Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

А. А. Макаров

О ДВОЙСТВЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ К МИНИМАЛЬНЫМ СПЛАЙНАМ

§1. Введение

Изучению различных схем локальной аппроксимации посвящена обширная литература (см., например, [1–9]). Известно, что отличительной особенностью локальных схем является то, что коэффициенты при базисных функциях задаются в явном виде. Они могут определяться и из условий интерполяции, однако в этом случае требуется решать систему линейных алгебраических уравнений, порядок которой равен числу узлов интерполяции. Другой способ заключается в определении упомянутых коэффициентов через аппроксимационные функционалы, которые представляют собой, например, линейные комбинации значений и производных приближаемой функции. При этом не нужно решать никаких систем уравнений. Схемы, в которых достигается максимальный порядок точности, как и при интерполяции, называют квазиинтерполяцией.

Целью данной работы является рассмотрение минимальных сплайнов лагранжева типа невысоких порядков и построение системы функционалов, обладающей свойством биортогональности к системе минимальных координатных сплайнов. Полученные результаты применяются к решению некоторых интерполяционных задач. Для иллюстрации результатов для полиномиальной порождающей вектор-функции из аппроксимационных соотношений строятся B-сплайны. В качестве приложения такого подхода мгновенно получаются следующие результаты: свойство разбиения единицы, тождество Марсдена [10], представление мономов и связь B-сплайнов с элементарными симметрическими многочленами. Установлено, что найденные реализации двойственных функционалов к B-сплайнам совпадают с функционалом де

Ключевые слова: минимальные сплайны, B-сплайн, биортогональная система, двойственный функционал, функционал де Бора–Фикса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (в рамках научного проекта 16-31-60060 мол_а_дк) и Президента РФ (грант No. МД-6766.2015.9).

Бора–Фикса [2], а поставленные интерполяционные задачи, рассматриваемые на целочисленной сетке, имеют прямое решение в соответствующих классах элементарных минимальных сплайнов [11].

§2. Предварительные обозначения

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+ \overset{\text{def}}{=} \{j \mid j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}^1$ – множество вещественных чисел. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$. Векторное (линейное) пространство $(m+1)$-мерных вектор-столбцов обозначим через $\mathbb{R}^{m+1}$, причем векторы в нем будем отождествлять с одностолбцовыми матрицами и применять к ним обычные матричные операции; в частности, для двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m+1}$ выражение $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ представляет собой евклидово скалярное произведение этих векторов. Компоненты векторов обозначаются квадратными скобками и нумеруются цифрами $0, 1, \ldots, m$; например, $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, \ldots, [\mathbf{a}]_m)^T$. Квадратная матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^{m+1}$ (в указанном только что порядке), обозначается символом $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$, а выражение $\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ обозначает ее определитель. Упорядоченное множество $\mathbf{A} \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m+1}$ будем называть *цепочкой векторов*. Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если $\det(\mathbf{a}_{j-m}, \mathbf{a}_{j-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_j) \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$. Совокупность всех полных цепочек будем обозначать через $\mathbb{A}$. Множество всех функций непрерывных на интервале (α, β) обозначим через $C(\alpha, \beta)$; для любого числа $S \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначение

$$C^S(\alpha,\beta) \overset{\text{def}}{=} \bigl\{u \mid u^{(i)} \in C(\alpha,\beta)\ \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, S\bigr\},$$

полагая $C^0(\alpha,\beta) = C(\alpha,\beta)$. Если компоненты вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m+1}$ непрерывно дифференцируемы S раз на интервале (α, β), то будем писать $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^S(\alpha,\beta)$. Аналогичные обозначения $C^S[a,b]$ и $\mathbf{C}^S[a,b]$ будем использовать для соответствующих пространств на отрезке $[a,b]$. Пространство кусочно-непрерывных функций с конечным числом разрывов первого рода на каждом отрезке $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$ обозначим через $C^{-1}(\alpha,\beta)$; при этом будем считать, что каждая функция этого пространства непрерывна слева.

§3. Пространство минимальных сплайнов

На интервале $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X \overset{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X:\ \cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots, \tag{1}$$

где $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{j\to-\infty} x_j$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{j\to+\infty} x_j$ (случаи $\alpha=-\infty, \beta=+\infty$ не исключаются).

Введем обозначения

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}}(x_j, x_{j+1}), \quad S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_j, x_{j+m+1}],$$
$$J_k \stackrel{\text{def}}{=} \{k-m, k-m+1, \ldots, k\},$$

где $k, j \in \mathbb{Z}$.

При $K_0 \geqslant 1$, $K_0 \in \mathbb{R}^1$ обозначим через $\mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$ класс сеток вида (1) со свойством *локальной квазиравномерности* (подробнее о таких сетках см. [7])

$$K_0^{-1} \leqslant \frac{x_{j+1}-x_j}{x_j - x_{j-1}} \leqslant K_0 \;\; \forall j \in \mathbb{Z}$$

и положим $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} (x_{j+1}-x_j)$.

Пусть $\mathbb{X}(M)$ – линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi}$: $(\alpha,\beta) \mapsto \mathbb{R}^{m+1}$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$.

Если цепочка векторов $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m+1}$, полная, то из условий

$$\begin{aligned} \sum_{j'\in J_k} \mathbf{a}_{j'}\,\omega_{j'}(t) \equiv \quad & \boldsymbol{\varphi}(t) \quad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}), \forall\, k \in \mathbb{Z}, \\ \omega_j(t) \equiv \quad & 0 \qquad\; \forall\, t \notin S_j \cap M \end{aligned} \tag{2}$$

однозначно определяются функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $j \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $\operatorname{supp}\omega_j(t) \subset S_j$.

По формулам Крамера из системы линейных алгебраических уравнений (2) находим

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k, j'\neq j} \;\;\|\;\; {}'^j\, \boldsymbol{\varphi}(t)\Big)}{\det\Big(\mathbf{a}_{k-m}, \mathbf{a}_{k-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k\Big)} \quad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}),\ \forall\, j \in J_k,$$

где символьная запись $\;\|\;\; {}'^j$ означает, что определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца $\mathbf{a}_j$ на столбец $\boldsymbol{\varphi}(t)$ (с сохранением прежнего порядка следования столбцов).

Линейная оболочка функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ называется *пространством минимальных координатных* $(\mathbf{A},\boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов* на сетке X и обозначается через

$$\mathbb{S}(X,\mathbf{A},\boldsymbol{\varphi}) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{u \mid u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\,\omega_j \ \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1\Big\}.$$

Условия (2) называются *аппроксимационными соотношениями*, вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется *порождающей* для $(\mathbf{A},\boldsymbol{\varphi})$-сплайнов. Термин *координатные сплайны* используем для функций, являющихся базисом сплайнового пространства (для того, чтобы не применять термин "базисные сплайны", который у разных авторов имеет различный смысл). Функции ω_j, являющиеся решением аппроксимационных соотношений (2), называем *минимальными координатными сплайнами лагранжева типа*.

В дальнейшем для вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^S(\alpha,\beta)$ положим

$$\boldsymbol{\varphi}_k \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}(x_k), \qquad \boldsymbol{\varphi}_k^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(x_k), \quad i = 0,1,\ldots,S, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{\Pi}(\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$, определяемую тождеством

$$\mathbf{\Pi}^T(\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{m-1})\,\mathbf{z} \,\equiv\, \det\big(\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{m-1},\mathbf{z}\big) \tag{3}$$

для всех $\mathbf{z},\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{m-1} \in \mathbb{R}^{m+1}$. Вектор-функцию $\mathbf{\Pi}(\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{m-1})$ называют *m-местным векторным произведением* в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ и обозначают через $\mathbf{z}_0 \times \mathbf{z}_1 \times \cdots \times \mathbf{z}_{m-1}$ (подробнее см. [12]).

При $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^{m-1}(\alpha,\beta)$ рассмотрим векторы, определяемые формулой

$$\mathbf{d}_j \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_j \times \boldsymbol{\varphi}'_j \times \cdots \times \boldsymbol{\varphi}_j^{(m-1)}. \tag{4}$$

Пусть $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^m(\alpha,\beta)$. Введем следующее обозначение для вронскиана:

$$W(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det\Big(\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\varphi}'(t),\ldots,\boldsymbol{\varphi}^{(m-1)}(t),\boldsymbol{\varphi}^{(m)}(t)\Big).$$

Определим цепочку векторов $\mathbf{A}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j^*\}$ формулой

$$\mathbf{a}_j^* \stackrel{\text{def}}{=} -\mathbf{d}_{j+1} \times \mathbf{d}_{j+2} \times \cdots \times \mathbf{d}_{j+m}. \tag{5}$$

Лемма 1 ([13])**.** *Пусть $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^m(\alpha,\beta)$. Если выполнено условие*

$$|W(t)| \geqslant c = \text{const} > 0 \qquad \forall\, t \in (\alpha,\beta) \tag{6}$$

и сетка X принадлежит $\mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$ для некоторого $K_0 \geqslant 1$, то при достаточно малом h_X пространство $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\varphi})$ лежит в пространстве $C^{m-1}(\alpha, \beta)$.

Пространство $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\varphi})$ называется *пространством минимальных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов $(m+1)$-порядка* на сетке X. Сами сплайны будем называть *минимальными сплайнами максимальной гладкости.* Разность между порядком сплайна и порядком его наивысшей непрерывной производной называется *дефектом* сплайна. Таким образом, сплайны максимальной гладкости являются сплайнами с минимальным дефектом (равным 1).

Теорема 1. *Пусть $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 \equiv 1$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$. Если цепочку векторов $\mathbf{A}^N \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j^N\}$ определить формулой*

$$\mathbf{a}_j^N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{d}_{j+1} \times \cdots \times \mathbf{d}_{j+m}}{[\mathbf{d}_{j+1} \times \cdots \times \mathbf{d}_{j+m}]_0}, \tag{7}$$

то справедливо следующее тождество (свойство разбиения единицы):

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega_j(t) \equiv 1 \quad \forall t \in (\alpha, \beta).$$

Доказательство. Упомянутое тождество получается рассмотрением аппроксимационных соотношений (2) с векторами $\mathbf{a}_j^N$ в покомпонентном виде. Рассматривая нулевую компоненту, из равенств $[\mathbf{a}_j^N]_0 = 1$ и $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 = 1$ видно, что сплайны ω_j образуют разбиение единицы. $\square$

Пространство $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^N, \boldsymbol{\varphi})$ называется *пространством нормализованных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов $(m+1)$-порядка* на сетке X. В случае полиномиальных компонент порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ можно говорить о степени сплайна, тогда (полиномиальные) сплайны максимальной гладкости являются сплайнами степени m (подробнее см. следующий параграф).

§4. О выборе порождающей функции для B-сплайнов

Аппроксимационные соотношения (2) можно строить и для $m = 0$ (подробнее см. [14]). Рассмотрим измеримую функцию $\varphi : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^1$ отличную от нуля почти всюду на интервале (α, β). Если $\varphi \in$

$C^{-1}(\alpha,\beta)$, то $\omega_j \in C^{-1}(\alpha,\beta)$ и справедливы формулы

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{8}$$

При $\varphi(t) \equiv 1\ \forall t \in (\alpha,\beta)$ из формулы (8) получаем представление B-сплайна нулевой степени (первого порядка)

$$\omega_j^{B,0}(t) = \chi_{[x_j,x_{j+1})}(t), \tag{9}$$

где $\chi_{[x_j,x_{j+1})}(t)$ – характеристическая функция промежутка $[x_j, x_{j+1})$.

Пусть $m = 1$. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : (\alpha,\beta) \mapsto \mathbb{R}^2$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$. Формулы (3), (4), (5) для нахождения векторов $\mathbf{a}_j^*$ и $\mathbf{d}_j$ немного видоизменяются из-за того, что в m-местном векторном произведении $m = 1$. Рассмотрим векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^2$, задаваемые тождеством $\mathbf{d}_j^T\mathbf{x} \equiv \det(\boldsymbol{\varphi}_j, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $j \in \mathbb{Z}$, и определим векторы $\mathbf{a}_j^* \in \mathbb{R}^2$ формулой $\mathbf{a}_j^* \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}$. Представим векторы $\mathbf{d}_j$ и $\mathbf{a}_j^*$ в покомпонентном виде:

$$\mathbf{d}_j = (-[\boldsymbol{\varphi}_j]_1, [\boldsymbol{\varphi}_j]_0)^T, \quad \mathbf{a}_j^* = ([\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_0, [\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1)^T.$$

Если $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^1(\alpha,\beta)$, то $\omega_j \in C(\alpha,\beta)$ и справедливы формулы

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}_j^T\boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T\mathbf{a}_j^*}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\mathbf{d}_{j+2}^T\boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+2}^T\mathbf{a}_j^*}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \end{cases} \tag{10}$$

а при $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 \equiv 1$ формулы (10) принимают следующий вид:

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{[\boldsymbol{\varphi}(t)]_1 - [\boldsymbol{\varphi}_j]_1}{[\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1 - [\boldsymbol{\varphi}_j]_1}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{[\boldsymbol{\varphi}_{j+2}]_1 - [\boldsymbol{\varphi}(t)]_1}{[\boldsymbol{\varphi}_{j+2}]_1 - [\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

Для $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1,t)^T$ вронскиан $W(t)$ равен 1. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Найдем

$$\mathbf{d}_j = (-x_j, 1)^T, \quad \mathbf{a}_j^N = \boldsymbol{\varphi}_{j+1} = (1, x_{j+1})^T. \tag{11}$$

Тогда функции ω_j совпадают с известными полиномиальными B-сплайнами первой степени, т.е. с одномерными функциями Куранта:

$$\omega_j^{B,1}(t) = \begin{cases} \dfrac{t - x_j}{x_{j+1} - x_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{x_{j+2} - t}{x_{j+2} - x_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

Пусть $m = 2$. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^3$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$. Если $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^2(\alpha, \beta)$, то $\omega_j \in C^1(\alpha, \beta)$ и справедливы формулы

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} - \dfrac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} \dfrac{\mathbf{d}_{j+1}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N} & \\ \text{или } \dfrac{\mathbf{d}_{j+3}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^N} - \dfrac{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_{j-1}^N}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^N} \dfrac{\mathbf{d}_{j+2}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+2}^T \mathbf{a}_{j-1}^N}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \dfrac{\mathbf{d}_{j+3}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^N}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases} \tag{12}$$

Подробнее о вариативности выбора представления сплайна $\omega_j(t)$ на произвольном сеточном интервале (x_k, x_{k+1}) см. работу [13].

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) \overset{\text{def}}{=} (1, t, t^2)^T$. Тогда вронскиан $W(t)$ равен 2. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Для всех $j \in \mathbb{Z}$, используя формулы (4) и (7), находим векторы

$$\mathbf{d}_j = (x_j^2, -2\,x_j, 1)^T, \quad \mathbf{a}_j^N = \left(1, \frac{x_{j+1} + x_{j+2}}{2}, x_{j+1}x_{j+2}\right)^T. \tag{13}$$

Теперь легко выводим равенства

$$\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t) = (t - x_j)^2, \qquad \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_k^N = (x_j - x_{k+1})(x_j - x_{k+2}) \quad \forall\, j, k \in \mathbb{Z}.$$

Из упомянутых выше равенств и формулы (12) вытекает представление известного полиномиального B-сплайна второй степени, который обозначим через $\omega_j^{B,2}$:

$$\omega_j^{B,2}(t) = \frac{(t - x_j)^2}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_j)}, \quad t \in [x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j^{B,2}(t) = \Big((x_j + x_{j+1} - x_{j+2} - x_{j+3})\,t^2 - 2(x_j x_{j+1} - x_{j+2}x_{j+3})\,t$$
$$+ x_j x_{j+1} x_{j+2} + x_j x_{j+1} x_{j+3} - x_j x_{j+2} x_{j+3} - x_{j+1} x_{j+2} x_{j+3}\Big)$$
$$\times (x_{j+2} - x_j)^{-1}(x_{j+2} - x_{j+1})^{-1}(x_{j+3} - x_{j+1})^{-1}, \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}),$$

$$\omega_j^{B,2}(t) = \frac{(t - x_{j+3})^2}{(x_{j+3} - x_{j+1})\,(x_{j+3} - x_{j+2})}, \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}).$$

Пусть $m = 3$. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^4$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$. Если $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^3(\alpha, \beta)$, то $\omega_j \in C^2(\alpha, \beta)$ и справедливы формулы

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\[2ex] \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} - \dfrac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} \dfrac{\mathbf{d}_{j+1}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\[2ex] \dfrac{\mathbf{d}_{j+4}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+4}^T \mathbf{a}_j^N} - \dfrac{\mathbf{d}_{j+4}^T \mathbf{a}_{j-1}^N}{\mathbf{d}_{j+4}^T \mathbf{a}_j^N} \dfrac{\mathbf{d}_{j+3}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_{j-1}^N}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}), \\[2ex] \dfrac{\mathbf{d}_{j+4}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+4}^T \mathbf{a}_j^N}, & t \in [x_{j+3}, x_{j+4}). \end{cases} \tag{14}$$

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1, t, t^2, t^3)^T$. Тогда вронскиан $W(t)$ равен 12. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Для всех $j \in \mathbb{Z}$ по формуле (4) находим вектор

$$\mathbf{d}_j = 2(-x_j^3, 3\,x_j^2, -3\,x_j, 1)^T,$$

откуда, используя представление (7), получаем вектор

$$\mathbf{a}_j^N = \Big(1, \frac{x_{j+1} + x_{j+2} + x_{j+3}}{3}, \frac{x_{j+1}x_{j+2} + x_{j+2}x_{j+3} + x_{j+3}x_{j+1}}{3}, x_{j+1}x_{j+2}x_{j+3}\Big)^T. \tag{15}$$

Далее получаем равенства

$$\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t) = 2(t - x_j)^3, \quad \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_k^N = -2(x_j - x_{k+1})(x_j - x_{k+2})(x_j - x_{k+3}) \quad \forall\, j, k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь из формулы (14) вытекает представление известного (см., например, [15]) полиномиального B-сплайна третьей степени, который обозначим через $\omega_j^{B,3}$:

$$\omega_j^{B,3}(t) = (x_{j+4} - x_j) \sum_{\substack{i=j,\\ i\neq j+2}}^{j+4} \frac{(t-x_i)^3_{\#}}{\prod\limits_{\substack{j\leqslant j'\leqslant j+4,\\ j'\neq i}} (x_i - x_{j'})},$$

где $t \in [x_j, x_{j+4}]$, $j \in \mathbb{Z}$, а символом $_{\#}$ обозначен аналог усеченной степени

$$(t-x_i)_{\#} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (t-x_i)_+, & t \in [x_j, x_{j+2}), \\ (t-x_i)_-, & t \in [x_{j+2}, x_{j+4}], \end{cases}$$

$$(t-x_i)_+ \stackrel{\text{def}}{=} \max\{0, t-x_i\}, \quad (t-x_i)_- \stackrel{\text{def}}{=} \max\{0, x_i - t\}.$$

Для порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t, \ldots, t^m)^T, m = 1,2,3,$ из формул (11), (13) и (15) видно, что компонентами вектора $[\mathbf{a}_j^N]_i$ являются элементарные симметрические многочлены, т.е.

$$[\mathbf{a}_j^N]_i = \frac{\sigma_i(x_{j+1}, \ldots, x_{j+m})}{C_m^i}, \tag{16}$$

где $\sigma_i(x_{j+1}, \ldots, x_{j+m})$ – элементарный симметрический многочлен степени i от m переменных, определяемый равенством

$$\sigma_i(x_{j+1}, \ldots, x_{j+m}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_i\leqslant m} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, m. \tag{17}$$

Заметим, что число слагаемых в многочлене $\sigma_i(x_{j+1}, \ldots, x_{j+m})$ равно числу сочетаний C_m^i.

Благодаря равенству (16), покомпонентная запись аппроксимационных соотношений (2) ведет к известному (см., например, [5]) представлению мономов t^i через нормализованные B-сплайны степени m :

$$t^i = \frac{1}{C_m^i} \sum_{j=k-m}^{k} \sigma_i(x_{j+1}, \ldots, x_{j+m})\, \omega_j^{B,m}(t),$$
$$\forall\, t \in (x_k, x_{k+1}), \forall\, k \in \mathbb{Z},\ i = 0, 1, \ldots, m.$$

Полагая $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_i \stackrel{\text{def}}{=} (x-t)^i, x \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, m$, из равенства (16) находим

$$[\mathbf{a}_j^N]_m = \sigma_m(x - x_{j+1}, \dots, x - x_{j+m}) = \prod_{i=1}^{m}(x - x_{j+i}),$$

откуда, рассматривая m-ую компоненту аппроксимационных соотношений (2), выводим известное тождество Марсдена [10]:

$$(x-t)^m = \sum_{j=k-m}^{k} \psi_{j,m}(x)\, \omega_j^{B,m}(t) \quad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}),\, \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

где

$$\psi_{j,m}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - x_{j+1})(x - x_{j+2}) \cdots (x - x_{j+m}). \tag{18}$$

Пространство B-сплайнов степени m обозначим через

$$\mathbb{S}^{B,m}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ u \mid u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j\, \omega_j^{B,m} \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1 \Big\}.$$

§5. Биортогональная система функционалов

Рассмотрим некоторое линейное пространство $\mathfrak{U}$ над полем вещественных чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{U}^*$ линейных функционалов f над пространством $\mathfrak{U}$. Значение функционала f на элементе $u \in \mathfrak{U}$ обозначим через $\langle f, u\rangle$. Множество $(m+1)$-компонентных вектор-столбцов с компонентами из пространства $\mathfrak{U}$ обозначим через $\mathfrak{U}^{m+1}$. Будем рассматривать также $(m+1)$-компонентные вектор-столбцы, компоненты которых лежат в пространстве $\mathfrak{U}^*$, и образуемое этими векторами линейное пространство $\mathfrak{U}^{*\,m+1}$. Для транспонирования матриц и вектор-столбцов, как и ранее, используем букву T, так что, например, для векторов $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_m)^T \in \mathfrak{U}^{*\,m+1}$ и $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_m)^T \in \mathfrak{U}^{m+1}$ выражение $\mathbf{f}^T\mathbf{v} = \sum\limits_{j=0}^{m} \langle f_j, v_j\rangle$ представляет собой вещественное число, а выражение $\mathbf{f}\mathbf{v}^T = \Big(\langle f_i, v_j\rangle\Big)_{i,j=0,1,\dots,m}$ – числовую матрицу порядка $m+1$.

В дальнейшем потребуется линейное пространство $C\langle c, d\rangle$, состоящее из функций $u(t)$ пространства $C(c,d)$, которые имеют конечные пределы $\lim\limits_{t \to c+0} u(t)$ и $\lim\limits_{t \to d-0} u(t)$.

Введем также пространства

$$\mathbb{C}_X \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{k\in\mathbb{Z}} C\langle x_k, x_{k+1}\rangle, \quad \mathbb{C}_X^S \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{u \mid u^{(i)} \in \mathbb{C}_X,\ \forall\, i = 0,1,\dots,S\Big\}.$$

Символом $(\mathbb{C}_X^S)^*$ обозначается пространство, сопряженное к пространству $\mathbb{C}_X^S$. При $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^S(\alpha,\beta)$ пространства $\mathbb{S}(X,\mathbf{A},\boldsymbol{\varphi})$ лежат в пространстве $\mathbb{C}_X^S$.

Для функционала $f \in (\mathbb{C}_X^S)^*$ будем писать $\operatorname{supp} f \subset [c,d]$, если значение $\langle f,u\rangle$ определяется значениями функции $u \in \mathbb{C}_X^S$ на интервале (c,d).

Будем говорить, что система функционалов $\{\nu_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *биортогональна* системе функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, если $\langle \nu_i,\omega_j\rangle = \delta_{i,j} \quad \forall\, i,j \in \mathbb{Z}$, где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Функционалы ν_i называются *двойственными функционалами* к функциям ω_j.

Лемма 2 ([16]). *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^S(\alpha,\beta)$, $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$ *и для каждого фиксированного* $k \in \mathbb{Z}$ *определен вектор* $\mathbf{f}_k \stackrel{\text{def}}{=} ([\mathbf{f}_k]_0, [\mathbf{f}_k]_1, \dots, [\mathbf{f}_k]_m)^T$, *компонентами которого служат функционалы* $[\mathbf{f}_k]_i \in (\mathbb{C}_X^S)^*$, $i = 0,1,\dots,m$, *такие, что* $\operatorname{supp}[\mathbf{f}_k]_i \subset [x_k, x_{k+1}]$. *Пусть матрица* $\mathbf{f}_k\boldsymbol{\varphi}^T$ *со столбцами вида*

$$\Big(\langle[\mathbf{f}_k]_0,[\boldsymbol{\varphi}]_i\rangle, \langle[\mathbf{f}_k]_1,[\boldsymbol{\varphi}]_i\rangle, \dots, \langle[\mathbf{f}_k]_m,[\boldsymbol{\varphi}]_i\rangle\Big)^T, \quad i = 0,1,\dots,m,$$

неособенная. Тогда при каждом фиксированном $r \in \{0,1,\dots,m\}$ *система* $\{\mathbf{g}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *функционалов* $[\mathbf{g}_k]_r \in (\mathbb{C}_X^S)^*$, *определяемых равенствами*

$$[\mathbf{g}_k]_r \stackrel{\text{def}}{=} \Big[A_{k-r+m}^T\Big(\mathbf{f}_{k-r+m}\,\boldsymbol{\varphi}^T\Big)^{-1}\mathbf{f}_{k-r+m}\Big]_r, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{19}$$

где $A_{k-r+m} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_{k-r}, \mathbf{a}_{k-r+1}, \dots, \mathbf{a}_{k-r+m})$, *представляет собой продолжение на* $\mathbb{C}_X^S$ *системы функционалов, биортогональной системе минимальных* $(\mathbf{A},\boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов* $\{\omega_{k'}\}_{k'\in\mathbb{Z}}$, *и*

$$\langle[\mathbf{g}_k]_r, \omega_{k'}\rangle = \delta_{k,k'} \quad \forall\, k,k' \in \mathbb{Z}, \tag{20}$$

$$\operatorname{supp}[\mathbf{g}_k]_r \subset [x_{k-r+m-1}, x_{k-r+m}] \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{C}_X^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$ *и выполнено неравенство*

$$W(x_k+0) \neq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{21}$$

Рассмотрим систему функционалов, заданных равенством

$$\langle[\mathbf{f}_k]_i, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u^{(i)}(x_k+0), \quad i = 0,1,\dots,m. \tag{22}$$

Тогда при каждом фиксированном $r \in \{0, 1, \dots, m\}$ *система* $\{\boldsymbol{\lambda}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *функционалов* $[\boldsymbol{\lambda}_k]_r \in (\mathbb{C}^S_X)^*$, *определяемых равенствами*

$$[\boldsymbol{\lambda}_k]_r \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{g}_k]_{m-r}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{23}$$

представляет собой продолжение на $\mathbb{C}^S_X$ *системы функционалов, биортогональной системе минимальных* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов* $\{\omega_{k'}\}_{k'\in\mathbb{Z}}$, *и*

$$\langle [\boldsymbol{\lambda}_k]_r, \omega_{k'} \rangle = \delta_{k,k'} \quad \forall\, k, k' \in \mathbb{Z}, \tag{24}$$

$$\operatorname{supp} [\boldsymbol{\lambda}_k]_r \subset [x_{k+r}, x_{k+r+1}] \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Проверим условия леммы 2. В рассматриваемом случае $S = m$; следовательно, $[\mathbf{f}_k]_i \in (\mathbb{C}^m_X)^*$ и $\operatorname{supp} [\mathbf{f}_k]_i \subset [x_k, x_{k+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m$. Матрица $\mathbf{f}_k\, \boldsymbol{\varphi}^T$ неособенная, так как ввиду предположения (21) ее определитеть $\det \mathbf{f}_k\, \boldsymbol{\varphi}^T = W(x_k + 0)$ отличен от нуля. Теперь из утверждений (19) и (20) вытекает справедливость равенства (24). Теорема доказана. □

Теорема 3. *Для того, чтобы для каждого фиксированного* $r \in \{0, 1, \dots, m\}$ *система функционалов* $\{[\boldsymbol{\lambda}_k]_r\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\operatorname{supp} [\boldsymbol{\lambda}_k]_r \subset [x_{k+r}, x_{k+r+1}]$, *была биортогональна системе минимальных* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов* $\{\omega_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle [\boldsymbol{\lambda}_k]_r, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \mathbf{a}_k \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{25}$$

Доказательство. Действительно, для каждого фиксированного $r \in \{0, 1, \dots, m\}$, применяя функционал $[\boldsymbol{\lambda}_k]_r$ к аппроксимационным соотношениям (2) на интервале (x_{k+r}, x_{k+r+1}), получим равенство

$$\sum_{j'=k-m+r}^{k+r} \mathbf{a}_{j'} \langle [\boldsymbol{\lambda}_k]_r, \omega_{j'} \rangle = \langle [\boldsymbol{\lambda}_k]_r, \boldsymbol{\varphi} \rangle. \tag{26}$$

Теперь из биортогональности $\{[\boldsymbol{\lambda}_k]_r\}$ и $\{\omega_{j'}\}$ выводим соотношение (25).

Обратно, если выполнено соотношение (25), то из равенства (26) получаем

$$\sum_{j'=k-m+r}^{k+r} \mathbf{a}_{j'} \langle [\boldsymbol{\lambda}_k]_r, \omega_{j'} \rangle = \mathbf{a}_k.$$

С учетом полноты цепочки векторов $\mathbf{a}_{j'}$ из однозначной разрешимости полученной системы уравнений выводим свойство биортогональности для $j' \in \{k - m + r, \dots, k + r\}$. Равенство нулю оставшихся значений $\langle[\boldsymbol{\lambda}_k]_r, \omega_{j'}\rangle$, $j' \in \mathbb{Z}\backslash\{k-m+r, \dots, k+r\}$ следует из расположения носителя функционала $[\boldsymbol{\lambda}_k]_r$ и носителя функции $\omega_{j'}$. Теорема доказана. □

Теорема 3 позволяет сразу же выписать одну из реализаций биортогональной системы функционалов. Вектору $\mathbf{a}_j^*$, определяему равенством (5), можно придать вид следующего символического определителя:

$$\mathbf{a}_j^* = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{j+1} & \boldsymbol{\varphi}'_{j+1} & \dots & \boldsymbol{\varphi}_{j+1}^{(m-1)} \\ \mathbf{d}_{j+2}^T\,\boldsymbol{\varphi}_{j+1} & \mathbf{d}_{j+2}^T\,\boldsymbol{\varphi}'_{j+1} & \dots & \mathbf{d}_{j+2}^T\,\boldsymbol{\varphi}_{j+1}^{(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{d}_{j+m}^T\,\boldsymbol{\varphi}_{j+1} & \mathbf{d}_{j+m}^T\,\boldsymbol{\varphi}'_{j+1} & \dots & \mathbf{d}_{j+m}^T\,\boldsymbol{\varphi}_{j+1}^{(m-1)} \end{vmatrix}; \tag{27}$$

его разложение по первой строке (содержащей векторы $\boldsymbol{\varphi}_{j+1}^{(i)}$) дает представление

$$\mathbf{a}_j^* = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{i0}\,\boldsymbol{\varphi}_{j+1}^{(i)},$$

где через α_{i0} обозначены соответствующие алгебраические дополнения. Отсюда находим

$$\mathbf{a}_j^N = \alpha_{00}^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{i0}\,\boldsymbol{\varphi}_{j+1}^{(i)}. \tag{28}$$

В силу соотношений (25) и (28), линейные функционалы, заданные равенством

$$\langle\mu_j, u\rangle \overset{\text{def}}{=} \alpha_{00}^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{i0}\,u^{(i)}(x_{j+1}),$$

являются двойственными к нормализованным $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнам.

§6. О двойственных функционалах к B-сплайнам

Рассмотрим интерполяционную задачу

$$\langle[\boldsymbol{\lambda}_j]_r, u\rangle = v_j \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}, \quad u \in \mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}), \tag{29}$$

где $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – заданная последовательность чисел (бесконечная в обе стороны).

Теорема 4. *Для каждого фиксированного* $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$ *в пространстве* $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$ *существует единственное решение задачи* (29), *и это решение дается формулой*

$$\widetilde{u}_r(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j \, \omega_j(t). \tag{30}$$

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 3. □

Следуя [7], интерполяционную задачу (29) будем называть *прямой интерполяционной задачей с параметром* r, если ее решение имеет вид (30), которое будем называть *прямым решением.*

Пусть дана функция $u \in C^{m+1}(\alpha, \beta)$. Рассмотрим сплайн

$$\widetilde{u}_r(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle [\boldsymbol{\lambda}_j]_r, u \rangle \, \omega_j(t), \quad t \in (x_k, x_{k+1}); \tag{31}$$

функционалы $[\boldsymbol{\lambda}_j]_r$ в этом случае будем называть *аппроксимационными.*

Учитывая расположение носителя функции ω_j для $t \in (x_k, x_{k+1})$, видим, что в сумме (31) имеется лишь $m + 1$ ненулевых слагаемых, поэтому аппроксимация (31) имеет вид

$$\widetilde{u}_r(t) = \sum_{j=k-m}^{k} \langle [\boldsymbol{\lambda}_j]_r, u \rangle \, \omega_j(t). \tag{32}$$

Теорема 5. *Для каждого фиксированного* $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$ *аппроксимация* (32) *обладает свойством точности на функциях* $u \in \{[\boldsymbol{\varphi}]_i \mid i = 0, 1, \ldots, m\}$, *т.е.*

$$\widetilde{u}_r \equiv u \quad \text{для} \quad u \in \{[\boldsymbol{\varphi}]_i \mid i = 0, 1, \ldots, m\}.$$

Доказательство. Эквивалентная запись аппроксимационных соотношений (2), ввиду равенства (25), имеет вид

$$\sum_{j=k-m}^{k} \langle [\boldsymbol{\lambda}_j]_r, [\boldsymbol{\varphi}]_i \rangle \, \omega_j(t) = [\boldsymbol{\varphi}]_i(t), \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

откуда очевидным образом следует точность на функциях

$$u \in \{[\boldsymbol{\varphi}]_i \mid i = 0, 1, \ldots, m\}.$$ □

Рассмотрим далее интерполяционные задачи, имеющие прямое решение в пространствах B-сплайнов $\mathbb{S}^{B,m}(X)$ с порождающей функцией $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t, \ldots, t^m)^T$, $m = 0, 1, 2, 3$. Начнем с $m = 0$.

Теорема 6. *Система линейных функционалов* $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$*, заданных на пространстве* $C^{-1}(\alpha,\beta)$ *формулой*

$$\langle\lambda_j,u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\eta_j+0), \quad u\in C^{-1}(\alpha,\beta), \quad \eta_j\in[x_j,x_{j+1}), \quad j\in\mathbb{Z}, \tag{33}$$

биортогональна системе функций $\{\omega_{j'}^{B,0}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$*, т.е.*

$$\langle\lambda_j,\omega_{j'}^{B,0}\rangle = \delta_{j,j'} \quad \forall j,j'\in\mathbb{Z}. \tag{34}$$

Доказательство. Поскольку при $j\leqslant j'-1$ и при $j\geqslant j'+1$ точка η_j не является внутренней точкой носителя функции $\omega_{j'}^{B,0}$, то сама функция в этой точке равна нулю, поэтому функционал (33) на такой функции обращается в нуль. Следовательно, для доказательства (34) достаточно рассмотреть случай $j'=j$. При $u=\omega_j^{B,0}$, согласно (9) и (33), имеем $\langle\lambda_j,\omega_j^{B,0}\rangle=\omega_j^{B,0}(\eta_j+0)=1$. Теорема доказана. □

Для $m=0$ имеется одна типовая интерполяционная задача, допускающая прямое решение, – обычная задача Лагранжа на бесконечной сетке

$$u(\eta_j+0)=v_j, \quad j\in\mathbb{Z},$$

прямое решение которой в пространстве $\mathbb{S}^{B,0}(X)$ имеет вид

$$\widetilde{u}(t)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j\,\omega_j^{B,0}(t).$$

Далее дадим представления реализаций функционалов $[\boldsymbol{\lambda}_k]_r$ для различных m и r. Для этого рассмотрим вспомагательную систему функционалов $[\mathbf{f}_{k-r+m}]_i, k\in\mathbb{Z}, r,i=0,1,\ldots,m$, определяемых равенством (22).

Неособенная матрица $\mathbf{f}_{k-r+m}\boldsymbol{\varphi}^T$ имеет вид

$$\mathbf{f}_{k-r+m}\boldsymbol{\varphi}^T=\left(\boldsymbol{\varphi}_{k-r+m},\boldsymbol{\varphi}'_{k-r+m},\ldots,\boldsymbol{\varphi}^{(m)}_{k-r+m}\right)^T.$$

Матрица $\mathbf{f}_{k-r+m}\boldsymbol{\varphi}^T$ является верхнетреугольной, а ее обратная представима в форме

$$(\mathbf{f}_{k-r+m}\boldsymbol{\varphi}^T)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -x_{k-r+m} & \frac{x^2_{k-r+m}}{2} & -\frac{x^3_{k-r+m}}{6} & \dots & \frac{(-1)^m x^m_{k-r+m}}{m!0!} \\ 0 & 1 & -x_{k-r+m} & \frac{x^2_{k-r+m}}{2} & \dots & \frac{(-1)^{m-1} x^{m-1}_{k-r+m}}{(m-1)!1!} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{x_{k-r+m}}{2} & \dots & \frac{(-1)^{m-2} x^{m-2}_{k-r+m}}{(m-2)!2!} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \dots & \frac{(-1)^{m-3} x^{m-3}_{k-r+m}}{(m-3)!3!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{m!} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Рассмотрим матрицу $A_{k-r+m} \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{a}^N_{k-r}, \mathbf{a}^N_{k-r+1}, \dots, \mathbf{a}^N_{k-r+m})$, элементы которой задаются равенством (16),

$$A_{k-r+m} = \left(\frac{\sigma_{i'}(x_{k-r+j'+1}, \dots, x_{k-r+j'+m})}{C^{i'}_m} \right)_{i',j'=0,1,\dots,m}.$$

Согласно представлению (17), матрица A^T_{k-r+m} имеет следующий вид:

$$A^T_{k-r+m}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} x_{k-r+i} & \cdots & \frac{1}{C^{i'}_m} & \sum\limits_{\substack{k-r+1 \\ \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_i \\ \leqslant k-r+m}} & x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_i} & \cdots & \prod\limits_{i=1}^{m} x_{k-r+i} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1}{m}\sum\limits_{i=j'+1}^{j'+m} x_{k-r+i} & \cdots & \frac{1}{C^{i'}_m} & \sum\limits_{\substack{k-r+j'+1 \\ \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_i \\ \leqslant k-r+j'+m}} & x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_i} & \cdots & \prod\limits_{i=j'+1}^{j'+m} x_{k-r+i} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1}{m}\sum\limits_{i=m+1}^{2m} x_{k-r+i} & \cdots & \frac{1}{C^{i'}_m} & \sum\limits_{\substack{k-r+m+1 \\ \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_i \\ \leqslant k-r+2m}} & x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_i} & \cdots & \prod\limits_{i=m+1}^{2m} x_{k-r+i} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Пусть $m = 1$. В этом случае, согласно (23), возможны два значения $r = 0, 1$. Используя равенства (19) и (22), а также представления (35) и (36), находим

$$\langle [\boldsymbol{\lambda}_j]_0, u \rangle = u(x_j) + (x_{j+1} - x_j) u'(x_j),$$

$$\langle [\boldsymbol{\lambda}_j]_1, u \rangle = u(x_{j+1}).$$

Для $r = 0$ имеется следующая интерполяционная задача

$$u(x_j) + (x_{j+1} - x_j)u'(x_j) = v_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{37}$$

прямое решение которой в пространстве $\mathbb{S}^{B,1}(X)$ имеет вид

$$\widetilde{u}_0(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j\, \omega_j^{B,1}(t).$$

Заметим, что в левой части равенства (37) находится линейная комбинация функции и ее первой производной, что отличает поставленную задачу от интерполяционных задач Лагранжа и Эрмита.

Для $r = 1$ имеется интерполяционная задача Лагранжа на бесконечной сетке

$$u(x_{j+1}) = v_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

прямое решение которой в пространстве $\mathbb{S}^{B,1}(X)$ имеет вид

$$\widetilde{u}_1(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j\, \omega_j^{B,1}(t).$$

Пусть $m = 2$. В этом случае, согласно (23), возможны три значения $r = 0, 1, 2$, для которых находим

$$\begin{aligned}\langle[\boldsymbol{\lambda}_j]_0, u\rangle = u(x_j) + \left(\frac{x_{j+1} + x_{j+2}}{2} - x_j\right) u'(x_j)& \\ + \frac{1}{2}(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_j)u''(x_j)&,\end{aligned}$$

$$\langle[\boldsymbol{\lambda}_j]_1, u\rangle = u(x_{j+1}) + \frac{1}{2}(x_{j+2} - x_{j+1})u'(x_{j+1}),$$

$$\langle[\boldsymbol{\lambda}_j]_2, u\rangle = u(x_{j+2}) - \frac{1}{2}(x_{j+2} - x_{j+1})u'(x_{j+2}).$$

Для $r = 0$ имеется интерполяционная задача

$$\begin{aligned}u(x_j) + \left(\frac{x_{j+1} + x_{j+2}}{2} - x_j\right) u'(x_j)& \\ + \frac{1}{2}(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_j)u''(x_j) = v_j,& \quad j \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

прямое решение которой в пространстве $\mathbb{S}^{B,2}(X)$ имеет вид

$$\widetilde{u}_0(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j\, \omega_j^{B,2}(t).$$

Для $r=1$ интерполяционная задача

$$u(x_{j+1})+\frac{1}{2}(x_{j+2}-x_{j+1})u'(x_{j+1})=v_j,\quad j\in\mathbb{Z},$$

в пространстве $\mathbb{S}^{B,2}(X)$ имеет прямое решение

$$\widetilde{u}_1(t)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}v_j\,\omega_j^{B,2}(t),$$

а для $r=2$ интерполяционная задача

$$u(x_{j+2})-\frac{1}{2}(x_{j+2}-x_{j+1})u'(x_{j+2})=v_j,\quad j\in\mathbb{Z},$$

в пространстве $\mathbb{S}^{B,2}(X)$ имеет прямое решение

$$\widetilde{u}_2(t)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}v_j\,\omega_j^{B,2}(t).$$

Пусть $m=3$. В этом случае, согласно (23), возможны четыре значения $r=0,1,2,3$, для которых находим

$$\begin{aligned}
\langle[\boldsymbol{\lambda}_j]_0,u\rangle&=u(x_j)+\frac{1}{3}(x_{j+1}+x_{j+2}+x_{j+3}-3x_j)u'(x_j)\\
&+\frac{1}{6}\Big((x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)+(x_{j+1}-x_j)(x_{j+3}-x_j)\\
&+(x_{j+2}-x_j)(x_{j+3}-x_j)\Big)u''(x_j)+\frac{1}{6}(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)(x_{j+3}-x_j)u'''(x_j),\\
\langle[\boldsymbol{\lambda}_j]_1,u\rangle&=u(x_{j+1})+\frac{1}{3}(x_{j+2}+x_{j+3}-2x_{j+1})u'(x_{j+1})\\
&+\frac{1}{6}(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})u''(x_{j+1}),\\
\langle[\boldsymbol{\lambda}_j]_2,u\rangle&=u(x_{j+2})+\frac{1}{3}(x_{j+1}+x_{j+3}-2x_{j+2})u'(x_{j+2})\\
&-\frac{1}{6}(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+2}-x_{j+1})u''(x_{j+2}),\\
\langle[\boldsymbol{\lambda}_j]_3,u\rangle&=u(x_{j+3})+\frac{1}{3}(x_{j+1}+x_{j+2}-2x_{j+3})u'(x_{j+3})\\
&+\frac{1}{6}(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+3}-x_{j+1})u''(x_{j+3}).
\end{aligned}$$

Для $r = 0$ интерполяционная задача

$$\begin{aligned} u(x_j) &+ \frac{1}{3}(x_{j+1} + x_{j+2} + x_{j+3} - 3x_j)u'(x_j) \\ &+ \frac{1}{6}\Big((x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_j) + (x_{j+1} - x_j)(x_{j+3} - x_j) \\ &\qquad + (x_{j+2} - x_j)(x_{j+3} - x_j)\Big)u''(x_j) \\ &+ \frac{1}{6}(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_j)(x_{j+3} - x_j)u'''(x_j) = v_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

в пространстве $\mathbb{S}^{B,3}(X)$ имеет прямое решение

$$\widetilde{u}_0(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j\, \omega_j^{B,3}(t);$$

для $r = 1$ интерполяционная задача

$$\begin{aligned} u(x_{j+1}) &+ \frac{1}{3}(x_{j+2} + x_{j+3} - 2x_{j+1})u'(x_{j+1}) \\ &+ \frac{1}{6}(x_{j+3} - x_{j+1})(x_{j+2} - x_{j+1})u''(x_{j+1}) = v_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

в пространстве $\mathbb{S}^{B,3}(X)$ имеет прямое решение

$$\widetilde{u}_1(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j\, \omega_j^{B,3}(t);$$

для $r = 2$ интерполяционная задача

$$\begin{aligned} u(x_{j+2}) &+ \frac{1}{3}(x_{j+1} + x_{j+3} - 2x_{j+2})u'(x_{j+2}) \\ &- \frac{1}{6}(x_{j+3} - x_{j+2})(x_{j+2} - x_{j+1})u''(x_{j+2}) = v_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

в пространстве $\mathbb{S}^{B,3}(X)$ имеет прямое решение

$$\widetilde{u}_2(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j\, \omega_j^{B,3}(t);$$

для $r = 3$ интерполяционная задача

$$\begin{aligned} u(x_{j+3}) &+ \frac{1}{3}(x_{j+1} + x_{j+2} - 2x_{j+3})u'(x_{j+3}) \\ &+ \frac{1}{6}(x_{j+3} - x_{j+2})(x_{j+3} - x_{j+1})u''(x_{j+3}) = v_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

в пространстве $\mathbb{S}^{B,3}(X)$ имеет прямое решение

$$\widetilde{u}_3(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j\,\omega_j^{B,3}(t).$$

Известно, что квазиинтерполяция, основанная на разложении Тейлора, ведет к использованию аппроксимационных функционалов, содержащих линейные комбинации значений и производных приближаемой функции. Заметим, что выписанные реализации двойственных функционалов для полиномиальной порождающей вектор-функции совпадают с двойственным функционалом де Бора–Фикса [2], определяемым равенством

$$\langle q_j, u\rangle = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\,\psi_{j,m}^{(m-i)}(x)\,u^{(i)}(x), \quad x\in[x_j, x_{j+m+1}),$$

где функция $\psi_{j,m}$ задается формулой (18).

Отметим также, что поставленные выше интерполяционные задачи, рассматриваемые на целочисленной сетке, имеют прямое решение в соответствующих классах элементарных минимальных сплайнов [11].

Литература

1. M. J. Marsden, I. J. Schoenberg, *On variation diminishing spline approximation methods.* — Mathematica (Cluj) **8** (31), No. 1 (1966), 61–82.
2. C. de Boor, G. J. Fix, *Spline approximation by quasiinterpolants.* — J. Approx. Theory **8**, No. 1 (1973), 19–45.
3. T. Lyche, L. L. Schumaker, *Local spline approximation methods.* — J. Approx. Theory **15**, No. 4 (1975), 294–325.
4. С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, *Сплайны в вычислительной математике.* М. 1976.
5. Ю. С. Завьялов, В. И. Квасов, В. К. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций.* М. 1980.
6. L. L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory.* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1981.
7. Ю. К. Демьянович, *Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны.* СПб., Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994.
8. И. Г. Бурова, Ю. К. Демьянович, *Минимальные сплайны и их приложения.* СПб., Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010.
9. Ю. С. Волков, Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин, *Локальная аппроксимация сплайнами со смещением узлов.* — Матем. тр. **14**, No. 2 (2011), 73–82.
10. M. J. Marsden, *An identity for spline functions with applications to variation-diminishing spline approximation.* — J. Approx. Theory **3**, No. 1 (1970), 7–49.

11. Ю. К. Демьянович, С. Ю. Маракова, *О решении некоторых интерполяционных задач в классах минимальных сплайнов.* — in: Сб. “Численный анализ: теория, приложения, программы” Изд-во МГУ (1999), с. 131–153.
12. М. Спивак, *Математический анализ на многообразиях.* Лань, СПб., 2005.
13. А. А. Макаров, *О построении сплайнов максимальной гладкости.* — Проблемы матем. анализа. Вып. 60. Межвуз. сб. / Под ред. Н. Н. Уральцевой. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская, 2011, с. 25–38.
14. А. А. Макаров, *Кусочно-непрерывные сплайн-вэйвлеты на неравномерной сетке.* — Тр. СПИИРАН **14** (2010), 103–131.
15. А. А. Макаров, *Один вариант сплайн-вэйвлетного разложения пространств B-сплайнов.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. **10**, Вып. 2 (2009), 59–71.
16. А. А. Макаров, *Биортогональные системы функционалов и матрицы декомпозиции для минимальных сплайнов.* — Укр. мат. вісник **9**, No. 2 (2012), 219–236.

Makarov A. A. On functionals dual to minimal splines.

The paper considers minimal splines of Lagrange type of lower orders, and a system of functionals biorthogonal to the system of minimal coordinate splines is constructed. The results obtained are illustrated on the example of a polynomial generating vector function, which leads to the construction of B-splines from the approximation relations.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.a.makarov@spbu.ru

Поступило 11 октября 2016 г.