Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

Л. Ю. Колотилина

О БЛОЧНЫХ ОБОБЩЕНИЯХ $\mathcal{H}$-МАТРИЦ

§1. Введение и предварительные сведения

Пусть $\mathbb{C}_\pi^{n\times n}$, где $n \geqslant 1$, есть множество комплексных $n \times n$ матриц A, разбитых на блоки $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, в соответствии с некоторым разбиением $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ порядка m множества индексов $\langle n\rangle = \{1, \dots, n\}$ на непустые непересекающиеся подмножества. Через Δ^π будем обозначать множество невырожденных блочно диагональных матриц из $\mathbb{C}_\pi^{n\times n}$.

Напомним, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется $\mathcal{H}$-матрицей, если ее (точечная) матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (\mu_{ij})$, определяемая соотношением

$$\mu_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.1}$$

является $\mathcal{M}$-матрицей, т.е. матрица $\mathcal{M}(A)$ невырожденная, а ее обратная $[\mathcal{M}(A)]^{-1}$ неотрицательна. Подчеркнем, что в соответствии с приведенным определением любая $\mathcal{H}$-матрица является невырожденной.

Понятие $\mathcal{H}$-матриц обобщалось на случай блочных матриц несколькими способами. Чтобы напомнить некоторые определения блочных $\mathcal{H}$-матриц, нам потребуется блочный аналог (точечной) матрицы сравнения $\mathcal{M}(A)$.

Предположим, что блочно диагональная часть $D_A = \operatorname{Diag}(A_{11}, \dots, A_{mm})$ блочной матрицы $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ невырождена и определим блочную матрицу сравнения $\mathcal{M}_b(A) = (m_{ij})$ для A следующим образом (см. [13, 9, 14, 16, 7]):

$$m_{ij} = \begin{cases} \|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1}, & i = j, \\ -\|A_{ij}\|_\infty, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.2}$$

Отметим, что в настоящей работе мы используем бесконечную норму $\|\cdot\|_\infty$ матриц, но блочная матрица сравнения может также быть определена и для других мультипликативных матричных норм.

Ключевые слова: блочная матрица, блочная матрица сравнения, $\mathcal{H}$-матрица, блочная $\mathcal{H}$-матрица, SDD матрица, BSDD матрица, P$\mathcal{H}$-матрица, QP$\mathcal{H}$-матрица, блочная P$\mathcal{H}$-матрица, обратная матрица, бесконечная норма, верхняя оценка.

Основываясь на блочной матрице сравнения $\mathcal{M}_b(A)$, можно определить следующие классы блочных матриц.

Определение 1.1. *Будем говорить, что матрица $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ с невырожденной блочно диагональной частью D_A имеет строгое блочно диагональное преобладание (is block strictly diagonally dominant) относительно разбиения π [10], если матрица $\mathcal{M}_b(A)$ имеет строгое (точечное) диагональное преобладание (is (pointwise) strictly diagonally dominant, or* SDD*).*

Этот класс матриц будет в дальнейшем обозначаться как $\mathrm{BSDD}(\pi)$.

Определение 1.2. *Будем говорить, что матрица $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ с невырожденной блочно диагональной частью D_A является блочной $\mathcal{H}(\pi)$-матрицей в смысле Островского, если $\mathcal{M}_b(A)$ является $\mathcal{M}$-матрицей.*

Этот матричный класс фигурирует в работах [9, 13, 15, 14, 7, 5]. В работе [5] он обозначался через $\widetilde{\mathrm{B}}\mathcal{H}$; в статье [14] он обозначался через $\Omega_D(\pi)$, а в данной работе мы обозначаем его, отдавая дань Островскому, через $\Omega_O(\pi)$.

Определение 1.3. *Будем говорить, что матрица $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ с невырожденной блочно диагональной частью D_A является блочной $\mathcal{H}(\pi)$-матрицей в смысле Робера [15], если блочная матрица Якоби $J_A \equiv D_A^{-1}A$ является $\Omega_O(\pi)$-матрицей, т.е. $\mathcal{M}_b(J_A)$ является $\mathcal{M}$-матрицей.*

В работе [14] этот класс матриц обозначался через Ω_R, а в статье [5] он обозначался через $\mathrm{B}\mathcal{H}$. В настоящей работе мы обозначаем его через $\Omega_R(\pi)$.

Как было установлено в [15], имеет место следующее включение:

$$\Omega_O(\pi) \subset \Omega_R(\pi). \tag{1.3}$$

Заметим, что матрица $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ со скалярными диагональными блоками $A_{ii} = \alpha_i I_{n_i}$, $i = 1, \dots, m$, принадлежит классу $\Omega_O(\pi)$ тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $\Omega_R(\pi)$.

Нам потребуется следующая вполне очевидная лемма.

Лемма 1.1. *Пусть матрица $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ имеет невырожденную блочно диагональную часть D_A и пусть $\Delta \in \Delta^\pi$. Тогда*

$$J_{\Delta A} = J_A \quad \text{и} \quad J_{A\Delta} = \Delta^{-1} J_A \Delta. \tag{1.4}$$

Из леммы 1.1 немедленно следует, что для заданного разбиения π матрицы A и ΔA принадлежат (или же не принадлежат) классу $\Omega_R(\pi)$ одновременно, т.е. класс Робера $\Omega_R(\pi)$ замкнут относительно левого умножения на невырожденные блочно диагональные матрицы соответствующих размеров. Это свойство естественным образом обобщает свойство инвариантности класса $\mathcal{H}$-матриц относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы. Заметим, однако, что классы $\mathrm{BSDD}(\pi)$- и $\Omega_O(\pi)$-матриц не инвариантны относительно левого умножения на невырожденные блочно диагональные матрицы, что контрастирует с инвариантностью классов SDD и $\mathcal{H}$-матриц относительно умножения слева на невырожденные диагональные матрицы.

Далее, как нетрудно видеть, классы $\Omega_R(\pi)$ также замкнуты относительно умножения справа на невырожденные блочно скалярные диагональные матрицы вида $\mathrm{Diag}\,(\xi_1 I_{n_1}, \dots, \xi_m I_{n_m})$, где $n_i = |P_i|$, $i = 1, \dots, m$, а I_k – единичная матрица порядка k. Множество таких блочно диагональных матриц мы будем обозначать через D^π.

Следующий матричный класс, являющийся обобщением класса $\mathcal{H}$-матриц на блочный случай, – это класс $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$, введенный в работе [3].

Определение 1.4. *Матрица $A \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ с невырожденной блочно диагональной частью D_A называется $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей, если блочная матрица Якоби J_A является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей.*

Класс $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, фигурирующий в определении 1.4, формально был введен в работе [11] и определяется следующим образом. С матрицей $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ мы ассоциируем набор, состоящий из $n_1 \times \dots \times n_m$ агрегированных матриц порядка m:

$$A^{(i_1,i_2,\dots,i_m)} \equiv \begin{bmatrix} s_{i_1}(A_{11}) & s_{i_1}(A_{12}) & \dots & s_{i_1}(A_{1m}) \\ s_{i_2}(A_{21}) & s_{i_2}(A_{22}) & \dots & s_{i_2}(A_{2m}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i_m}(A_{m1}) & s_{i_m}(A_{m2}) & \dots & s_{i_m}(A_{mm}) \end{bmatrix}, \qquad (1.5)$$
$$i_k \in P_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Здесь

$$s_{i_k}(A_{kp}) = (A_{kp}e)_{i_k}, \quad i_k \in M_k, \quad k, p = 1, \dots, m,$$

– строчные суммы блоков A_{kp} с учетом знаков элементов; $e = [1, ..., 1]^T$ – единичный вектор соответствующей размерности.

Определение 1.5. *Матрица $A \in \mathbb{C}_{\pi}^{n\times n}$ называется $P\mathcal{H}(\pi)$-матрицей, если все агрегированные матрицы $\mathcal{M}(A)^{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}$, ассоциированные с матрицей сравнения $\mathcal{M}(A)$, являются $\mathcal{M}$-матрицами.*

Ясно, что A является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей.

Как было доказано в работе [1], для любого разбиения π класс $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ является подклассом класса $\mathcal{H}$-матриц. В частности, если A является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей, то ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ есть $\mathcal{M}$-матрица.

Как легко видеть, матрица A является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей относительно самого мелкого (точечного) разбиения $\pi = \{\{1\},\ldots,\{n\}\}$ тогда и только тогда, когда A является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей. С другой стороны, для самого грубого разбиения $\pi = \{\langle n\rangle\}$ с $m = 1$ матрица A является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда она имеет строгое диагональное преобладание. В том случае, когда $m = 2$ и $\langle n\rangle = S \cup \bar{S}$, A является $\mathrm{P}\mathcal{H}$-матрицей тогда и только тогда, когда она является S-SDD матрицей, см., например, [11]. При $1 < m < n$ класс $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ расположен между классами SDD и $\mathcal{H}$.

Как легко вытекает из определения 1.5, классы $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ замкнуты относительно умножения слева на невырожденные диагональные матрицы.

В §§2 и 3 нам потребуются следующие результаты относительно $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матриц.

Теорема 1.1 ([4]). *Для любого разбиения π множества индексов $\langle n\rangle$ матрица $A \in \mathbb{C}_{\pi}^{n\times n}$ является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда существует диагональная матрица $\Delta \in D^{\pi}$ такая, что отмасштабированная по столбцам матрица $A\Delta$ имеет строгое диагональное преобладание.*

Заметим, что на основании теоремы 1.1 нетрудно заключить, что классы $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ замкнуты относительно правого умножения на диагональные матрицы из D^{π}.

Теорема 1.2 ([11]). *Если $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ для некоторого разбиения $\pi = \{P_1,\ldots,P_m\}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, множества $\langle n\rangle$, то*

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leqslant \max_{i_1,\ldots,i_m} \left\{ \left\| \left[\mathcal{M}(A)^{(i_1,\ldots,i_m)}\right]^{-1} \right\|_{\infty} \right\}, \tag{1.6}$$

где максимум берется по всем $i_k \in P_k$, $k = 1,\ldots,m$.

Возвращаясь к $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-матрицам, заметим, что, по лемме 1.1, классы $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$, как и классы Робера $\Omega_R(\pi)$, очевидно, являются замкнутыми относительно левого умножения на невырожденные блочно диагональные матрицы.

Кроме того, классы $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$ также замкнуты и относительно правого умножения на диагональные матрицы из D^π. Действительно, если $A \in \mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$, то $J_A = D_A^{-1}A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, так что $D_A^{-1}AD \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ для любой матрицы $D \in D^\pi$. Отсюда, ввиду (1.4), следует, что $D^{-1}D_A^{-1}AD = J_{AD} \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, что и означает, что AD является $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей.

При $m = 1$ и $\pi = \{\langle n\rangle\}$ мы имеем $D_A = A$, и класс $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$ совпадает с множеством всех невырожденных $n \times n$ матриц. В противоположном крайнем случае $m = n$ и $\pi = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$, класс $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$ состоит из тех матриц A, для которых соответствующие (точечные) матрицы Якоби принадлежат классу $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) = \mathcal{H}$, т.е. данный класс совпадает с классом $\mathcal{H}$-матриц.

Рассмотренные выше случаи $m = 1$ и $m = n$ показывают, что, в отличие от классов $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, классы $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$ не обладают свойством монотонности относительно измельчения разбиения π.

Последний матричный класс, который мы рассмотрим, был введен в работе [14] в контексте неполных блочных факторизаций матриц, разбитых на блоки.

Определение 1.6. *Будем говорить, что матрица $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ с невырожденной блочно диагональной частью D_A является блочной $\mathcal{H}(\pi)$-матрицей в смысле Польмана, если существуют невырожденные блочно диагональные матрицы $D, E \in \Delta^\pi$ такие, что $\mathcal{M}_b(DAE)$ есть $\mathcal{M}$-матрица, т.е. $DAE \in \Omega_O(\pi)$.*

Этот класс матриц будет обозначаться через $\Omega_P(\pi)$.

Из определения 1.6 легко следует, что класс $\Omega_P(\pi)$ замкнут относительно как левого, так и правого умножения на невырожденные блочно диагональные матрицы из Δ^π.

Кроме того, из определений 1.3 и 1.6 немедленно вытекает, что

$$\Omega_R(\pi) \subset \Omega_P(\pi). \tag{1.7}$$

В этой работе мы исследуем соотношения между различными классами блочных матриц и их свойства. Также мы рассматриваем и сравниваем верхние оценки обратных в норме l_∞ для некоторых блочных матриц.

Статья построена следующим образом. В §2 приводятся некоторые характеризации классов $\Omega_O(\pi)$, $\Omega_R(\pi)$, $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$ и $\Omega_P(\pi)$, которые можно рассматривать как блочные обобщения класса $\mathcal{H}$-матриц, и исследуем соотношения между ними. §3 посвящен верхним оценкам обратных к $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-, $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-, $\Omega_R(\pi)$- и $\Omega_P(\pi)$-матрицам.

§2. Свойства и характеризации классов блочных матриц

В этом параграфе представлены характеризации различных классов блочных матриц и установлены некоторые соотношения между ними.

Лемма 2.1. *Если матрица $A \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ является $\Omega_O(\pi)$-матрицей, то $J_A \in \Omega_O(\pi)$.*

Доказательство. Ввиду соотношения (1.3), мы имеем $A \in \Omega_R(\pi)$. Но, по определению класса $\Omega_R(\pi)$, последнее включение как раз и означает, что $J_A \in \Omega_O(\pi)$. □

На основе леммы 2.1 мы получаем следующую характеризацию класса $\Omega_R(\pi)$-матриц.

Предложение 2.1. *Матрица $A \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ является $\Omega_R(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда существует невырожденная блочно диагональная матрица $\Delta \in \Delta^\pi$ такая, что*

$$\Delta A \in \Omega_O(\pi). \tag{2.1}$$

Доказательство. Если $A \in \Omega_R(\pi)$, то, по определению, $J_A = D_A^{-1}A$, где $D_A^{-1} \in \Delta^\pi$, и $J_A \in \Omega_O(\pi)$.

Обратно, пусть выполнено включение (2.1) и пусть $B = \Delta A$. Тогда, по лемме 2.1, мы имеем $J_B \in \Omega_O(\pi)$. Поскольку, в силу леммы 1.1, $J_B = J_A$, отсюда следует, что $J_A \in \Omega_O(\pi)$, что и означает, что $A \in \Omega_R(\pi)$. □

Лемма 2.2. *Пусть $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ и предположим, что D_A является $\mathcal{H}$-матрицей. Тогда справедливо следующее поэлементное матричное неравенство:*

$$J_{\mathcal{M}(A)} = [\mathcal{M}(D_A)]^{-1}\mathcal{M}(A) \leqslant \mathcal{M}(J_A). \tag{2.2}$$

Доказательство. Диагональные блоки матриц, стоящих в обеих частях неравенства (2.2), являются единичными матрицами. Что же касается внедиагональных блоков, то для $\mathcal{H}$-матриц A_{ii}, как хорошо известно, мы имеем

$$|A_{ii}|^{-1} \leqslant [\mathcal{M}(A_{ii})]^{-1}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

С помощью последних соотношений мы выводим

$$-\{\mathcal{M}(J_A)\}_{ij} = |\{\mathcal{M}(J_A)\}_{ij}| = |A_{ii}^{-1}A_{ij}| \leqslant |A_{ii}^{-1}| \cdot |A_{ij}|$$
$$\leqslant [\mathcal{M}(A_{ii})]^{-1} \cdot |A_{ij}| = -\{[\mathcal{M}(D_A)]^{-1}\mathcal{M}(A)\}_{ij}, \quad i \neq j.$$

Неравенство (2.2) установлено. □

Следующая лемма является аналогом леммы 2.1 для класса $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$.

Лемма 2.3. *Если матрица $A \in \mathbb{C}_{\pi}^{n\times n}$ является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей, то $J_A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$.*

Доказательство. Поскольку $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, то, по теореме 1.1, существует матрица $D \in D^{\pi}$ такая, что $AD \in \mathrm{SDD}$. Тем самым, мы имеем

$$\mathcal{M}(A)De > 0. \tag{2.3}$$

Так как A является $\mathcal{H}$-матрицей (поскольку $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \subseteq \mathcal{H}$), то ее блочно диагональная часть D_A также является $\mathcal{H}$-матрицей, откуда следует, что матрица $[\mathcal{M}(D_A)]^{-1}$ неотрицательна. Следовательно, из (2.3) вытекает, что

$$[\mathcal{M}(D_A)]^{-1}\mathcal{M}(A)De > 0,$$

откуда, ввиду леммы 2.2, мы получаем, что

$$\mathcal{M}(J_A)De > 0.$$

Полученное неравенство означает, что $J_A D$ имеет строгое диагональное преобладание. Тогда, в силу теоремы 1.1, матрица J_A является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей. □

Поскольку включение $J_A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ означает, что $A \in \mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$, то из леммы 2.3 мы немедленно получаем следующий аналог соотношения (1.3).

Следствие 2.1. *Для любого разбиения π имеет место включение*

$$\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \subset \mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi). \tag{2.4}$$

С помощью лемм 1.1 и 2.3 мы получим характеризацию $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-матриц, аналогичную характеризации $\Omega_R(\pi)$-матриц, представленной в предложении 2.1.

Предложение 2.2. *Матрица $A \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ является $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда существует невырожденная блочно диагональная матрица $\Delta \in \Delta^\pi$ такая, что*

$$\Delta A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi). \tag{2.5}$$

Доказательство. По определению, если A – $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-матрица, то ее блочно диагональная часть D_A невырождена и блочная матрица Якоби J_A является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей, так что соотношение (2.5) выполняется при $\Delta = D_A^{-1}$.

Обратно, если имеет место (2.5), то, по лемме 2.3, $J_{\Delta A} \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$. С другой стороны, поскольку, в силу леммы 1.1, $J_{\Delta A} = J_A$, то мы заключаем, что и $J_A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, что означает, что A является $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей. □

Итак, в соответствии с предложениями 2.1 и 2.2, матрицы из классов $\Omega_R(\pi)$ и $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$ отличаются от матриц из соответствующих более узких классов $\Omega_O(\pi)$ и $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ левыми невырожденными блочно диагональными сомножителями из Δ^π.

Принимая во внимание тот факт, что класс $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ является подклассом класса $\mathcal{H}$-матриц, мы получаем, в частности, что любая $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-матрица может быть представлена в виде произведения невырожденной блочно диагональной матрицы из Δ^π и некоторой $\mathcal{H}$-матрицы.

Из теоремы 1.1 и предложения 2.2 мы немедленно получаем следующую характеризацию класса $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$ через класс SDD.

Предложение 2.3. *Матрица $A \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ является $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда существуют невырожденная блочно диагональная матрица $\Delta \in \Delta^\pi$ и диагональная матрица $D \in D^\pi$ такие, что*

$$\Delta A D \in \mathrm{SDD}. \tag{2.6}$$

Следует отметить, что класс Робера $\Omega_R(\pi)$ является подклассом класса $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$.

Предложение 2.4 ([3]). *Для произвольного разбиения π индексного множества $\langle n\rangle$ справедливо включение*

$$\Omega_R(\pi) \subset \mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi).$$

Совместно с включением (1.3) предложение 2.4 дает цепочку включений

$$\Omega_O(\pi) \subset \Omega_R(\pi) \subset \mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi). \tag{2.7}$$

Из предложений 2.3 и 2.4 немедленно вытекает, что для любой матрицы $A \in \Omega_R(\pi)$ найдутся матрицы $\Delta \in \Delta^\pi$ и $D \in D^\pi$ такие, что имеет место включение (2.6). Этот факт можно также вывести и непосредственно из определения класса $\Omega_R(\pi)$.

Теперь перейдем к классу Польмана $\Omega_P(\pi)$. Напомним сперва следующую известную характеризацию класса $\Omega_P(\pi)$-матриц.

Предложение 2.5 ([14, Corollary 3.1]). *Матрица $A \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ является $\Omega_P(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда существует невырожденная блочно диагональная матрица $\Delta \in \Delta^\pi$ такая, что $J_{A\Delta}$ является* $\mathrm{BSDD}(\pi)$*-матрицей, т.е. матрица $\mathcal{M}_b(J_{A\Delta})$ имеет строгое диагональное преобладание.*

Приводимая ниже характеризация матриц из класса Робера $\Omega_R(\pi)$ аналогична характеризации из предложения 2.5 и выявляет различие между классами $\Omega_R(\pi)$ и $\Omega_P(\pi)$.

Предложение 2.6. *Матрица $A \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ является $\Omega_R(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда существует невырожденная диагональная матрица $D \in D^\pi$ такая, что J_{AD} является* $\mathrm{BSDD}(\pi)$*-матрицей.*

Доказательство. Если $A \in \Omega_R(\pi)$, то $\mathcal{M}_b(J_A)$ является $\mathcal{M}$-матрицей, так что найдется невырожденная диагональная матрица $\widehat{D} = \mathrm{diag}\,(d_1, \dots, d_m)$ такая, что матрица $\mathcal{M}_b(J_A)\widehat{D}$ имеет строгое диагональное преобладание. Тогда, как нетрудно проверить, матрица

$$\widehat{D}^{-1}\mathcal{M}_b(J_A)\widehat{D} = \mathcal{M}_b(D^{-1}J_AD) = \mathcal{M}_b(J_{AD}),$$

где $D = \mathrm{Diag}\,(d_1I_{n_1}, \dots, d_mI_{n_m}) \in D^\pi$, также имеет строгое диагональное преобладание. Но это и означает, что $J_{AD} \in \mathrm{BSDD}(\pi)$.

Обратно, если $J_{AD} \in \mathrm{BSDD}(\pi)$ для некоторой матрицы

$$D = \mathrm{Diag}\,(d_1I_{n_1}, \dots, d_mI_{n_m}) \in D^\pi,$$

то матрица

$$\mathcal{M}_b(D^{-1}J_AD) = \widehat{D}^{-1}\mathcal{M}_b(J_A)\widehat{D},$$

где мы используем обозначение $\widehat{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_m)$, имеет строгое диагональное преобладание, откуда следует, что $\mathcal{M}_b(J_A)$ является $\mathcal{M}$-матрицей, так что $A \in \Omega_R(\pi)$. $\square$

Для класса $\Omega_O(\pi)$ имеет место следующая характеризация в стиле предложений 2.5 и 2.6.

Предложение 2.7. *Матрица $A \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ является $\Omega_O(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда существует невырожденная диагональная матрица $D \in D^\pi$ такая, что AD является* BSDD(π)*-матрицей.*

Доказательство. По определению, $A \in \Omega_O(\pi)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}_b(A)$ является $\mathcal{M}$-матрицей, т.е. найдется такая матрица $\widehat{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_m)$, что

$$\mathcal{M}_b(A)\widehat{D}e = \mathcal{M}_b(AD)e > 0,$$

где $D = \operatorname{Diag}(d_1 I_{n_1}, \ldots, d_m I_{n_m}) \in D^\pi$, что равносильно включению $AD \in \mathrm{BSDD}(\pi)$. $\square$

Соотношение между двумя классами $\Omega_R(\pi)$ и $\Omega_P(\pi)$ также проясняется следующим утверждением.

Предложение 2.8. *Матрица $A \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ является $\Omega_P(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда существует невырожденная блочно диагональная матрица $\Delta \in \Delta^\pi$ такая, что $A\Delta$ есть $\Omega_R(\pi)$-матрица.*

Доказательство. Если $A \in \Omega_P(\pi)$, то, по предложению 2.5, $J_{A\Delta} \in \mathrm{BSDD}(\pi)$ для некоторой матрицы $\Delta \in \Delta^\pi$, т.е. матрица $\mathcal{M}_b(J_{A\Delta})$ имеет строгое диагональное преобладание. Следовательно, $\mathcal{M}_b(J_{A\Delta}) \in \mathcal{M}$, что и означает, что $A\Delta \in \Omega_R(\pi)$.

Обратно, предположим, что $A\Delta \in \Omega_R(\pi)$. Тогда $\mathcal{M}_b(J_{A\Delta})$ является $\mathcal{M}$-матрицей и существует невырожденная диагональная матрица $\widehat{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_m)$ такая, что матрица

$$\widehat{D}^{-1}\mathcal{M}_b(J_{A\Delta})\widehat{D} = \mathcal{M}_b(D^{-1}J_{A\Delta}D) = \mathcal{M}_b(J_{A\Delta D}),$$

где $D = \operatorname{Diag}(d_1 I_{n_1}, \ldots, d_m I_{n_m}) \in D^\pi$, имеет строгое диагональное преобладание. Но это в точности означает, что $J_{A(\Delta D)} \in \mathrm{BSDD}(\pi)$, так что, в силу предложения 2.5, $A \in \Omega_P(\pi)$. $\square$

Следствие 2.2. *Если $A \in \Omega_P(\pi)$, то существуют блочно диагональные матрицы $\Delta_1, \Delta_2 \in \Delta^\pi$ такие, что матрица $\Delta_1 A \Delta_2$ имеет строгое диагональное преобладание.*

Доказательство. В силу предложения 2.8, существует такая матрица $\Delta \in \Delta^\pi$, что $A\Delta \in \Omega_R(\pi)$. Следовательно, в силу предложений 2.4 и 2.3, найдутся такие матрицы $\Delta_1 \in \Delta^\pi$ и $D \in D^\pi$, что $\Delta_1 A(\Delta D)$ имеет строгое диагональное преобладание. □

Заметим, что произведение $\Delta_1 A \Delta_2$, где матрица A имеет строгое диагональное преобладание, не обязательно является $\Omega_P(\pi)$-матрицей, поскольку A может и не быть $\Omega_R(\pi)$-матрицей.

Как следует из предложения 2.3, следствия 2.2 и включений (2.7), матрицы из классов $\Omega_O(\pi)$, $\Omega_R(\pi)$ и $\Omega_P(\pi)$, так же как и из класса $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$, могут быть преобразованы в матрицы со строгим диагональным преобладанием двусторонним умножением на невырожденные блочно диагональные матрицы из Δ^π.

В заключение этого параграфа мы покажем, что класс Польмана $\Omega_P(\pi)$ невозможно еще более расширить за счет замены в его определении класса Островского $\Omega_O(\pi)$ на более широкий класс Робера $\Omega_R(\pi)$.

Действительно, если $\Delta_1 A \Delta_2 \in \Omega_R(\pi)$, то $J_{\Delta_1 A \Delta_2} \in \Omega_O(\pi)$. Но, по лемме 1.1, $J_{\Delta_1 A \Delta_2} = J_{A\Delta_2}$, и из включения $J_{A\Delta_2} \in \Omega_O(\pi)$ следует, что $A\Delta_2 \in \Omega_R(\pi)$. Теперь, ввиду предложения 2.8, последнее включение означает, что $A \in \Omega_P(\pi)$. Тем самым мы доказали, что класс Польмана можно также определить и следующим образом.

Предложение 2.9. *Матрица $A \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ является $\Omega_P(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда существуют невырожденные блочно диагональные матрицы $\Delta_1, \Delta_2 \in \Delta^\pi$ такие, что $\Delta_1 A \Delta_2$ есть $\Omega_R(\pi)$-матрица.*

§3. Верхние оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$

В работе [15] была установлена следующая верхняя оценка для нормы l_∞ обратной матрицы.

Теорема 3.1 ([15]). *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, является $\Omega_R(\pi)$-матрицей. Тогда A невырождена и справедливо неравенство*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|[N(A)]^{-1}\|_\infty, \tag{3.1}$$

где

$$N(A) = \operatorname{diag}\left(\|A_{11}^{-1}\|_\infty^{-1}, \dots, \|A_{mm}^{-1}\|_\infty^{-1}\right) \mathcal{M}_b(J_A). \tag{3.2}$$

Ниже мы установим верхнюю оценку $\|A^{-1}\|_\infty$ для $A \in \mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$ и рассмотрим некоторые ее частные случаи, соответствующие специальным разбиениям π. Затем мы покажем, что для матриц $A \in \Omega_R(\pi)$ новая оценка, вообще говоря, является более точной, чем оценка Робера (3.1). Наконец, мы выведем верхнюю оценку нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для $A \in \Omega_P(\pi)$.

Для того, чтобы установить верхнюю оценку для $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-матриц, нам потребуется следующая лемма, аналогичная теореме 5.1 из работы [6].

Лемма 3.1. *Пусть блочная матрица $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$,и блочно диагональная матрица $F = \mathrm{Diag}\,(F_1, \dots, F_m) \in \Delta^\pi$ обе невырождены. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|(\Delta^{-1}F^{-1}A)^{-1}\|_\infty, \tag{3.3}$$

где диагональная матрица

$$\Delta = \mathrm{diag}\,(\delta_1, \dots, \delta_n)$$

определяется соотношением

$$\Delta e = |F^{-1}|e. \tag{3.4}$$

Доказательство. Поскольку

$$A^{-1} = (\Delta^{-1}F^{-1}A)^{-1} \cdot (F\Delta)^{-1},$$

то мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|(\Delta^{-1}F^{-1}A)^{-1}\|_\infty \cdot \|(F\Delta)^{-1}\|_\infty. \tag{3.5}$$

Но из (3.4) следует, что

$$\|\Delta^{-1}F^{-1}\|_\infty = 1,$$

и требуемое неравенство (3.3) вытекает из (3.5). □

Первым результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$ и $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$, является $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1,\dots,i_m} \left\{ \left\| \left(\left[\Delta^{-1}\mathcal{M}(J_A)\right]^{(i_1,\dots,i_m)} \right)^{-1} \right\|_\infty \right\}, \tag{3.6}$$

где максимум берется по всем $i_k \in P_k$, $k = 1, \dots, m$, *а диагональная матрица* Δ *определяется соотношением*

$$\Delta e = |D_A^{-1}|e. \tag{3.7}$$

Доказательство. Поскольку $A \in \mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$, то блочная матрица Якоби $J_A = D_A^{-1}A$ является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей. Следовательно, ввиду свойства замкнутости класса $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы, упомянутого в §1, матрица $\Delta^{-1}J_A$ также является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей, и доказательство оценки (3.6) завершается применением леммы 3.1 с $F = D_A$ к матрице A и теоремы 1.2 к $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрице $\Delta^{-1}J_A$. □

Замечание 3.1. В работе [6] оценка, аналогичная оценке (3.6), была доказана при дополнительном предположении о том, что блочно диагональная часть D_A монотонна.

Рассмотрим некоторые специальные случаи теоремы 3.2.

Если $m = 1$, то $D_A = A$, $J_A = I_n$ и $\Delta \leqslant \|A^{-1}\|_\infty I_n$, так что оценка (3.6) сводится к тривиальному равенству $\|A^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}\|_\infty$ и является точной, хотя и бесполезной.

Если $m = n$, то $A = (a_{ij})$ является $\mathcal{H}$-матрицей, $\Delta = |D_A|^{-1} = |\operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})|^{-1}$, $\Delta^{-1}\mathcal{M}(J_A) = \mathcal{M}(A)$, и оценка (3.6) сводится к хорошо известному для $\mathcal{H}$-матриц неравенству

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|[\mathcal{M}(A)]^{-1}\|_\infty.$$

Как легко видеть, при $m = 1$ и $m = n$ классы $\Omega_R(\pi)$ и $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$ совпадают, и теоремы 3.1 и 3.2 дают одни и те же тривиальные оценки.

Рассмотрим теперь случай $m = 2$, $\pi = \{S, \bar{S}\}$, где S – непустое собственное подмножество множества индексов $\langle n \rangle$, $|S| = p$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, и $\bar{S} = \langle n \rangle \setminus S$.

В этом случае,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}(J_A) = \begin{bmatrix} I_p & -|A_{11}^{-1}A_{12}| \\ -|A_{22}^{-1}A_{21}| & I_{n-p} \end{bmatrix},$$

$$\Delta \leqslant \begin{bmatrix} \|A_{11}^{-1}\|_\infty I_p & 0 \\ 0 & \|A_{22}^{-1}\|_\infty I_{n-p} \end{bmatrix}$$

и, очевидно,

$$\max_{i,j} \left\{ \left\| \left(\left[\Delta^{-1}\mathcal{M}(J_A)\right]^{(i,j)} \right)^{-1} \right\|_\infty \right\}$$

$$\leqslant \left\| \left(\begin{bmatrix} \|A_{11}^{-1}\|_\infty^{-1} & 0 \\ 0 & \|A_{22}^{-1}\|_\infty^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\|A_{11}^{-1}A_{12}\|_\infty \\ -\|A_{22}^{-1}A_{21}\|_\infty & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \right\|_\infty$$
$$= \|[N(A)]^{-1}\|_\infty.$$

Ясно, что в рассматриваемом случае мы имеем равенство

$$\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi) = \Omega_R(\pi),$$

а оценка (3.6), вообще говоря, является более точной, чем оценка Робера (3.1), которая дает

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant (1 - \|A_{11}^{-1}A_{12}\|_\infty \cdot \|A_{22}^{-1}A_{21}\|_\infty)^{-1}$$
$$\times \left\| \begin{bmatrix} 1 & \|A_{11}^{-1}A_{12}\|_\infty \\ \|A_{22}^{-1}A_{21}\|_\infty & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|A_{11}^{-1}\|_\infty & 0 \\ 0 & \|A_{22}^{-1}\|_\infty \end{bmatrix} \right\|_\infty$$
$$\leqslant (1 - \|A_{11}^{-1}A_{12}\|_\infty \cdot \|A_{22}^{-1}A_{21}\|_\infty)^{-1}$$
$$\times \max\left\{ \|A_{11}^{-1}\|_\infty + \|A_{11}^{-1}A_{12}\|_\infty \|A_{22}^{-1}\|_\infty,\ \|A_{22}^{-1}\|_\infty + \|A_{22}^{-1}A_{21}\|_\infty \|A_{11}^{-1}\|_\infty \right\}.$$

Таким образом, в частном случае $m = 2$ нами установлено приводимое ниже следствие из теоремы 3.2.

Следствие 3.1. *Пусть* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$, *где* $\pi = \{S, \bar{S}\}$, *а* S *– непустое собственное подмножество множества индексов* $\langle n \rangle$. *Если* A *является* $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$*-матрицей, то обратная матрица* A^{-1} *удовлетворяет оценке*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant (1 - \|A_{11}^{-1}A_{12}\|_\infty \cdot \|A_{22}^{-1}A_{21}\|_\infty)^{-1}$$
$$\times \max\left\{ \|A_{11}^{-1}\|_\infty + |A_{11}^{-1}A_{12}\|_\infty \|A_{22}^{-1}\|_\infty,\ \|A_{22}^{-1}\|_\infty + \|A_{22}^{-1}A_{21}\|_\infty \|A_{11}^{-1}\|_\infty \right\}. \tag{3.8}$$

Заметим, что, в силу (2.4), мы имеем $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \subset \mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$ и, как известно (см., например, [11]), при $\pi = \{S, \bar{S}\}$ класс $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ совпадает с классом так называемых S-SDD матриц (по поводу их определения см., например, [8]). Следовательно, оценка Робера (3.8) справедлива, в частности, и для S-SDD матриц и является альтернативной к оценке теоремы 1.2, которую можно записать в виде

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\ j\in\bar{S}} \max\left\{ \rho_{ij}^S(A),\ \rho_{ji}^{\bar{S}}(A) \right\}, \tag{3.9}$$

где

$$\rho_{ij}^S(A) = \frac{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A)}{(|a_{ii}| - r_i^S(A))(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) - r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A)}, \quad i \in S, \quad j \in \bar{S},$$

и

$$r_i^S(A) = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} |a_{ij}|, \quad i \in S.$$

Оценка (3.9) для обратных к S-SDD матрицам была первоначально получена в работах [12, 2].

Как мы видели, при $m = 1, 2, n$, классы $\Omega_R(\pi)$ и $\mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$ совпадают, а оценка теоремы 3.2 по крайней мере не уступает оценке Робера (3.1).

В случае же произвольного разбиения π, ввиду предложения 2.4, мы имеем включение $\Omega_R(\pi) \subset \mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi)$, и, как утверждается в следующей теореме, для матриц $A \in \Omega_R(\pi)$ оценка Робера (3.1), вообще говоря, менее точна, чем оценка теоремы 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}_\pi^{n \times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, *является* $\Omega_R(\pi)$*-матрицей. Тогда*

$$\max_{i_1,\dots,i_m} \left\{ \left\| \left(\left[\Delta^{-1} \mathcal{M}(J_A) \right]^{(i_1,\dots,i_m)} \right)^{-1} \right\|_\infty \right\} \leqslant \|[N(A)]^{-1}\|_\infty. \tag{3.10}$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (3.10) достаточно показать, что для любого набора индексов $i_1, \dots, i_m$ имеет место неравенство

$$\left\| \left(\left[\Delta^{-1} \mathcal{M}(J_A) \right]^{(i_1,\dots,i_m)} \right)^{-1} \right\|_\infty \leqslant \|[N(A)]^{-1}\|_\infty. \tag{3.11}$$

Для доказательства неравенства (3.11) нам достаточно убедиться, что $m \times m$ $\mathcal{M}$-матрицы, фигурирующие в (3.11), удовлетворяют (поэлементному) неравенству

$$\left[\Delta^{-1} \mathcal{M}(J_A) \right]^{(i_1,\dots,i_m)} \geqslant N(A). \tag{3.12}$$

Ввиду определений (3.2) и (3.7), для диагональных сомножителей матриц из (3.12) имеет место неравенство

$$\left[\Delta^{-1} \right]^{(i_1,\dots,i_m)} \geqslant \operatorname{diag}\left(\|A_{11}^{-1}\|_\infty^{-1}, \dots, \|A_{mm}^{-1}\|_\infty^{-1} \right),$$

и остается лишь убедиться, что при всех $i \neq j$ и $k \in P_i$ мы имеем

$$\left\{ |A_{ii}^{-1} A_{ij}| e \right\}_k \leqslant \|A_{ii}^{-1} A_{ij}\|_\infty.$$

Но последнее неравенство выполнено тривиальным образом. Теорема доказана. □

Следует отметить, что хотя оценка (3.6) и улучшает, вообще говоря, оценку Робера (3.1), для ее применения необходимо знать верхние оценки в норме l_∞ для обратных ко всем агрегированным матрицам $\left[\Delta^{-1}\mathcal{M}(J_A)\right]^{(i_1,\dots,i_m)}$, а не для единственной матрицы $[N(A)]^{-1}$.

Замечание 3.2. Ввиду следствия 2.1, мы имеем

$$\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \subset \mathrm{QP}\mathcal{H}(\pi).$$

Следовательно, для обратных к $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицам в дополнение к оценке теоремы 2.1 мы также имеем и оценку теоремы 3.2.

В завершение статьи мы покажем, как можно оценить $\|A^{-1}\|_\infty$ сверху применительно к $\Omega_P(\pi)$-матрицам A.

Пусть $A \in \mathbb{C}_\pi^{n\times n}$ является $\Omega_P(\pi)$-матрицей. Тогда, в силу предложения 2.8, существует невырожденная блочно диагональная матрица $\Delta \in \Delta^\pi$ такая, что

$$B = A\Delta \in \Omega_R(\pi).$$

Определим матрицу $D = \mathrm{Diag}\,(d_1 I_{n_1}, \dots, d_m I_{n_m}) \in D^\pi$ с помощью соотношений

$$d_i = \|\Delta_i\|_\infty. \quad i = 1, \dots, m. \tag{3.13}$$

Тогда будем иметь

$$A^{-1} = (\Delta D^{-1})(DB^{-1}), \tag{3.14}$$

а поскольку, в силу (3.13), для $\Delta D^{-1} = D^{-1}\Delta$ мы имеем $\|\Delta D^{-1}\|_\infty = 1$, то из (3.14) мы получаем, что

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|(BD^{-1})^{-1}\|_\infty. \tag{3.15}$$

Как уже было упомянуто в §1, класс $\Omega_R(\pi)$ является замкнутым относительно правого умножения на диагональные матрицы из D^π. Следовательно, BD^{-1} является $\Omega_R(\pi)$-матрицей. Таким образом, норму $\|(BD^{-1})^{-1}\|_\infty$ можно оценить сверху с помощью либо теоремы 3.1, либо теоремы 3.2. Следует, однако, отметить, что неравенство (3.15) может быть использовано, только если блочно диагональная матрица $\Delta \in \Delta^\pi$ такая, что $A\Delta \in \Omega_R(\pi)$, известна явно.

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Об улучшении оценок Чистякова для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 103–118.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.

3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных для PM- и PH-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 75–109.
4. Л. Ю. Колотилина, *Характеризация PM- и PH-матриц в терминах диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 110–120.
5. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных в норме l_∞ для некоторых блочных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 145–158.
6. Л. Ю. Колотилина, *Новые подклассы класса $\mathcal{H}$-матриц и соответствующие оценки обратных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **453** (2016), 148–171.
7. L. Cvetković, K. Doroslovački, *Max norm estimation for the inverse of block matrices.* — Appl. Math. Comput. **242** (2014), 694–706.
8. L. Cvetković, V. Kostić, R. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area.* — ETNA **18** (2004), 73–80.
9. M. Fiedler, V. Ptak, *Generalized norms of matrices and the location of the spectrum.* — Czech. Math. J. **12 (87)** (1962), 558–571.
10. D. G. Feingold, R. S. Varga, *Block diagonally dominant matrices and generalization of the Gerschgorin circle theorem.* — Pacific J. Math. **12** (1962), 1241–1250.
11. L. Yu. Kolotilina, *Bounds for the infinity norm of the inverse for certain M- and H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 692–702.
12. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and $\mathcal{S}-SDD$ matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.
13. A. Ostrowski, *On some metrical properties of operator matrices and matrices partitioned into blocks.* — J. Math. Anal. Appl. **2** (1961), 161–209.
14. B. Polman, *Incomplete blockwise factorizations of (block) H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **90** (1987), 119–132.
15. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative classiques par blocs.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
16. E. Šanca, V. Kostić, *Diagonal scaling of a special type and its benefit.* —- Proc. Appl. Math. Mech. **13** (2013), 409–410 (2013).

Kolotilina L. Yu. On block generalizations of $\mathcal{H}$-matrices.

The paper considers some classes of block matrices that can be regarded as block generalizations of the class of $\mathcal{H}$-matrices and interrelations among them. New bounds for the infinity norm of inverses for matrices in the classes under consideration are suggested.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 26 октября 2016 г.