a_{4,5}^{-1})) + \beta q\alpha \cdot (Y_{4,5}a_{4,5}^{-1}) + q\beta Y_{1,2} - q\alpha Y_{1,3} \\ &= q\beta Y_{1,2} - q\alpha Y_{1,3} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{1,3} = \beta\alpha^{-1}Y_{1,2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Матрицы $B_1, \dots, B_{n-2} \in \mathcal{A}$ коммутируют с матрицей A, следовательно, для их элементов выполнены соотношения (3.2)–(3.5). Тогда

$$\begin{aligned} &b_{1,3;1}b_{3,4;2} + b_{1,2;1}b_{2,4;2} \\ &\quad = \beta\alpha^{-1}b_{1,2;1} \cdot q\alpha \cdot (b_{4,5;2}a_{4,5}^{-1}) + b_{1,2;1} \cdot (-q\beta \cdot (b_{4,5;2}a_{4,5}^{-1})) = 0, \end{aligned}$$

$$(B_1 \cdots B_{n-2})_{1,n} = (b_{1,3;1}b_{3,4;2} + b_{1,2;1}b_{2,4;2}) \cdot (b_{4,5;3} \cdots b_{n-1,n;n-2}) \\ = 0 \cdot (b_{4,5;3} \cdots b_{n-1,n;n-2}) = 0,$$

$$B_1 \cdots B_{n-2} = 0.$$

Противоречие с выбором матриц $B_1, \ldots, B_{n-2}$.

Таким образом, $A^{n-2} \neq 0$, следовательно, $\nu(\mathcal{A}) = n-1$. □

В следующей лемме рассмотрим оставшиеся значения из отрезка $[1, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil]$, где $\lceil x \rceil$ обозначает наименьшее целое число z, такое что $z \geqslant x$. При $n = 5$ имеем $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = 2$, следовательно, леммы 3.6 и 3.7 покрывают все возможные целые значения из отрезка $[1, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil]$. Поэтому условие $n \geqslant 6$ не ограничивает общности.

Лемма 3.8. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 6$ и $\mathbb{F}$ – произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A}$ в $N_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$ такую, что $3 \leqslant r(\mathcal{A}) \leqslant \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Тогда существует элемент $A \in \mathcal{A}$ индекса нильпотентности $n-1$.*

Доказательство. Для краткости обозначим $r = r(\mathcal{A})$. Заметим, что из условия следует оценка $3 \leqslant r \leqslant n-3$.

Построим матрицу $A \in \mathcal{A}$ индекса нильпотентности $n-1$.

По определению индекса нильпотентности алгебры, существуют матрицы $B_1, \ldots, B_{n-2} \in \mathcal{A}$, $B_k = \{b_{i,j;k}\}$, такие, что

$$B_1 \cdots B_{n-2} \neq 0.$$

При этом, по определению произведения матриц, $(B_1 \cdots B_{n-2})_{i,j} = 0$ для всех таких i, j, что $0 \leqslant j - i \leqslant n-3$.

Согласно предложению 3.3, имеем

$$\begin{aligned} (B_1 \cdots B_{n-2})_{1,n-1} &= b_{1,2;1} \cdots b_{r,r+1;r} \cdots b_{n-2,n-1;n-2} \\ &= b_{1,2;1} \cdots 0 \cdots b_{n-2,n-1;n-2} = 0, \\ (B_1 \cdots B_{n-2})_{2,n} &= b_{2,3;1} \cdots b_{r,r+1;r-1} \cdots b_{n-1,n;n-2} \\ &= b_{2,3;1} \cdots 0 \cdots b_{n-1,n;n-2} = 0. \end{aligned}$$

Значит, в силу условия $B_1 \cdot B_2 \cdots B_{n-2} \neq 0$, имеем $(B_1 \cdot B_2 \cdots B_{n-2})_{1,n} \neq 0$. Согласно предложению 3.3,

$$
\begin{aligned}
(B_1 \cdots B_{n-2})_{1,n} &= \sum_{i=1}^{n-2} \left(\prod_{j=1}^{i-1} b_{j,j+1;j} \cdot b_{i,i+2;i} \cdot \prod_{k=i+1}^{n-2} b_{k+1,k+2;k} \right) \\
&= (b_{1,2;1} \cdots b_{r-2,r-1;r-2}) \cdot (b_{r-1,r;r-1} b_{r,r+2;r} + b_{r-1,r+1;r-1} b_{r+1,r+2;r}) \\
&\qquad \times (b_{r+2,r+3;r+1} \cdots b_{n-1,n;n-2}) \\
&\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r-1,r}}^{n-2} \left(\prod_{j=1}^{i-1} b_{j,j+1;j} \cdot b_{i,i+2;i} \cdot \prod_{k=i+1}^{n-2} b_{k+1,k+2;k} \right) \\
&= (b_{1,2;1} \cdots b_{r-2,r-1;r-2}) \cdot (b_{r-1,r;r-1} b_{r,r+2;r} + b_{r-1,r+1;r-1} b_{r+1,r+2;r}) \\
&\qquad \times (b_{r+2,r+3;r+1} \cdots b_{n-1,n;n-2}).
\end{aligned}
$$

Следовательно, не равны нулю все три группы сомножителей в последнем произведении, откуда получаем

$$
\begin{gathered}
b_{j,j+1;j} \neq 0, \quad j \in \{1, \dots, r-2\}, \\
b_{k+1,k+2;k} \neq 0, \quad k \in \{r+1, \dots, n-2\}; \\
b_{r-1,r;r-1} b_{r,r+2;r} + b_{r-1,r+1;r-1} b_{r+1,r+2;r} \neq 0.
\end{gathered}
$$

Отдельно рассмотрим всевозможные случаи обращения в ноль элементов матриц B_i на позициях $(r-1, r), (r-1, r+1), (r, r+2), (r+1, r+2)$.

(1) Предположим, существует индекс $j \in \{r, r+1\}$ такой, что равенство $b_{r-1,j;q} = 0$ выполняется для всех $q = 1, \dots, n-2$. В этом случае неравенство

$$
b_{r-1,r;r-1} b_{r,r+2;r} + b_{r-1,r+1;r-1} b_{r+1,r+2;r} \neq 0
$$

влечёт

$$
\begin{gathered}
b_{r-1,2r+1-j;r-1} b_{2r+1-j,r+2;r} \neq 0, \\
b_{r-1,2r+1-j;r-1} \neq 0, \\
b_{2r+1-j,r+2;r} \neq 0.
\end{gathered}
$$

Тогда из предложения 3.4 получаем, что существует линейная комбинация матриц B_m – матрица $A = \{a_{i,j}\}$ такая, что все элементы

$$
a_{2r+1-j,r+2}, a_{r-1,2r+1-j}, a_{k,k+1}, \quad k \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{r-1, r, r+1\},
$$

не равны нулю, и $a_{r-1,j} = 0$. Откуда

$$
(A^{n-2})_{1,n} = \left(\prod_{k=1}^{r-2} a_{k,k+1} \right) \cdot a_{r-1,2r+1-j} \cdot a_{2r+1-j,r+2} \cdot \left(\prod_{k=r+2}^{n-1} a_{k,k+1} \right) \neq 0,
$$

$$A^{n-2} \neq 0, \quad A^{n-1} = 0,$$

т.е. $\nu(\mathcal{A}) = n-1$.

(2) Предположим, существует индекс $j \in \{r, r+1\}$ такой, что равенство $b_{j,r+2;q} = 0$ выполняется для всех $q = 1, \dots, n-2$. В этом случае неравенство

$$b_{r-1,r;r-1} b_{r,r+2;r} + b_{r-1,r+1;r-1} b_{r+1,r+2;r} \neq 0$$

влечёт

$$b_{r-1,2r+1-j;r-1} b_{2r+1-j,r+2;r} \neq 0,$$
$$b_{r-1,2r+1-j;r-1} \neq 0,$$
$$b_{2r+1-j,r+2;r} \neq 0.$$

Тогда из предложения 3.4 получаем, что существует линейная комбинация матриц B_m – матрица $A = \{a_{i,j}\}$ такая, что все элементы $a_{2r+1-j,r+2}, a_{r-1,2r+1-j}, a_{k,k+1}$, $k \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{r-1, r, r+1\}$, не равны нулю, и $a_{j,r+2} = 0$. Откуда

$$(A^{n-2})_{1,n} = \left(\prod_{k=1}^{r-2} a_{k,k+1}\right) \cdot a_{r-1,2r+1-j} \cdot a_{2r+1-j,r+2} \cdot \left(\prod_{k=r+2}^{n-1} a_{k,k+1}\right) \neq 0,$$

$$A^{n-2} \neq 0, \quad A^{n-1} = 0,$$

т.е. $\nu(\mathcal{A}) = n-1$.

(3) Осталось рассмотреть случай, когда существуют индексы s_1, s_2, s_3, $s_4 \in \{1, \dots, n-2\}$ такие, что $b_{r-1,r;s_1} \neq 0$, $b_{r,r+2;s_2} \neq 0$, $b_{r-1,r+1;s_3} \neq 0$, $b_{r+1,r+2;s_4} \neq 0$. Из предложения 3.4 получаем, что существует линейная комбинация матриц B_m – матрица $A = \{a_{i,j}\}$ такая, что все элементы

$$a_{r-1,r}, a_{r,r+2},\ a_{r-1,r+1}, a_{r+1,r+2},\ a_{k,k+1},\ k \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{r-1, r, r+1\},$$

не равны нулю, и $a_{r,r+1} = 0$.

Предположим, что $A^{n-2} = 0$, и приведём это утверждение к противоречию. Имеем

$$(A^{n-2})_{1,n} = (a_{1,2} \cdots a_{r-2,r-1}) \cdot (a_{r-1,r} a_{r,r+2} + a_{r-1,r+1} a_{r+1,r+2}) \times (a_{r+2,r+3} \cdots a_{n-1,n}) = 0,$$

$$a_{r-1,r} a_{r,r+2} + a_{r-1,r+1} a_{r+1,r+2} = 0. \tag{3.6}$$

Обозначим $\alpha = a_{r-1,r} \neq 0$, $\beta = a_{r-1,r+1} \neq 0$. Пусть $q = \alpha^{-1} a_{r+1,r+2}$. Тогда $q \neq 0$, $a_{r+1,r+2} = q\alpha$, и из равенства (3.6) получаем выражение $a_{r,r+2} = -\beta\alpha^{-1} a_{r+1,r+2} = -q\beta$.

Рассмотрим, какие условия возникают для матрицы $Y = \{Y_{i,j}\} \in N_n(\mathbb{F})$, если Y коммутирует с матрицей A. Положим $G = [A, Y]$, обозначим $G = \{g_{i,j}\}$. Тогда из условия $G = 0$ получаем

$$g_{r-1,r+1} = a_{r-1,r}Y_{r,r+1} - Y_{r-1,r}a_{r,r+1} = \alpha Y_{r,r+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{r,r+1} = 0, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} g_{r-2,r} &= a_{r-2,r-1}Y_{r-1,r} - Y_{r-2,r-1}a_{r-1,r} \\ &= a_{r-2,r-1}Y_{r-1,r} - Y_{r-2,r-1}\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \quad Y_{r-1,r} = \alpha \cdot (Y_{r-2,r-1}a^{-1}_{r-2,r-1}), \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &g_{r-2,r+1} \\ &= a_{r-2,r}Y_{r,r+1} + a_{r-2,r-1}Y_{r-1,r+1} - Y_{r-2,r}a_{r,r+1} - Y_{r-2,r-1}a_{r-1,r+1} \\ &= a_{r-2,r-1}Y_{r-1,r+1} - \beta Y_{r-2,r-1} = 0 \\ &\Rightarrow \quad Y_{r-1,r+1} = \beta \cdot (Y_{r-2,r-1}a^{-1}_{r-2,r-1}), \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} g_{r-1,r+2} &= a_{r-1,r}Y_{r,r+2} + a_{r-1,r+1}Y_{r+1,r+2} - Y_{r-1,r}a_{r,r+2} \\ &\quad - Y_{r-1,r+1}a_{r+1,r+2} \\ &= \alpha Y_{r,r+2} + \beta Y_{r+1,r+2} - \alpha \cdot (Y_{r-2,r-1}a^{-1}_{r-2,r-1})(-q\beta) \\ &\quad - \beta \cdot (Y_{r-2,r-1}a^{-1}_{r-2,r-1})q\alpha \\ &= \alpha Y_{r,r+2} + \beta Y_{r+1,r+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{r,r+2} = -\beta\alpha^{-1}Y_{r+1,r+2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Матрицы $B_1, \ldots, B_{n-2} \in \mathcal{A}$ коммутируют с матрицей A, следовательно, для их элементов выполнены соотношения (3.7)–(3.10). Тогда

$$\begin{aligned} &b_{r-1,r;r-1}b_{r,r+2;r} + b_{r-1,r+1;r-1}b_{r+1,r+2;r} \\ &\quad = \alpha \cdot (b_{r-2,r-1;r-1}a^{-1}_{r-2,r-1}) \cdot (-\beta\alpha^{-1}b_{r+1,r+2;r}) \\ &\qquad + \beta \cdot (b_{r-2,r-1;r-1}a^{-1}_{r-2,r-1}) \cdot (b_{r+1,r+2;r}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(B_1 \cdots B_{n-2})_{1,n} \\ &= (b_{1,2;1} \cdots b_{r-2,r-1;r-2}) \cdot (b_{r-1,r;r-1}b_{r,r+2;r} + b_{r-1,r+1;r-1}b_{r+1,r+2;r}) \\ &\qquad \times (b_{r+2,r+3;r+1} \cdots b_{n-1,n;n-2}) \\ &= (b_{1,2;1} \cdots b_{r-2,r-1;r-2}) \cdot 0 \cdot (b_{r+2,r+3;r+1} \cdots b_{n-1,n;n-2}) = 0, \\ &\qquad B_1 \cdots B_{n-2} = 0. \end{aligned}$$

Противоречие с выбором матриц $B_1, \ldots, B_{n-2}$.

Таким образом, $A^{n-2} \neq 0$, $\nu(\mathcal{A}) = n-1$. $\square$

Лемма 3.9. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$ и $\mathbb{F}$ – произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A}$ в $N_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$ такую, что $r = r(\mathcal{A}) \geqslant \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$. Тогда существует элемент $A \in \mathcal{A}$ индекса нильпотентности $n-1$.*

Доказательство. К алгебре $\mathcal{A}$ применим отображение $\sigma : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ транспонирования относительно побочной диагонали. Заметим, что σ задаётся правилом

$$\sigma(X) = P({}^T X)P,$$

где $P = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \vdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$ – так называемая перъединичная матрица, в частности, $P^{-1} = P$, поэтому σ является антиавтоморфизмом матричной алгебры. По построению также имеем, что $\sigma(N_n(\mathbb{F})) = N_n(\mathbb{F})$, поэтому $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A}) \subseteq N_n(\mathbb{F})$. И, в силу того, что σ – антиизоморфизм алгебры $\mathcal{A}$, алгебра $\mathcal{B}$ является коммутативной подалгеброй алгебры $N_n(\mathbb{F})$, причём алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют одинаковые индексы нильпотентности и ниль-индексы. Более того, выполнение условия $(A)_{r,r+1} = 0$ для любой матрицы $A \in \mathcal{A}$ влечёт, что для любой матрицы $B = \sigma(A)$ выполнено равенство $(B)_{n-r,n-r+1} = 0$. Поэтому, в силу биективности σ, определён параметр $r(\mathcal{B})$ и $r(\mathcal{B}) = n-r$. Имеем $r(\mathcal{B}) \in [1, n-1-\lceil \frac{n-1}{2} \rceil] \subseteq [1, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil]$. Следовательно, алгебра $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям одной из лемм 3.6–3.8 и содержит элемент B_0 индекса нильпотентности $n-1$. Тогда искомым элементом в $\mathcal{A}$ будет $A_0 = \sigma^{-1}(B_0)$. $\square$

Теперь докажем основной результат.

Теорема 3.10. *Пусть $n \geqslant 5$ и пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Тогда произвольная коммутативная нильпотентная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$ содержит элемент A индекса нильпотентности $n-1$.*

Доказательство. Всякая нильпотентная коммутативная подалгебра в матричной алгебре над произвольным полем сопряжением переводится в нильтреугольную подалгебру (см., например, [12, глава 2, теорема 6]), поэтому существует невырожденная матрица $T \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что алгебра $\mathcal{A}_T = T\mathcal{A}T^{-1} \subset N_n(\mathbb{F})$, причём $\mathcal{A}_T$ также является коммутативной матричной подалгеброй индекса нильпотентности $n-1$.

В зависимости от значения $r(\mathcal{A}_T)$ алгебра $\mathcal{A}_T$ удовлетворяет условиям одной из лемм 3.6–3.9. Следовательно, найдётся матрица $B \in \mathcal{A}_T$ индекса нильпотентности $n-1$. Тогда $A = T^{-1}BT \in \mathcal{A}$ – искомый элемент индекса нильпотентности $n-1$. □

Как показывает пример линейной оболочки векторов $v = (0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ и $u = (1, \ldots, 1, 0)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{F}^*$ и каждый элемент $\mathbb{F}^*$ встречается в строке v, условие на мощность поля в предложении 3.4 невозможно ослабить, поэтому встаёт следующий вопрос.

Вопрос 3.11. Является ли условие $|\mathbb{F}| \geqslant n$ существенным в теореме 3.10?

Объединяя теоремы 2.2 и 3.10, получаем следующий классификационный результат.

Теорема 3.12. *Пусть $n \geqslant 5$ и пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле мощности $|\mathbb{F}| \geqslant n$. Обозначим через $\mathbb{F}^*$ мультипликативную группу поля $\mathbb{F}$, через Q – подгруппу $\mathbb{F}^*$, образованную квадратами элементов из $\mathbb{F}^*$. Положим $A = E_{1,2} + \cdots + E_{n-2,n-1} \in N_n(\mathbb{F})$. Пусть $\mathcal{A}$ – коммутативная нильпотентная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности $n-1$. Тогда*

1. *Алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена в $M_n(\mathbb{F})$ с одной из следующих подалгебр:*

i. $\mathcal{B}_{0;n} = \langle A, A^2, \ldots, A^{n-2} \rangle \subset N_n(\mathbb{F})$;

ii. $\mathcal{B}_{1;n} = \langle E_{1,n},\ B|\ B \in \mathcal{B}_{0;n} \rangle \subset T_n(\mathbb{F})$;

iii. $\mathcal{B}_{2;n} = \langle E_{n,n-1},\ B|\ B \in \mathcal{B}_{0;n} \rangle \subset M_n(\mathbb{F})$;

iv. $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha) = \langle E_{1,n} + \alpha E_{n,n-1},\ B|\ B \in \mathcal{B}_{0;n} \rangle \subset M_n(\mathbb{F})$, *где* $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$.

2. *Подалгебры разных типов не сопряжены между собой; подалгебры типов* ii–iv *являются максимальными по включению коммутативными нильпотентными подалгебрами и содержат подалгебру $\mathcal{B}_{0;n}$, не являющуюся максимальной по включению.*

3. *При нечётном n и произвольном $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$ подалгебра $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)$ сопряжена с подалгеброй $\mathcal{B}_{3;n}(1)$; при чётном n и произвольном $\alpha \in \mathbb{F}$,*

$\alpha \neq 0$, подалгебра $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha)$ сопряжена с одной из попарно несопряжённых подалгебр $\mathcal{B}_{3;n}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{B}_{3;n}(\alpha_i), \ldots$, где $\{\alpha_j\}$ – полная система представителей $\mathbb{F}^*$ по модулю Q.

Вопрос 3.13. Интересно найти аналог теоремы 3.10 для ассоциативных конечномерных коммутативных нильпотентных алгебр над полем. В частности, при каких условиях такая алгебра индекса нильпотентности N представима матрицами порядка именно $N+1$?

Автор выражает благодарность А. Э. Гутерману за полезные обсуждения при подготовке статьи.

Литература

1. R. C. Courter, *The dimension of maximal commutative subalgebras of K_n.* — Duke Math. J. **32** (1965), 225–232.
2. M. Gerstenhaber, *On dominance and varieties of commuting matrices.* — Annals Math. **73**, No. 2 (1961), 324–348.
3. A. E. Guterman, O. V. Markova, *Commutative matrix subalgebras and length function.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 1790–1805.
4. N. Jacobson, *Schur's theorems on commutative matrices.* — Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 431–436.
5. T. J. Laffey, *The minimal dimension of maximal commutative subalgebras of full matrix algebras.* — Linear Algebra Appl. **71** (1985), 199–212.
6. T. J. Laffey, S. Lazarus, *Two-generated commutative matrix subalgebras.* — Linear Algebra Appl. **147** (1991), 249–273.
7. О. В. Маркова, *Характеризация коммутативных матричных подалгебр максимальной длины над произвольным полем.* — Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. **5** (2009), 53–55.
8. И. А. Павлов, *О коммутативных нильпотентных алгебрах матриц.* — Докл. Акад. наук БССР **11**, No. 10 (1967), 870–872.
9. A. Paz, *An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables.* — Linear Multilinear Algebra **15** (1984), 161–170.
10. I. Schur, *Zur Theorie der Vertauschbären Matrizen.* — J. reine angew. Math. **130** (1905), 66–76.
11. Youngkwon Song, *A construction of maximal commutative subalgebra of matrix algebras.* — J. Korean Math. Soc. **40**, No. 2 (2003), 241–250.
12. Д. А. Супруненко, Р. И. Тышкевич, *Перестановочные матрицы.* 2-е изд. М., УРСС, 2003

Markova O. V. Commutative nilpotent subalgebras with nilpotency index $n-1$ in the algebra of matrices of order n.

The paper establishes the existence of an element with nilpotency index $n-1$ in the algebra of upper niltriangular matrices $N_n(\mathbb{F})$ over a field $\mathbb{F}$ with at least n elements for all $n \geqslant 5$ and, as a corollary, also in the full

matrix algebra $M_n(\mathbb{F})$. This result implies an improvement with respect to the basic field of known classification theorems due to D. A. Suprunenko, R. I. Tyschkevich, and I. A. Pavlov for algebras of the class considered.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ov_markova@mail.ru

Поступило 2 ноября 2016 г.