Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

Н. А. Лебединская, Д. М. Лебединский, А. А. Смирнов

О ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РАЗМЕРНОСТЕЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОДПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ПЯТИ ПРЯМЫХ СЛАГАЕМЫХ

§1. Введение

Пусть у нас есть набор конечномерных векторных пространств $A_1, \dots, A_N$ и пусть есть подпространство $V \subset A_1 \oplus \dots \oplus A_N$, $V \cap A_i = \{0\}$ для всех i. Данная работа посвящена задаче выяснения того, какие размерности могут иметь пересечения $V \cap A_i \oplus A_j$.

Пусть $a_i = \dim A_i$ и $B_i = \{e_{i1}, \dots, e_{ia_i}\}$ – базис A_i, а $\bar{e}_{ij}$ – образы e_{ij} в фактор-пространстве $A_1 \oplus \dots \oplus A_N / V$. Теперь задание размерностей $a_{ij} = \dim V \cap A_i \oplus A_j$ эквивалентно заданию размерностей b_{ij} линейных оболочек для множеств $\{\bar{e}_{im}, \bar{e}_{jn}\}$, где $m = 1, \dots, a_i$ и $n = 1, \dots, a_j$; таким образом, если мы рассмотрим матроид [1] на множестве $\bar{B} = \{\bar{e}_{ij}\}$, то $r(\{\bar{e}_{i1}, \dots, \bar{e}_{ia_i}\}) = a_i$ и $r(\{\bar{e}_{i1}, \dots, \bar{e}_{ia_i}, \bar{e}_{j1}, \dots, \bar{e}_{ja_j}\}) = b_{ij} = a_i + a_j - a_{ij}$.

Таким образом, задача распадается на две части: во-первых, нужно выяснить, для каких значений a_i и a_{ij} найдется матроид с указанными выше значениями рангов и какие из этих матроидов будут реализуемы.

Значения a_i и a_{ij} удобно записывать в виде верхне-треугольной матрицы; те матрицы, по которым можно построить матроид, очевидно, образуют выпуклый конус, который можно задать конечным числом линейных неравенств – определить базис Гильберта для конуса коэффициентов этих неравенств – в этом и состоит существо нашей задачи.

§2. Доопределения частичной функции ранга

Одно из эквивалентных определений матроида позволяет задавать его при помощи задания рангов всех подмножеств базового множества [2]. В этом разделе обсуждается вопрос о том, при каких условиях задание рангов только для некоторых подмножеств может быть

Ключевые слова: прямая сумма, подпространство, матроид.

продолжено на все подмножества базового множества так, чтобы в итоге получился матроид.

Пусть есть конечный набор непересекающихся конечных множеств A_i при $i = 0, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$. Определим A_S при $S \subset \{1, \dots, N\}$ как $\bigcup\limits_{i \in S} A_i$ и B_S как $A_0 \cup A_S$.

Теорема 1. *Пусть заданы ранги всех множеств вида A_S и B_S, так что 1) для них выполняется условие из определения матроида ($r(L) + r(M) \geqslant r(L \cup M) + r(L \cap M)$, где L и M – множества вида A_S или B_S); 2) множества A_i при $i = 0, \dots, N$ имеют полный ранг, т.е. $r(A_i) = |A_i|$ при $i = 0, \dots, N$, где $|X|$ обозначает число элементов множества X. Тогда функцию r можно доопределить на всех подмножествах множества $B_{\{1,\dots,N\}}$ так, чтобы последнее множество стало матроидом.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что в условиях теоремы всегда можно "отщепить" один элемент от одного из множеств A_i, т. е. выделить его в отдельное множество, так, чтобы условия теоремы остались верны. Выделяя таким образом отдельные элементы, мы, наконец, придем к ситуации, в которой все множества одноэлементны, потому что на каждом шаге число одноэлементных множеств возрастает, а общее число элементов сохраняется. Но эта ситуация очевидным образом удовлетворяет заключению теоремы.

Итак, пусть $a \in A_0$. Определим $R_S = \{a\} \cup A_S$ и $T_S = B_S \backslash \{a\}$ при $S \subset \{1, \dots, n\}$. Определим также

$$r(R_S) = r(A_S) + P_1(S), \quad P_1(S) = \begin{cases} 1, & r(B_S) > r(A_S), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

и

$$r(T_S) = r(B_S) - P_2(S), \quad P_2(S) = \begin{cases} 1, & r(B_S) = r(A_S) + |A_0|, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Наша цель теперь – показать, что так определенные ранги множеств удовлетворяют условию из определения матроида. Для этого рассмотрим всевозможные сочетания из двух видов множеств.

A—A. Неравенство из множеств таких типов верно по условию теоремы.

A—B. Аналогично.

A—R. Наша цель в данном случае – доказать неравенство

$$r(A_S) + r(R_Q) \geqslant r(A_S \cup R_Q) + r(A_S \cap R_Q)$$

для любых подмножеств $S, Q \subset \{1, \dots, n\}$. Заметим, что $A_S \cup R_Q = R_{S\cup Q}$ и $A_S \cap R_Q = A_{S\cap Q}$, так что неравенство превращается в

$$r(A_S) + r(R_Q) \geqslant r(R_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q}).$$

Подставляя определение функции $r(R_\cdot)$, получаем

$$r(A_S) + r(A_Q) + P_1(Q) \geqslant r(A_{S\cup Q}) + P_1(S \cup Q) + r(A_{S\cap Q}).$$

Рассмотрим теперь выражения $P_1(Q)$ и $P_1(S \cup Q)$. Каждое из них может принимать значение 0 или 1, так что имеем 4 случая.

0—0, 1—0, 1—1) Требуемое неравенство вытекает из неравенства $r(A_S) + r(A_Q) \geqslant r(A_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q})$, верного по условию теоремы.

0—1) Этот случай на самом деле невозможен, поскольку если P_1(большее множество) $= 1$, то P_1(меньшее множество) $= 1$.

A—T. Нам надо доказать неравенство

$$r(A_S) + r(T_Q) \geqslant r(T_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q}).$$

Подставляя определение функции $r(T_\cdot)$, получаем

$$r(A_S) + r(B_Q) - P_2(Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) - P_2(S \cup Q) + r(A_{S\cap Q}).$$

Рассмотрим теперь выражения $P_2(Q)$ и $P_2(S \cup Q)$. Каждое из них может принимать значение 0 или 1, так что имеем 4 случая.

0—0, 0—1, 1—1) Требуемое неравенство вытекает из неравенства $r(A_S) + r(B_Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q})$, верного по условию теоремы.

1—0) В этом случае достаточно доказать строгое неравенство $r(A_S) + r(B_Q) > r(B_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q})$, потому что добавки из $P_2(\cdot)$ “портят” наше неравенство на 1. Глядя на определение функции $P_2(\cdot)$, замечаем, что в этом случае

$$r(B_Q) = r(A_Q) + |A_0| \quad \text{и} \quad r(B_{S\cup Q}) < r(A_{S\cup Q}) + |A_0|.$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} r(A_S) + r(B_Q) &= r(A_S) + r(A_Q) + |A_0| \\ &\geqslant r(A_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q}) + |A_0| > r(B_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q}). \end{aligned}$$

B—B. Аналогично A—A.

B—R. Нам надо доказать неравенство

$$r(B_S) + r(R_Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) + r(R_{S\cap Q}).$$

Подставляя определение функции $r(R.)$, получаем

$$r(B_S) + r(A_Q) + P_1(Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) + P_1(S \cap Q) + r(A_{S\cap Q}).$$

Рассмотрим теперь выражения $P_1(Q)$ и $P_1(S \cap Q)$. Каждое из них может принимать значение 0 или 1, так что имеем 4 случая.

0—0, 1—0, 1—1) Требуемое неравенство вытекает из неравенства $r(B_S) + r(A_Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q})$, верного по условию теоремы.

0—1) В этом случае достаточно доказать строгое неравенство $r(B_S) + r(A_Q) > r(B_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q})$, потому что добавки из $P_1(\,\cdot\,)$ "портят" наше неравенство на 1. Глядя на определение функции $P_1(\,\cdot\,)$, замечаем, что в этом случае $r(B_Q) = r(A_Q)$ и $r(B_{S\cap Q}) > r(A_{S\cap Q})$. В итоге имеем

$$\begin{aligned} r(B_S) + r(A_Q) = r(B_S) + r(B_Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) + r(B_{S\cap Q}) \\ > r(B_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q}). \end{aligned}$$

B—T. Наша цель в данном случае – доказать неравенство

$$r(B_S) + r(T_Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) + r(T_{S\cap Q}).$$

Подставляя определение функции $r(T.)$, получаем

$$r(B_S) + r(B_Q) - P_2(Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) - P_2(S \cap Q) + r(B_{S\cap Q}).$$

Рассмотрим теперь выражения $P_2(Q)$ и $P_2(S \cap Q)$. Каждое из них может принимать значение 0 или 1, так что имеем 4 случая.

0—0, 0—1, 1—1) Требуемое неравенство вытекает из неравенства $r(B_S) + r(B_Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) + r(B_{S\cap Q})$, верного по условию теоремы.

1—0) Этот случай на самом деле невозможен, поскольку если $P_2(\text{большее множество}) = 1$, то $P_2(\text{меньшее множество}) = 1$.

R—R. Наша цель в данном случае – доказать неравенство

$$r(R_S) + r(R_Q) \geqslant r(R_{S\cup Q}) + r(R_{S\cap Q}).$$

Подставляя определение функции $r(R.)$, получаем

$$r(A_S)+P_1(S)+r(A_Q)+P_1(Q) \geqslant r(A_{S\cup Q})+P_1(S\cup Q)+r(A_{S\cap Q})+P_1(S\cap Q).$$

Рассмотрим теперь выражения $P_1(S)$, $P_1(Q)$, $P_1(S \cup Q)$ и $P_1(S \cap Q)$. Каждое из них может принимать значение 0 или 1, так что имеем 16 случаев.

0—0—0—0, 0—1—0—1, 1—0—0—1, 1—1—0—1, 1—1—1—1) Требуемое неравенство вытекает из неравенства

$$r(A_S) + r(A_Q) \geqslant r(A_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q}),$$

верного по условию теоремы.

0—0—1—0, 0—0—1—1, 0—1—0—0, 0—1—1—0, 0—1—1—1, 1—0—0—0, 1—0—1—0, 1—0—1—1, 1—1—0—0, 1—1—1—0) Эти случаи на самом деле невозможны, поскольку если P_1(большее множество) $= 1$, то P_1(меньшее множество) $= 1$.

0—0—0—1) Глядя на определение функции $P_1(\,\cdot\,)$, замечаем, что в этом случае $r(B_S) = r(A_S)$, $r(B_Q) = r(A_Q)$, $r(B_{S\cup Q}) = r(A_{S\cup Q})$ и $r(B_{S\cap Q}) > r(A_{S\cap Q})$. В итоге имеем

$$\begin{aligned} r(A_S) + r(A_Q) &= r(B_S) + r(B_Q) \\ &\geqslant r(B_{S\cup Q}) + r(B_{S\cap Q}) > r(A_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q}). \end{aligned}$$

R—T. Наша цель в данном случае – доказать неравенство

$$r(R_S) + r(T_Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q}).$$

Подставляя определения функций $r(R.)$ и $r(T.)$, получаем

$$r(A_S) + P_1(S) + r(B_Q) - P_2(Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q}).$$

Рассмотрим теперь выражения $P_1(S)$, $P_2(Q)$. Каждое из них может принимать значение 0 или 1, так что имеем 4 случая.

0—0, 1—0, 1—1) Требуемое неравенство вытекает из неравенства $r(A_S) + r(B_Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q})$, верного по условию теоремы.

0—1) Глядя на определение функций $P_1(\,\cdot\,)$ и $P_2(\,\cdot\,)$, замечаем, что в этом случае $r(B_S) = r(A_S)$ и $r(B_Q) = r(A_Q) + |A_0|$. В итоге имеем

$$\begin{aligned} r(A_S) + r(B_Q) = r(B_S) + r(A_Q) + |A_0| &\geqslant r(B_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q}) + |A_0| \\ &> r(B_{S\cup Q}) + r(A_{S\cap Q}). \end{aligned}$$

T—T. Наша цель в данном случае – доказать неравенство

$$r(T_S) + r(T_Q) \geqslant r(T_{S\cup Q}) + r(T_{S\cap Q}).$$

Подставляя определение функции $r(T.)$, получаем

$$r(B_S) - P_2(S) + r(B_Q) - P_2(Q) \geqslant r(B_{S\cup Q}) - P_2(S\cup Q) + r(B_{S\cap Q}) - P_2(S\cap Q).$$

Рассмотрим теперь выражения $P_2(S)$, $P_2(Q)$, $P_2(S \cup Q)$ и $P_2(S \cap Q)$. Каждое из них может принимать значение 0 или 1, так что имеем 16 случаев.

0—0—0—0, 0—1—0—1, 1—0—0—1, 0—0—0—1, 1—1—1—1) Требуемое неравенство вытекает из неравенства $r(B_S)+r(B_Q) \geqslant r(B_{S\cup Q})+r(B_{S\cap Q})$, верного по условию теоремы.

0—0—1—0, 0—0—1—1, 0—1—0—0, 0—1—1—0, 0—1—1—1, 1—0—0—0, 1—0—1—0, 1—0—1—1, 1—1—0—0, 1—1—1—0) Эти случаи на самом деле невозможны, поскольку если P_2(большее множество) $= 1$, то P_2(меньшее множество) $= 1$.

1—1—0—1) Глядя на определение функции $P_2(\cdot)$, замечаем, что в этом случае $r(B_S) = r(A_S) + |A_0|$, $r(B_Q) = r(A_Q) + |A_0|$, $r(B_{S\cup Q}) < r(A_{S\cup Q}) + |A_0|$ и $r(B_{S\cap Q}) = r(A_{S\cap Q}) + |A_0|$. В итоге имеем

$$\begin{aligned} r(B_S) + r(B_Q) &= r(A_S) + |A_0| + r(A_Q) + |A_0| \\ &\geqslant r(A_{S\cup Q}) + |A_0| + r(A_{S\cap Q}) + |A_0| > r(B_{S\cup Q}) + r(B_{S\cap Q}). \quad \square \end{aligned}$$

§3. Необходимые условия для размерностей пересечений: случай $N = 5$

В работе [3] была сформулирована гипотеза о том, что неравенства трех указанных там типов являются не только необходимыми, но и достаточными условиями того, что соответствующая частичная функция ранга может быть продолжена до полной.

Увы, дальнейшая проверка показала, что уже для $n = 5$ это не так – добавляется еще один тип неравенства, который вполне уместно назвать четвертым, хотя и способ получения его из неравенства третьего типа отличается от того, которым неравенство третьего типа получалось из второго (это неравенство по-прежнему может быть получено из соответствующего графа, правда, по сравнению с неравенствами предыдущих типов, кроме типов дуг “+” (коэффициент 1) и “−” (коэффициент −1) добавляются кратные дуги (коэффициент 2).

Теорема 2. *Неравенство, соответствующее графу на рис.* 1, *является необходимым условием существования матроида.*

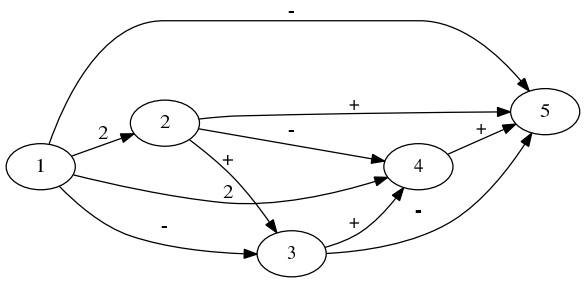

Рис. 1. Пример графа для неравенств четвертого типа

Доказательство. В обозначениях статьи [3] нам нужно доказать неравенство

$$2r(C_{14}) + 2r(C_{15}) + r(C_{24}) + r(C_{25}) + r(C_{34}) + r(C_{35}) \\ \geqslant r(C_{12}) + r(C_{13}) + r(C_{23}) + r(C_{45}) + 2r(C_4) + 2r(C_5).$$

Оно получается как следствие неравенств

$$r(C_{14}) + r(C_{34}) \geqslant r(C_4) + r(C_{134}), \qquad r(C_{14}) + r(C_{24}) \geqslant r(C_4) + r(C_{124}),$$
$$r(C_{15}) + r(C_{25}) \geqslant r(C_5) + r(C_{125}), \qquad r(C_{15}) + r(C_{35}) \geqslant r(C_5) + r(C_{135}),$$
$$r(C_{134}) + r(C_{135}) \geqslant r(C_{13}) + r(C_{1345}), \qquad r(C_{124}) + r(C_{125}) \geqslant r(C_{12}) + r(C_{1245}),$$
$$r(C_{1345}) + r(C_{1245}) \geqslant r(C_{145}) + r(C_{12345}), \qquad r(C_{145}) \geqslant r(C_{45}),$$
$$r(C_{12345}) \geqslant r(C_{23}).$$

□

Теорема 3. *Для $N = 5$ неравенства первого, второго, третьего из* [3] *и четвертого типов (вместе со всеми, получающимися из них перестановкой индексов прямых слагаемых) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями существования нужного нам матроида.*

Доказательство. При помощи набора программ 4ti2 [4] можно явно вычислить базис Гильберта для конуса, определяемого указанными в теореме неравенствами. В итоге получается набор матриц, задающих размерности прямых слагаемых и пересечений подпространства с их попарными суммами. Нам нужно доказать, что в каждом из этих случаев по этой информации можно построить матроид. В подавляющем большинстве этих случаев (более точно, во всех, кроме

двух) эта информация реализуется для подпространства подходящей размерности, находящегося в общем положении относительно прямых слагаемых, так что существование матроида совершенно очевидно. В оставшихся двух случаях мы явно укажем ранги всех возможных объединений множеств, представляющих прямые слагаемые в матроиде, а существование матроида будет обеспечиваться теоремой 1.

Итак, первый случай:

$$r(C_1) = 3,\quad r(C_2) = 2,\quad r(C_{12}) = 4,\quad r(C_3) = 2,\quad r(C_{13}) = 3,\quad r(C_{23}) = 3,$$
$$r(C_{123}) = 4,\quad r(C_4) = 2,\quad r(C_{14}) = 4,\quad r(C_{24}) = 4,\quad r(C_{124}) = 4,\quad r(C_{34}) = 3,$$
$$r(C_{134}) = 4,\ r(C_{234}) = 4,\ r(C_{1234}) = 4,\quad r(C_5) = 2,\quad r(C_{15}) = 3,\quad r(C_{25}) = 3,$$
$$r(C_{125}) = 4,\quad r(C_{35}) = 3,\quad r(C_{135}) = 3,\ r(C_{235}) = 4,\ r(C_{1235}) = 4,\quad r(C_{45}) = 3,$$
$$r(C_{145}) = 4,\ r(C_{245}) = 4,\ r(C_{1245}) = 4,\ r(C_{345}) = 4,\ r(C_{1345}) = 4,\ r(C_{2345}) = 4,$$
$$r(C_{12345}) = 4.$$

Второй случай:

$$r(C_1) = 2,\quad r(C_2) = 1,\quad r(C_{12}) = 2,\quad r(C_3) = 1,\quad r(C_{13}) = 2,\quad r(C_{23}) = 2,$$
$$r(C_{123}) = 2,\quad r(C_4) = 1,\quad r(C_{14}) = 2,\quad r(C_{24}) = 1,\quad r(C_{124}) = 2,\quad r(C_{34}) = 2,$$
$$r(C_{134}) = 2,\ r(C_{234}) = 2,\ r(C_{1234}) = 2,\quad r(C_5) = 1,\quad r(C_{15}) = 2,\quad r(C_{25}) = 2,$$
$$r(C_{125}) = 2,\quad r(C_{35}) = 2,\quad r(C_{135}) = 2,\ r(C_{235}) = 2,\ r(C_{1235}) = 2,\quad r(C_{45}) = 2,$$
$$r(C_{145}) = 2,\ r(C_{245}) = 2,\ r(C_{1245}) = 2,\ r(C_{345}) = 2,\ r(C_{1345}) = 2,\ r(C_{2345}) = 2,$$
$$r(C_{12345}) = 2.$$

Используемый в статье рисунок сделан с использованием программы dot из пакета graphviz [5]. □

Литература

1. J. G. Oxley, *What is a matroid?* — Cubo **5** (2003), 179–218.
2. M. M. Shikare, B. N. Waphare, *Combinatorial Optimization.* Narosa Publishing House, 2004.
3. Н. А. Лебединская, Д. М. Лебединский, *О возможных значениях размерностей пересечений подпространств.* — Вестник СПБГУ, Сер. 1 математика, механика, астрономия (2016), Вып. 2, стр. 204–209.
4. 4ti2 team. 4ti2 – *A software package for algebraic, geometric and combinatorial problems on linear spaces.* Available at www.4ti2.de.
5. J. Ellson, E. Gansner, L. Koutsofios, S. North, G. Woodhull, *Short description and lucent technologies graphviz – open source graph drawing tools.* — Lect. Notes Comput. Sci., Springer-Verlag, 2001, pp. 483–484.

Lebedinskaya N. A., Lebedinskii D. M., Smirnov A. A. Possible dimensions of subspace intersections for five direct summands.

The paper consides the problem on the dimensions of the intersections of a subspace in the direct sum of a finite series of finite-dimensional vector spaces with the sums of pairs of direct summands, provided that the subspace intersection with each of these direct summands is empty. The problem is naturally divided into two ones: Find conditions for the existence and for the representability of the corresponding matroid. The following theorem is proved: If the ranks of all the unions of a series of blocks satisfying the condition for the ranks of subsets in the matroid are given and the blocks have full rank, then this partial rank function can be extended to a full rank function for all the subsets of the base set (the union of all the blocks). Necessary and sufficient conditions on the dimensions of the direct summands and intersections mentioned above for the corresponding matroid to exist are obtained in the case of five direct summands.

Санкт-Петербургский
государственный университет
Университетская наб. д.7-9.,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: n.lebedinskaya@spbu.ru
E-mail: d.lebedinsky@spbu.ru

Поступило 17 октября 2016 г.

Военно-космическая
академия им. А. Ф. Можайского
ул. Ждановская, д. 13.,
197198, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: alexandr.alexandrovich.smirnov@gmail.com