Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

Л. Ю. Колотилина

НОВЫЕ ПОДКЛАССЫ КЛАССА $\mathcal{H}$-МАТРИЦ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ОЦЕНКИ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

В последнее время значительное внимание уделялось изучению различных подклассов $\mathcal{K}$ класса (невырожденных) $\mathcal{H}$-матриц. Как правило, рассматриваемые подклассы содержат важный подкласс SDD (strictly diagonally dominant) матриц со строгим диагональным преобладанием:

$$\mathrm{SDD} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}.$$

По-видимому, первым подклассом, лежащим между SDD матрицами и $\mathcal{H}$-матрицами, который изучался в литературе, является класс N матриц Некрасова, см. §2, в котором приводятся необходимые определения. Среди обобщений классов SDD и N, введенных в рассмотрение относительно недавно, упомянем классы S-SDD и S-некрасовских (короче, SN) матриц, содержащие соответственно SDD и некрасовские матрицы. Класс S-SDD впервые рассматривался (под другим названием) в работе [15]; затем он также исследовался, в частности, в работах [1, 2, 14, 17]. Что касается SN матриц, то они были введены в статье [13], а оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$ были предложены в [12] и [8].

Упомянем также класс QN матриц, введенный в [8], который содержит класс N.

Как было впервые отмечено в работе [3], классы SDD и S-SDD, так же как и весь класс $\mathcal{H}$, являются в действительности специальными случаями так называемых P$\mathcal{H}$-матриц, изначально рассмотренных в [2], где была сформулирована теорема, утверждающая, что любая P$\mathcal{H}$-матрица является $\mathcal{H}$-матрицей. Доказательство этого результата было представлено в [3], а термин P$\mathcal{H}$ был введен в [16].

Ключевые слова: $\mathcal{H}$-матрица, SDD матрица, матрица Некрасова, S-некрасовская матрица, QN матрица, S − SDD матрица, P$\mathcal{H}$-матрица, P$\mathcal{H}$N-матрица, P$\mathcal{H}$QN-матрица, обратная матрица, бесконечная норма, верхняя оценка.

Для заданного $n \geqslant 1$ класс $\mathrm{P}\mathcal{H}$ состоит из всех классов $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, где $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ – разбиение порядка m, $1 \leqslant m \leqslant n$, множества индексов $\langle n \rangle = \{1, \ldots, n\}$ на непустые непересекающиеся подмножества P_i, так что

$$\langle n \rangle = \bigcup_{i=1}^{m} P_i.$$

Класс SDD получается в случае тривиального разбиения ($m = 1$); класс S-SDD соответствует разбиению $\pi = \{S, \bar{S}\}$, где $\bar{S}$ обозначает дополнение подмножества S в $\langle n \rangle$, а весь класс $\mathcal{H}$ целиком получается в случае самого мелкого точечного разбиения

$$\pi = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}.$$

Большинство свойств $\mathrm{P}\mathcal{H}$-матриц легко выводятся из следующей важной характеризации, установленной в работе [5].

Теорема 1.1. *Пусть $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ – разбиение множества индексов $\langle n \rangle$, $n \geqslant 1$, на m, $1 \leqslant m \leqslant n$, непустых непересекающихся подмножеств. Матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда существует диагональная матрица $\Delta \in D^{\pi}$ такая, что отмасштабированная по столбцам матрица $A\Delta$ принадлежит классу* SDD.

Здесь и далее, D^{π} обозначает множество диагональных матриц $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, обладающих следующим свойством: для всех $j = 1, \ldots n$,

$$\text{из} \quad j \in P_i \quad \text{следует, что} \quad \delta_j = c_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где c_i, $i = 1, \ldots, m$, – некоторые положительные константы.

В частности, из теоремы 1.1 немедленно следует, что в крайних случаях $m = 1$ и $m = n$, отвечающих самому грубому и самому мелкому разбиениям, которые определены однозначно, соответствующие классы $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матриц совпадают, как уже было отмечено, с классами SDD и $\mathcal{H}$. Соответствующее утверждение для случая $\pi = \{S, \bar{S}\}$, где $S \subset \langle n \rangle$, вытекает из теоремы 1.1 и известной характеризации S-SDD матриц, см., например, [7].

Из теоремы 1.1 также легко следует, что для любого разбиения π класс $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ замкнут относительно правого умножения на диагональные матрицы из D^{π}.

Еще одним свойством, немедленно вытекающим из теоремы 1.1, является следующее. Пусть π_1 и π_2 – два разбиения множества $\langle n\rangle$, причем π_2 является измельчением π_1, т.е. получается из него посредством дальнейшего разбиения некоторых из подмножеств, составляющих π_1, на более мелкие. Тогда

$$\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi_1) \subset \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi_2). \tag{1.1}$$

Мы будем называть это свойство свойством монотонности классов $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ относительно разбиения. Ввиду сказанного выше, из свойства монотонности немедленно получаем, что для любого разбиения π справедливы включения

$$SDD \subseteq \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \subseteq \mathcal{H}. \tag{1.2}$$

Стоит также отметить, что введение классов $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ мотивируется не только тем фактом, что они позволяют обобщить известные подклассы SDD и S-SDD и связать их с классом $\mathcal{H}$. Важно также, что для матриц $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ известна верхняя оценка нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ через те же нормы обратных к $m \times m$ матрицам из некоторого набора [16].

В настоящей работе мы продолжаем исследование подклассов класса $\mathcal{H}$-матриц и, в частности, вводим в рассмотрение новые классы $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$-матриц и еще более общие классы $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$-матриц. Мы показываем, что для любого разбиения π множества индексов $\langle n\rangle$ имеют место включения

$$\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \subseteq \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) \subseteq \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi).$$

Далее, если $\pi = \{\langle n\rangle\}$ – тривиальное (самое грубое) разбиение, то

$$\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) = \mathrm{N} \quad \text{и} \quad \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi) = \mathrm{QN};$$

если $\pi = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ – самое мелкое (точечное) разбиение, то

$$\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) = \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi) = \mathcal{H},$$

а если $\pi = \{S, \bar{S}\}$ для некоторого $S \subset \langle n\rangle$, то

$$\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) = S\mathrm{N} \quad \text{и} \quad \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi) = S\mathrm{QN}$$

(класс SQN будет определен в §4). Кроме того, классы $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$ и $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$ обладают тем же свойством монотонности, что и $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, а именно: если π_2 является измельчением π_1, то

$$\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi_1) \subset \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi_2) \quad \text{и} \quad \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi_1) \subset \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi_2). \tag{1.3}$$

Из (1.3) и сказанного выше легко следует, что для любого π справедливы включения

$$\mathrm{N} \subseteq \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) \subseteq \mathcal{H} \quad \text{и} \quad \mathrm{QN} \subseteq \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi) \subseteq \mathcal{H}. \tag{1.4}$$

Следует также отметить, что все классы $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$ и $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$, наряду с классом SDD и всем классом $\mathcal{H}$, замкнуты относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы соответствующего порядка.

Первыми основными результатами настоящей работы являются теоремы 3.1 и 4.1, аналогичные теореме 1.1, которые устанавливают характеризации классов $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$ и $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$ в терминах диагональных матриц, преобразующих матрицы из этих классов соответственно в N и QN матрицы. С помощью этих теорем нетрудно получить ряд качественных свойств соответствующих матричных классов.

Затем мы выводим верхние оценки $\|A^{-1}\|_\infty$ для $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$ и $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$, а также оценки для блочных аналогов этих классов в смысле Робера [19].

Наконец, мы предлагаем один общий подход к построению подклассов класса $\mathcal{H}$-матриц, содержащих заданный подкласс $\mathcal{K}$ и обладающих некоторыми приятными свойствами. В частности, классы $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$ и $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$ могут быть получены таким образом при $\mathcal{K}$=SDD, $\mathcal{K}$=N и $\mathcal{K}$=QN соответственно.

Работа построена следующим образом. В §2 приводятся некоторые известные определения и оценки нормы l_∞ обратных матриц. В §§3 и 4 мы устанавливаем уже упомянутые теоремы 3.1 и 4.1 и выводим из них свойства классов $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$ и $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$. Верхние оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$ устанавливаются в §5. Блочные обобщения рассматриваются в §6. Наконец, в §7 предлагается альтернативный общий подход к определению подклассов класса $\mathcal{H}$-матриц исходя из некоторого разбиения π и заданного подкласса $\mathcal{K}$.

§2. Предварительные сведения

В этом параграфе приводятся некоторые определения и результаты, необходимые для дальнейшего.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется $\mathcal{H}$-матрицей, если ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, определяемая соотношением

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

является невырожденной $\mathcal{M}$-матрицей. Заметим, что, в соответствии с этим определением, все $\mathcal{H}$-матрицы являются невырожденными.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, имеет строгое диагональные преобладание ($A \in \mathrm{SDD}$), если

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

где

$$r_i(A) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.2}$$

– это усеченные абсолютные строчные суммы.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется матрицей Некрасова (или N матрицей) (см., например, [6, 11]), если

$$|a_{ii}| > h_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.3}$$

где величины $h_i(A)$ определяются при помощи следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} h_1(A) &= r_1(A) = \sum_{j\neq 1} |a_{1j}|; \\ h_i(A) &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} h_j(A) + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В матричных терминах матрицы Некрасова могут быть определены следующим образом. Пусть $A = D + L + U$ – стандартное расщепление матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ на ее диагональную (D), строго нижнюю треугольную (L) и строго верхнюю треугольную (U) части и пусть Z-матрица $N(A)$ определена по формуле:

$$N(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = |D| - |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|. \tag{2.5}$$

Тогда A является матрицей Некрасова в том и только том случае, когда $N(A)$ – SDD матрица.

Для заданного непустого подмножества $S \subset \langle n \rangle$ понятие SDD матриц можно обобщить следующим образом (см. [14, 21]). Определим частичные абсолютные строчные суммы

$$r_i^S(A) = \sum_{j\in S\setminus\{i\}} |a_{ij}|, \quad i \in S. \tag{2.6}$$

Тогда матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется S-SDD (S-strictly diagonally dominant) матрицей, если выполнены следующие два условия:

$$|a_{ii}| > r_i^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \tag{2.7}$$

и

$$\begin{gathered}\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] > r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A) \\ \text{для всех} \quad i \in S \quad \text{и} \quad j \in \bar{S}.\end{gathered} \tag{2.8}$$

S-SDD матрицы (под другим названием) были впервые введены в работе [15], в которой было установлено, что они являются H-матрицами. По-существу тот же матричный класс рассматривался в работе [1] как частный случай блочных матриц, удовлетворяющих псевдоблочным условиям диагонального преобладания типа Островского–Брауэра.

Под названием PBDD(n_1, n_2) этот матричный класс рассматривался в [2].

Ясно, что для произвольного непустого подмножества $S \subsetneq \langle n \rangle$ класс SDD матриц является собственным подклассом класса S-SDD матриц.

Класс S-некрасовских матриц SN, где S – непустое собственное подмножество индексного множества, был первоначально определен в работе [13] в терминах величин

$$h_1^S(A) = r_1^S(A); \quad h_i^S(A) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} h_j^S(A) + \sum_{\substack{j \geqslant i+1 \\ j \in S}} |a_{ij}|, \qquad i = 2, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется S-некрасовской (короче, SN) матрицей, если

$$|a_{ii}| > h_i^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \tag{2.10}$$

и

$$\begin{gathered}\left[|a_{ii}| - h_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - h_j^{\bar{S}}(A)\right] > h_i^{\bar{S}}(A)\, h_j^S(A) \\ \text{для всех} \quad i \in S \quad \text{и} \quad j \in \bar{S}.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Обозначим

$$e^S = (e_i^S), \quad e_i^S = \begin{cases} 1, & i \in S, \\ 0, & i \in \bar{S}. \end{cases}$$

Тогда, как нетрудно убедиться, соотношения (2.9) можно записать в матрично-векторной форме как

$$h^S(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e^S, \tag{2.12}$$

и A является SN матрицей тогда и только тогда, когда $N(A)$ является S-SDD матрицей, см. [7].

Как легко следует из определений, матрицы Некрасова образуют собственный подкласс S-некрасовских матриц. С другой стороны, класс SN одновременно содержит и класс S-SDD (см. [12, 13]). Таким образом,

$$\mathrm{N} \subset S\mathrm{N} \subset \mathcal{H} \quad \text{и} \quad S - \mathrm{SDD} \subset S\mathrm{N} \subset \mathcal{H}.$$

Так называемые QN матрицы были введены в работе [8]; они являются обобщением матриц Некрасова, альтернативным SN матрицам. Определим вспомогательную матрицу

$$\begin{aligned} Q(A) &= (|D| - |U|)^{-1}|D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) \\ &= (|D| - |U|)^{-1}N(A). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Матрица A называется QN матрицей, если матрица $Q(A)$ имеет строгое диагональное преобладание.

Как было показано в [8], класс QN обладает следующими свойствами:

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{QN} \subset \mathcal{H}.$$

Класс P$\mathcal{H}$-матриц был формально определен в работе [16]. Он является объединением классов P$\mathcal{H}(\pi)$ по все разбиениям π множества индексов $\langle n \rangle$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть

$$\pi = \{P_1, \dots, P_m\}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \tag{2.14}$$

– некоторое разбиение множества индексов $\langle n \rangle$ на m непустых непересекающихся подмножеств. Обозначим

$$A_{ij} = A[P_i, P_j] = (a_{rs})_{\substack{r\in P_i \\ s\in P_j}}, \quad i, j = 1, \dots, m, \tag{2.15}$$

и представим A в следующем блочном виде:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Определим набор, состоящий из $m_1 \times \cdots \times m_m$ агрегированных матриц порядка m:

$$A^{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} \equiv \begin{bmatrix} s_{i_1}(A_{11}) & s_{i_1}(A_{12}) & \ldots & s_{i_1}(A_{1m}) \\ s_{i_2}(A_{21}) & s_{i_2}(A_{22}) & \ldots & s_{i_2}(A_{2m}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{i_m}(A_{m1}) & s_{i_m}(A_{m2}) & \ldots & s_{i_m}(A_{mm}) \end{bmatrix},$$
$$i_k \in P_k, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{2.17}$$

Здесь $m_i = |P_i|$, $i = 1, \ldots, m$, и

$$s_{i_k}(A_{kp}) = (A_{kp}e)_{i_k}, \quad i_k \in P_k, \quad k, p = 1, \ldots, m,$$

– строчные суммы блоков A_{kp} с учетом знаков элементов.

Мы говорим, что матрица A является $\mathrm{P}\mathcal{M}(\pi)$-матрицей, если A является Z-матрицей, а все матрицы $A^{(i_1,\ldots,i_m)}$, $i_k \in P_k$, $k = 1, \ldots, m$, определенные в соответствии с (2.17), – невырожденные $\mathcal{M}$-матрицы. Также мы говорим, что A является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей, если $\mathcal{M}(A)$ является $\mathrm{P}\mathcal{M}(\pi)$-матрицей.

Ясно, что матрица A является $\mathrm{P}\mathcal{M}(\pi)$-матрицей ($\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей) для самого мелкого (точечного) разбиения $\pi = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$ тогда и только тогда, когда A – невырожденная $\mathcal{M}$-матрица ($\mathcal{H}$-матрица). С другой стороны, для самого грубого тривиального разбиения $\pi = \{\langle n \rangle\}$ матрица A является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда она имеет строгое диагональное преобладание. В том случае, когда $m = 2$ и $\pi = \{S, \bar{S}\}$, A является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей тогда и только тогда, когда она является S-SDD матрицей, см., например, [3, 16].

В следующей теоремы собраны лучшие из имеющихся в настоящее время оценок обратных для некоторых подклассов класса $\mathcal{H}$-матриц.

Теорема 2.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$.
(i) *Если* $A \in \mathrm{SDD}$, *то* [10, 20]

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}. \tag{2.18}$$

(ii) *Если* $A \in \mathrm{N}$, *то* [6]

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)}, \tag{2.19}$$

где $z(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}e$ *и* $e = (1, \dots, 1)^T$ *– единичный вектор.*
(iii) *Если* $A \in S - \mathrm{SDD}$ *для некоторого непустого собственного подмножества* S *множества* $\langle n \rangle$, *то* [2, 17]

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i \in S,\ j \in \bar{S}} \max \left\{ \rho_{ij}^S(A),\ \rho_{ji}^{\bar{S}}(A) \right\}, \tag{2.20}$$

где

$$\rho_{ij}^S(A) = \frac{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A)}{(|a_{ii}| - r_i^S(A))(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) - r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A)}, \quad i \in S, \quad j \in \bar{S}. \tag{2.21}$$

(iv) *Если* $A \in S\mathrm{N}$, *где* S *– непустое собственное подмножество множества* $\langle n \rangle$, *то* [8]

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i \in S,\ j \in \bar{S}} \max \left\{ \xi_{ij}^S(A),\ \xi_{ji}^{\bar{S}}(A) \right\}, \tag{2.22}$$

где

$$\xi_{ij}^S(A) = \frac{z_j(A) \left[|a_{ii}| - h_i^S(A) \right] + z_i(A) h_j^S(A)}{\left[|a_{ii}| - h_i^S(A) \right] \left[|a_{jj}| - h_j^{\bar{S}}(A) \right] - h_i^{\bar{S}}(A) h_j^S(A)}, \quad i \in S, \quad j \in \bar{S}. \tag{2.23}$$

(v) *Если* $A \in \mathrm{QN}$, *то* [8]

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{\{M^{-1}e\}_i}{\{Q(A)e\}_i}, \tag{2.24}$$

где $M = (|D| - |L|)|D|^{-1}(|D| - |U|)$, *а матрица* $Q(A)$ *определена в* (2.13).
(vi) *Если* $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, *– разбиение множества индексов* $\langle n \rangle$ *и* $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, *то* [16]

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1, \dots, i_m} \left\{ \left\| \left[\mathcal{M}(A)^{(i_1, \dots, i_m)} \right]^{-1} \right\|_\infty \right\}, \tag{2.25}$$

где максимум берется по всем $i_k \in P_k$, $k = 1, \dots, m$.

Заметим, что, как показано в работе [8], для $A \in \mathrm{SDD}$ оценка (2.19) вообще говоря улучшает оценку (2.18), а для $A \in \mathrm{N}$ оценки (2.22) и (2.24) обе улучшают (2.19).

Следует также отметить, что оценка (2.25) для $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ монотонна относительно разбиения π, т.е. если $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi_1)$, где $\pi_1 =$

$\{P_1,\dots,P_{m_1}\}$, и $\pi_2=\{P_1,\dots,P_{m_2}\}$, $m_2\geqslant m_1$, – некоторое измельчение разбиения π_1, то (см. [16, Theorem 3.2])

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty &\leqslant \max_{i_1,\dots,i_{m_1}}\left\{\left\|\left[\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_{m_1})}\right]^{-1}\right\|_\infty\right\}\\ &\leqslant \max_{i_1,\dots,i_{m_2}}\left\{\left\|\left[\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_{m_2})}\right]^{-1}\right\|_\infty\right\},\end{aligned} \tag{2.26}$$

так что оценку (2.25) можно сделать более точной, переходя к более мелкому разбиению.

В частности, из неравенств (2.26) следует, что

- для $A\in\mathrm{SDD}$ оценка (2.20) улучшает (2.18);
- для $A\in\mathrm{N}$ оценка (2.22) улучшает (2.19);
- для $A\in\mathrm{QN}$ оценка (2.24) улучшается при переходе к так называемым SQN-матрицам, см. §§4, 5.

§3. Класс P$\mathcal{H}$N и его свойства

В этом параграфе мы определяем новый класс P$\mathcal{H}$N-матриц.

Пусть $A=D+L+U\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 2$, и пусть $\pi=\{P_1,\dots,P_m\}$, $1\leqslant m\leqslant n$, – разбиение множества индексов $\langle n\rangle$. Будем говорить, что A является P$\mathcal{H}$N(π)-матрицей, если матрица

$$N(A)=|D|(|D|-|L|)^{-1}\mathcal{M}(A), \tag{3.1}$$

определенная в (2.5), является P$\mathcal{H}(\pi)$-матрицей.

Класс P$\mathcal{H}$N определяется как объединение

$$\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}=\bigcup_\pi \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi),$$

где π пробегает по всем разбиениям множества $\langle n\rangle$.

Заметим, что если $\pi=\{\langle n\rangle\}$ – самое грубое разбиение, то $A\in$ P$\mathcal{H}$N(π) тогда и только тогда, когда $N(A)$ имеет строгое диагональное преобладание, т.е. при $m=1$ класс P$\mathcal{H}$N(π) совпадает с классом некрасовских матриц N. Если $\pi=\{\{1\},\dots,\{n\}\}$ – самое мелкое разбиение, то $A\in$ P$\mathcal{H}$N(π) тогда и только тогда, когда $N(A)$ является $\mathcal{H}$-матрицей.

Если $\pi=\{S,\bar S\}$, где $S\subset\langle n\rangle$, то $A\in$ P$\mathcal{H}$N(π) тогда и только тогда, когда $N(A)\in S$-SDD. Но, в соответствии с теоремой 3.2 работы [7], последнее включение равносильно тому, что $A\in S$N. Таким образом, классы N и SN являются частными случаями классов P$\mathcal{H}$N(π), отвечающими специфическим разбиениям π. Как будет показано ниже, весь класс $\mathcal{H}$ совпадает с классом P$\mathcal{H}$N(π) при $\pi = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$.

Для изучения класса P$\mathcal{H}$N(π)-матриц покажем сперва, что матрица $N(A)$ обладает приятным свойством относительно правого умножения A на невырожденные диагональные матрицы.

Предложение 3.1. *Пусть $A = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и предположим, что D и некоторая диагональная матрица $\Delta \in \mathbb{C}^{n\times n}$ обе невырождены. Тогда*

$$N(A\Delta) = N(A)|\Delta|. \tag{3.2}$$

Доказательство. Используя определение матрицы N, мы выводим

$$\begin{aligned} N(A\Delta) &= |D\Delta|(|D\Delta| - |L\Delta|)^{-1}(|D\Delta| - |L\Delta| - |U\Delta|) \\ &= |D|(|D| - |L|)^{-1})|D| - |L| - |U|)|\Delta| = N(A)|\Delta|. \end{aligned}$$

□

Простейшее предложение 3.1 имеет ряд полезных следствий, приведенных ниже.

Следствие 3.1. *Для произвольного разбиения π множества $\langle n\rangle$ соответствующий класс* P$\mathcal{H}$N(π) *замкнут относительно правого умножения на диагональные матрицы из D^π.*

Доказательство. Пусть $A \in$ P$\mathcal{H}$N(π) и пусть $\Delta \in D^\pi$. По предложению 3.1,

$$N(A\Delta) = N(A)\Delta. \tag{3.3}$$

По определению класса P$\mathcal{H}$N(π) мы имеем

$$N(A) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi).$$

Тогда, как легко следует из теоремы 1.1, мы также имеем

$$N(A)\Delta \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi).$$

Последнее соотношение и (3.3) показывают, что

$$N(A\Delta) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi),$$

что в точности означает, что $A\Delta \in$ P$\mathcal{H}$N(π). □

Теперь мы готовы установить характеризацию P$\mathcal{H}$N(π)-матриц, аналогичную характеризации P$\mathcal{H}(\pi)$-матриц, содержащейся в теореме 1.1.

Теорема 3.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть π – разбиение множества индексов $\langle n\rangle$. Тогда $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$ в том и только том случае, когда существует диагональная матрица $\Delta \in D^\pi$ такая, что отмасштабированная по столбцам матрица $A\Delta$ является матрицей Некрасова.*

Доказательство. По определению,

$$A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad N(A) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi).$$

С другой стороны, по теореме 1.1,

$$N(A) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad N(A)\Delta \in \mathrm{S}DD \quad \text{для некоторой} \quad \Delta \in D^\pi.$$

Поскольку, по предложению 3.1,

$$N(A)\Delta = N(A\Delta),$$

мы заключаем, что

$$N(A) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad N(A\Delta) \in \mathrm{S}DD.$$

Но, по определению матриц Некрасова,

$$N(A\Delta) \in \mathrm{SDD} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\Delta \in \mathrm{N}.$$

Таким образом, мы показали, что для некоторой матрицы $\Delta \in D^\pi$

$$A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\Delta \in \mathrm{N}.$$

□

Следующий аналог включений (1.2) тривиально следует из теоремы 3.1.

Следствие 3.2. *Для произвольного разбиения π множества $\langle n\rangle$ справедливы включения*

$$\mathrm{N} \subseteq \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) \subseteq \mathcal{H}. \tag{3.4}$$

Заметим, что если $A \in \mathcal{H}$, то, как хорошо известно, существует невырожденная диагональная матрица Δ такая, что $A\Delta \in \mathrm{SDD}$, откуда следует, что $A\Delta \in \mathrm{N}$. Но, по теореме 3.1, это означает, что $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$ для точечного разбиения π. Этот факт совместно с правым включением в (3.4) показывает, что для самого мелкого разбиения π выполняется равенство

$$\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) = \mathcal{H}. \tag{3.5}$$

Следующее следствие из теоремы 3.1 показывает, что $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицы содержатся в классе $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$.

Следствие 3.3. *Для произвольного разбиения π множества $\langle n\rangle$ мы имеем*

$$\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \subseteq \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi). \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$. Тогда, по теореме 1.1, существует диагональная матрица $\Delta \in D^\pi$ такая, что $A\Delta$ имеет строгое диагональное преобладание, откуда следует, что $A\Delta \in \mathrm{N}$. Но, по теореме 3.1, последнее включение как раз и означает, что $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$. □

Наконец, еще одно следствие, немедленно вытекающее из теоремы 3.1, – это свойство монотонности классов $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$, аналогичное свойству (1.1).

Следствие 3.4. *Если π_1 и π_2 – разбиения индексного множества $\langle n\rangle$, $n \geqslant 2$, причем π_2 получается измельчением π_1, то*

$$\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi_1) \subset \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi_2). \tag{3.7}$$

§4. Класс $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}$ и его свойства

В этом параграфе мы вводим класс $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}$-матриц, который содержит класс $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}$, рассмотренный в предыдущем параграфе.

Пусть заданы матрица $A = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и разбиение $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, множества $\langle n\rangle$. Будем говорить, что A является $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi)$-матрицей, если матрица

$$Q(A) = (|D| - |U|)^{-1}|D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = (|D| - |U|)^{-1}N(A), \tag{4.1}$$

где $N(A)$ – это матрица (3.1), является $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей.

Класс $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N$ определяется как объединение

$$\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N = \bigcup_\pi \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi),$$

где π пробегает по всем разбиениям множества $\langle n\rangle$.

Заметим, что если $\pi = \{\langle n\rangle\}$ – тривиальное разбиение, то $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi)$ тогда и только тогда, когда $Q(A)$ имеет строгое диагональное преобладание, т.е. для $m = 1$ класс $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi)$ совпадает с классом QN. Если же $\pi = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ – самое мелкое разбиение, то $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi)$ тогда и только тогда, когда $Q(A)$ является $\mathcal{H}$-матрицей. Как будет показано ниже, в последнем случае в действительности имеет место равенство $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi) = \mathcal{H}$.

Если $\pi = \{S, \bar{S}\}$, где $S \subset \langle n \rangle$, то $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi)$ тогда и только тогда, когда $Q(A) \in S$-SDD. Мы будем обозначать этот матричный класс через SQN по аналогии с SN.

Изучение $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi)$-матриц мы начнем с установления того факта, что, аналогично матрице $N(A)$, матрица $Q(A)$ обладает простым свойством, связанным с правым умножением матрицы A на невырожденные диагональные матрицы.

Предложение 4.1. *Пусть $A = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и предположим, что как D, так и диагональная матрица $\Delta \in \mathbb{C}^{n\times n}$ обе невырождены. Тогда*

$$Q(A\Delta) = |\Delta|^{-1} Q(A) |\Delta|. \tag{4.2}$$

Доказательство. Используя определение (4.1) матрицы Q и соотношение (3.2), мы выводим

$$\begin{aligned} Q(A\Delta) &= (|D\Delta| - |U\Delta|)^{-1} N(A\Delta) \\ &= |\Delta|^{-1}(|D| - |U|)^{-1} N(A)|\Delta| = |\Delta|^{-1} Q(A)|\Delta|. \end{aligned}$$

□

Ниже приведены некоторые простые следствия из предложения 4.1.

Следствие 4.1. *Для произвольного разбиения π множества $\langle n \rangle$ соответствующий ему класс $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$ замкнут относительно правого умножения на диагональные матрицы из D^π.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$ и пусть $\Delta \in D^\pi$. В силу предложения 4.1, верно равенство

$$Q(A\Delta) = \Delta^{-1} Q(A) \Delta, \tag{4.3}$$

а по определению класса $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$ мы имеем

$$Q(A) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi).$$

Но тогда, как легко следует из теоремы 1.1, мы также имеем

$$\Delta^{-1} Q(A) \Delta \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi).$$

Последнее соотношение и (4.3) показывают, что

$$Q(A\Delta) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi),$$

что и означает, что $A\Delta \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$. □

Следующая характеризация $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi)$-матриц аналогична характеризациям $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$- и $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$-матриц, представленным в теоремах 1.1 и 3.1.

Теорема 4.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть π – разбиение множества индексов $\langle n\rangle$. Тогда $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$ в том и только том случае, когда существует диагональная матрица $\Delta \in D^\pi$ такая, что отмасштабированная по столбцам матрица $A\Delta$ является* QN *матрицей.*

Доказательство. По определению,

$$A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q(A) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi).$$

С другой стороны, в силу теоремы 1.1,

$$Q(A) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q(A)\Delta \in \mathrm{SDD}$$

$$\text{для некоторой матрицы} \quad \Delta \in D^\pi.$$

Поскольку, по предложению 4.1,

$$\Delta^{-1}Q(A)\Delta = Q(A\Delta),$$

мы заключаем, что

$$Q(A) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q(A\Delta) \in \mathrm{SDD}.$$

Но, по определению QN матриц,

$$Q(A\Delta) \in \mathrm{SDD} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\Delta \in \mathrm{QN}.$$

Таким образом, мы показали, что

$$A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\Delta \in \mathrm{QN}.$$

□

Следствия из теоремы 4.1, приводимые ниже, вполне аналогичны следствиям из теоремы 3.1.

Следствие 4.2. *Для произвольного разбиения π множества $\langle n\rangle$ справедливы включения*

$$\mathrm{QN} \subseteq \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi) \subseteq \mathcal{H}.$$

Следствие 4.3. *Для произвольного разбиения π множества $\langle n\rangle$ имеет место включение*

$$\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) \subseteq \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi). \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$. Тогда, в силу теоремы 3.1, найдется диагональная матрица $\Delta \in D^{\pi}$ такая, что $A\Delta \in \mathrm{N}$, откуда следует, что $A\Delta \in \mathrm{QN}$. Но, по теореме 4.1, последнее включение как раз и означает, что $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{Q}N(\pi)$. □

Заметим, что для точечного разбиения π из соотношений (4.4) и (3.5) вытекает, что

$$\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi) = \mathcal{H}.$$

Следствие 4.4. *Пусть π_1 и π_2 – разбиения множества индексов $\langle n \rangle$, $n \geqslant 2$, причем π_2 получается измельчением разбиения π_1. Тогда*

$$\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi_1) \subset \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi_2). \tag{4.5}$$

§5. Оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$

В этом параграфе мы указываем общий подход к выводу верхних оценок $\|A^{-1}\|_\infty$ для матриц из различных подклассов класса $\mathcal{H}$-матриц. Предлагаемый подход основан на следующем простом результате.

Теорема 5.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является $\mathcal{H}$-матрицей и пусть*

$$G(A) = F(A)^{-1}\mathcal{M}(A) \tag{5.1}$$

для некоторой монотонной матрицы $F(A)$. Тогда

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|[\Delta^{-1}G(A)]^{-1}\|_\infty, \tag{5.2}$$

где диагональная матрица $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1,\dots,\delta_n)$ определяется соотношением

$$\Delta e = F(A)^{-1}e. \tag{5.3}$$

Доказательство. Заметим сперва, что, как хорошо известно (см. [18]),

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty. \tag{5.4}$$

Далее, из определения (5.3) матрицы Δ мы выводим, что

$$\Delta^{-1}F(A)^{-1}e = e.$$

Поскольку матрица, стоящая в левой части последнего равенства неотрицательна, мы имеем

$$\|\Delta^{-1}F(A)^{-1}\|_\infty = 1. \tag{5.5}$$

Теперь с использованием (5.1) и (5.5) мы выводим

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty &= \|[\Delta^{-1}F(A)^{-1}\mathcal{M}(A)]^{-1}\,[\Delta^{-1}F(A)^{-1}]\|_\infty\\ &\leqslant \|[\Delta^{-1}G(A)]^{-1}\|_\infty\,\|\Delta^{-1}F(A)^{-1}]\|_\infty\\ &= \|[\Delta^{-1}G(A)]^{-1}\|_\infty.\end{aligned}$$

По-другому, поскольку $A \in \mathcal{H}$, то $\mathcal{M}$-матрица $\mathcal{M}(A)$ монотонна, так что

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty = \max_{i\in\langle n\rangle}\{\mathcal{M}(A)^{-1}e\}_i.$$

Но, в силу (5.1),

$$\mathcal{M}(A)^{-1} = G(A)^{-1}F(A)^{-1},$$

откуда, ввиду (5.3), вытекает, что

$$\mathcal{M}(A)^{-1}e = G(A)^{-1}F(A)^{-1}e = G(A)^{-1}\Delta e = (\Delta^{-1}G(A))^{-1}e. \tag{5.6}$$

Таким образом, мы имеем

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \|[\Delta^{-1}G(A)]^{-1}\|_\infty. \tag{5.7}$$

Неравенство (5.7) с учетом (5.4) и доказывает (5.2). □

Замечание 5.1. Заметим, что в том случае, когда матрица $G(A)$ монотонна, соотношение (5.7), как следует из (5.6), является равенством. Это замечание применимо, в частности, к матрицам $N(A)$ и $Q(A)$, определенным соответственно в (3.1) и (4.1).

Если матрица $G(A)$ принадлежит непустому собственному подклассу $\mathcal{K}$ класса $\mathcal{H}$, причем класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы, то вместе с матрицей $G(A)$ классу $\mathcal{K}$ также принадлежит и отмасштабированная по строкам матрица $\Delta^{-1}G(A)$. Поэтому, если $G(A) \in \mathcal{K}$ и для всех матриц $B \in \mathcal{K}$ известна верхняя оценка $\|B^{-1}\|_\infty$, то эта оценка применима и к матрице $\Delta^{-1}G(A)$, и, в силу теоремы 5.1, ее можно использовать, чтобы получить верхнюю оценку $\|A^{-1}\|_\infty$.

Описанный выше подход был впервые использован в работе [6] для вывода верхней оценки $\|A^{-1}\|_\infty$ для матрицы Некрасова $A = D+L+U$, где диагональная матрица $\Delta = \Delta_N$ определялась равенством

$$\Delta_N e = |D|(|D| - |L|)^{-1}e, \tag{5.8}$$

а в качестве $\mathcal{K}$ использовался класс SDD.

В работе [8] тот же подход был использован для вывода верхней оценки $\|A^{-1}\|_\infty$ для SN матриц A с той же самой матрицей Δ_N, определенной в (5.8), и классом $\mathcal{K} = S - \mathrm{SDD}$, а также для QN матриц A, для которых матрица $\Delta = \Delta_Q$ определялась равенством

$$\Delta_Q e = (|D| - |U|)^{-1}\ |D|\ (|D| - |L|)^{-1} e, \tag{5.9}$$

а в качестве $\mathcal{K}$ был использован класс SDD.

Обращаясь к классам $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$ и $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$, мы можем обобщить упомянутые выше известные оценки следующим образом.

Теорема 5.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, – некоторое разбиение множества $\langle n\rangle$.*
(i) *Если $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$, то*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1,\ldots,i_m} \left\{ \left\| \left[(\Delta_N^{-1} N(A))^{(i_1,\ldots,i_m)} \right]^{-1} \right\|_\infty \right\}, \tag{5.10}$$

где

$$N(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)$$

и матрица Δ_N определена в соответствии с (5.8).
(ii) *Если $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$, то*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1,\ldots,i_m} \left\{ \left\| \left[(\Delta_Q^{-1} Q(A))^{(i_1,\ldots,i_m)} \right]^{-1} \right\|_\infty \right\}, \tag{5.11}$$

где

$$Q(A) = (|D| - |U|)^{-1}|D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)$$

и матрица Δ_Q определена в соответствии с (5.9).

Доказательство. (i) Из $A \in \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$ следует, что $N(A) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$. Поскольку матрица $F(A) = (|D| - |L|)|D|^{-1}$ монотонна, то для матрицы Δ_N, определенной в (5.8), в силу теоремы 5.1 мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|[\Delta_N^{-1} N(A)]^{-1}\|_\infty. \tag{5.12}$$

Поскольку класс $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ замкнут относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы, мы имеем

$$\Delta_N^{-1} N(A) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi),$$

и правую часть (5.12) можно оценить сверху с помощью (2.25). Тем самым оценка (5.10) установлена.

Утверждение (ii) доказывается аналогично. $\square$

Заметим, что в случае тривиального разбиения $\pi = \{\langle n\rangle\}$ оценки (5.10) и (5.11) для N и QN матриц соответственно сводятся к известным оценкам (2.19) и (2.24). Если же $\pi = \{S, \bar{S}\}$ для некоторого непустого собственного подмножества S множества $\langle n\rangle$, то оценка (5.10) для SN матриц A сводится к (2.22), тогда как (5.11) дает новую оценку для SQN матриц A.

§6. Блочные P$\mathcal{H}$N(π)- и P$\mathcal{H}$QN(π)-матрицы

Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant N \leqslant n$, – блочная матрица с невырожденной блочно диагональной частью

$$\mathrm{Diag}\,(A_{11}, \ldots, A_{NN}).$$

Следуя работе [19] (но используя иные обозначения), см. также [9], определим $N \times N$ блочную Z-матрицу сравнения

$$\mathcal{M}_R(A) \equiv \mathrm{diag}\,(\|A_{11}^{-1}\|_\infty^{-1}, \ldots, \|A_{NN}^{-1}\|_\infty^{-1}) \cdot R(A), \tag{6.1}$$

где

$$R(A) \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\|A_{11}^{-1}A_{12}\|_\infty & \ldots & -\|A_{11}^{-1}A_{1N}\|_\infty \\ -\|A_{22}^{-1}A_{21}\|_\infty & 1 & \ldots & -\|A_{22}^{-1}A_{2N}\|_\infty \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\|A_{NN}^{-1}A_{N1}\|_\infty & -\|A_{NN}^{-1}A_{N2}\|_\infty & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

В этих обозначениях матрица A называется блочной $\mathcal{H}$-матрицей (относительно рассматриваемого блочного разбиения и нормы l_∞), или, короче, B$\mathcal{H}$-матрицей, если $\mathcal{M}_R(A)$ является $\mathcal{M}$-матрицей.

Аналогично, для заданного разбиения π множества

$$\langle N\rangle = \{1, \ldots, N\},$$

будем говорить, что A является

• блочной P$\mathcal{H}(\pi)$- (или BP$\mathcal{H}(\pi)$-) матрицей, если $\mathcal{M}_R(A)$ является P$\mathcal{H}(\pi)$-матрицей;

• блочной P$\mathcal{H}$N(π)- (или BP$\mathcal{H}$N(π)-) матрицей, если $\mathcal{M}_R(A)$ является P$\mathcal{H}$N(π)-матрицей;

• блочной P$\mathcal{H}$QN(π)- (или B$P\mathcal{H}$QN(π)-) матрицей, если $\mathcal{M}_R(A)$ является P$\mathcal{H}$QN(π)-матрицей.

Поскольку (см. (3.6) и (4.4))

$$\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi) \subseteq \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) \subseteq \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi) \subseteq \mathcal{H},$$

то из приведенных выше определений немедленно получаем цепочку включений

$$\mathrm{BP}\mathcal{H}(\pi) \subseteq \mathrm{BP}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi) \subseteq \mathrm{BP}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi) \subseteq \mathrm{B}\mathcal{H}. \tag{6.3}$$

Как легко следует из результата работы [19] (подробное изложение см. в [9]), для $\mathrm{B}\mathcal{H}$-матрицы A мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}_R(A)^{-1}\|_\infty. \tag{6.4}$$

Неравенство (6.4) дает возможность оценить сверху $\|A^{-1}\|_\infty$ для блочных $\mathcal{H}$-матриц A таких, что $\mathcal{M}_R(A)$ принадлежит некоторому подклассу класса $\mathcal{H}$, для матриц из которого известна верхняя оценка обратных в норме l_∞.

Для $\mathrm{B}P\mathcal{H}(\pi)$-матрицы $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N$ в работе [9] была получена следующая оценка.

Теорема 6.1. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant N \leqslant n$, является $\mathrm{BP}\mathcal{H}(\pi)$-матрицей, т.е. $\mathcal{M}_R(A) \in \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$ для некоторого разбиения $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$, $1 \leqslant m \leqslant N$, множества $\langle N\rangle$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1,\dots,i_m} \left\{ \left\| \left[\mathcal{M}_R(A)^{(i_1,\dots,i_m)} \right]^{-1} \right\|_\infty \right\}, \tag{6.5}$$

где максимум берется по всем $i_k \in P_k$, $k = 1, \dots, m$.

Аналогичным образом, комбинируя неравенство (6.4) с оценками (5.10) и (5.11), для $\mathrm{BP}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$- и $\mathrm{BP}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$-матриц мы получаем следующий результат.

Теорема 6.2. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant N \leqslant n$, пусть $\mathcal{M}_R(A) = D - L - U$ – стандартное расщепление блочной матрицы сравнения $\mathcal{M}_R(A)$ и пусть $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$, $1 \leqslant m \leqslant N$, – некоторое разбиение множества $\langle N\rangle$.*
(i) *Если $A \in \mathrm{BP}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$, то*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1,\dots,i_m} \left\{ \left\| \left[(\Delta_N^{-1} N(\mathcal{M}_R(A)))^{(i_1,\dots,i_m)} \right]^{-1} \right\|_\infty \right\}, \tag{6.6}$$

где максимум берется по всем $i_k \in P_k$, $k = 1, \dots, m$, диагональная матрица Δ_N определяется равенством

$$\Delta_N e = D(D-L)^{-1} e$$

и

$$N(\mathcal{M}_R(A)) = D(D-L)^{-1}\mathcal{M}_R(A).$$

(ii) *Если* $A \in \mathrm{BP}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$, *то*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1,\dots,i_m} \left\{ \left\| \left[(\Delta_Q^{-1} Q(\mathcal{M}_R(A)))^{(i_1,\dots,i_m)} \right]^{-1} \right\|_\infty \right\}, \tag{6.7}$$

где максимум берется по всем $i_k \in P_k$, $k = 1, \dots, m$, *диагональная матрица* Δ_Q *определяется равенством*

$$\Delta_Q e = (D-U)^{-1} D (D-L)^{-1} e$$

и

$$Q(\mathcal{M}_R(A)) = (D-U)^{-1} D (D-L)^{-1} \mathcal{M}_R(A).$$

§7. Общий подход к определению подклассов класса $\mathcal{H}$-матриц

В этом параграфе мы описываем общий подход к построению подклассов класса $\mathcal{H}$ на основе заданного подкласса $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ и некоторого разбиения π индексного множества $\langle n \rangle$.

Определим класс $\mathcal{K}^\pi$ следующим образом:

$$\mathcal{K}^\pi \equiv \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ A\Delta \in \mathcal{K} \ \text{ для некоторой матрицы } \ \Delta \in D^\pi\}, \tag{7.1}$$

где множество D^π было определено в §1.

Из определения (7.1) легко можно вывести целый ряд приятных общих свойств класса $\mathcal{K}^\pi$. Так мы имеем:

• для произвольного разбиения π множества $\langle n \rangle$ справедливы включения

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}^\pi \subseteq \mathcal{H}; \tag{7.2}$$

• если разбиение π_2 получается измельчением разбиения π_1, то

$$\mathcal{K}^{\pi_1} \subseteq \mathcal{K}^{\pi_2}; \tag{7.3}$$

• класс $\mathcal{K}^\pi$ замкнут относительно правого умножения на диагональные матрицы из D^π;

• если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно умножения на положительные константы и $\pi = \{\langle n \rangle\}$ – тривиальное разбиение, то

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^\pi.$$

В тех частных случаях, когда $\mathcal{K} = \mathrm{SDD}$, N и QN, в силу теорем 1.1, 3.1 и 4.1, мы имеем

$$\mathrm{SDD}^\pi = \mathrm{P}\mathcal{H}(\pi),$$
$$\mathrm{N}^\pi = \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$$

и

$$\mathrm{QN}^{\pi} = \mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi).$$

Таким образом, представленная выше конструкция позволяет получить, в частности, все классы $\mathrm{P}\mathcal{H}(\pi)$, $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{N}(\pi)$ и $\mathrm{P}\mathcal{H}\mathrm{QN}(\pi)$.

К сожалению, один лишь факт существования матрицы $\Delta \in D^{\pi}$ такой, что $B = A\Delta \in \mathcal{K}$, т.е. тот факт, что $A \in \mathcal{K}^{\pi}$, еще не позволяет получить верхнюю оценку для

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \|\Delta B^{-1}\|_{\infty}, \quad \text{где} \quad B \in \mathcal{K}.$$

Однако, если матрица $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ известна, то оценку $\|B^{-1}\|_{\infty}$ для $B = A\Delta \in \mathcal{K}$ легко можно трансформировать в оценку $\|A^{-1}\|_{\infty}$. Например, в том простейшем случае, когда $\mathcal{K} = \mathrm{SDD}$, мы, очевидно, имеем

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\delta_i}{(\mathcal{M}(B)e)_i} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\delta_i}{|a_{ii}|\delta_i - \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|\delta_j}.$$

Заметим, наконец, что если

$$\mathrm{SDD} \subseteq \mathcal{K} \subset \mathcal{H},$$

то для точечного разбиения $\pi = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ мы имеем $\mathcal{K}^{\pi} = \mathcal{H}$ (поскольку $\mathrm{SDD}^{\pi} = \mathcal{H}$), так что класс $\mathcal{K}^{\pi}$ является промежуточным между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{H}$, т.е. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}^{\pi} \subseteq \mathcal{H}$, и порядок m разбиения π, $1 \leqslant m \leqslant n$, можно трактовать как некоторую меру близости класса $\mathcal{K}^{\pi}$ либо к $\mathcal{K}$ при малых m, либо ко всему классу $\mathcal{H}$, если m достаточно близко к n.

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Псевдоблочные условия диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 94–131.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
3. Л. Ю. Колотилина, *Об улучшении оценок Чистякова для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 103–118.
4. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных для PM- и PH-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 75–109.
5. Л. Ю. Колотилина, *Характеризация PM- и PH-матриц в терминах диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 110–120.
6. Л. Ю. Колотилина, *Оценки бесконечной нормы обратных к матрицам Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 111–120.

7. Л. Ю. Колотилина, *Некоторые характеризации некрасовских и S-некрасовских матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 152–165.
8. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных для обобщенных матриц Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 182–195.
9. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных в норме l_∞ для некоторых блочных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 145–158.
10. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Indust. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.
11. L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, Y.-T. Li, *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **219** (2013), 5020–5024.
12. L. Cvetković, V. Kostić, K. Doroslovački, *Max-norm bounds for the inverse of S-Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **218** (2012), 9498–9503.
13. L. Cvetković, V. Kostić, S. Rauški, *A new subclass of H-matrices.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 206–210.
14. L. Cvetković, V. Kostić, R. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area.* — ETNA **18** (2004), 73–80.
15. Y.-M. Gao, X.-H. Wang, *Criteria for generalized diagonally dominant and M-matrices.* — Linear Algebra Appl. **169** (1992), 257–268.
16. L. Yu. Kolotilina, *Bounds for the infinity norm of the inverse for certain M- and H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 692–702.
17. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and $\mathcal{S}-SDD$ matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.
18. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
19. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative classiques par blocs.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
20. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
21. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer, 2004.

Kolotilina L. Yu. New subclasses of the class of $\mathcal{H}$-matrices and related bounds for the inverses.

The paper introduces new subclasses, called P$\mathcal{H}$N(π) and P$\mathcal{H}$QN(π), of (nonsingular) $\mathcal{H}$-matrices of order n dependent on a partition π of the index set $\{1,\dots,n\}$, which generalize the classes P$\mathcal{H}(\pi)$, introduced previously, and contain, in particular, such subclasses as those of strictly diagonally dominant (SDD), Nekrasov, S-SDD, S-Nekrasov, QN, and P$\mathcal{H}(\pi)$ matrices. Properties of the matrices introduced are studied, and upper bounds on their inverses in l_∞ norm are obtained. Block generalizations of the classes P$\mathcal{H}$N(π) and P$\mathcal{H}$Q$N(\pi)$ in the sense of Robert are considered.

Also a general approach to defining subclasses $\mathcal{K}^\pi$ of the class $\mathcal{H}$ containing a given subclass $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ and dependent on a partition π is presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 30 сентября 2016 г.