Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

Х. Д. Икрамов

КОНГРУЭНТНЫЙ ЦЕНТРАЛИЗАТОР МАТРИЦЫ СЕРГЕЙЧУКА–ХОРНА

§1. Введение

Пусть A – комплексная $n \times n$-матрица. Мы называем множество матриц X таких, что

$$X^*AX = A, \tag{1}$$

конгруэнтным централизатором матрицы A и обозначаем это множество символом $\mathcal{C}_A^*$. Оно представляет собой аналог классического централизатора в том случае, когда группа $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ действует на матричном пространстве $M_n(\mathbf{C})$ конгруэнциями вместо подобий. В дальнейшем термин "конгруэнция" всегда означает "*-конгруэнция", т.е. матричное преобразование вида $A \to X^*AX$ с невырожденной матрицей X.

Классический централизатор $\mathcal{C}_A$ определяется посредством линейного матричного уравнения, решения которого для всякой заданной матрицы A хорошо известны. Совсем иная ситуация с конгруэнтным централизатором. Задача описания множества $\mathcal{C}_A^*$ эквивалентна отысканию всех решений системы из n^2 квадратичных уравнений относительно элементов неизвестной матрицы X. Неудивительно, что такое описание имеется лишь для нескольких простых матриц, таких как $A = I_n$ (в этом случае $\mathcal{C}_A^*$ есть группа U_n унитарных матриц порядка n), $A = I_p \oplus (-I_q)$ (группа псевдоунитарных матриц типа (p,q)) или

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$$

(симплектическая группа порядка $n = 2m$). Эти описания могут быть распространены на матрицы, конгруэнтные названным, чем, по-видимому, исчерпывается список матриц с известными конгруэнтными централизаторами.

Ключевые слова: централизатор, конгруэнтный централизатор, теплицева матрица, перъединичная матрица.

Цель этой публикации – исследовать множество $\mathcal{C}_\Delta^*$ для матрицы

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \dots & i \\ & 1 & \dots & \\ 1 & i & & \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Причина, по которой выбрана эта матрица, такова. Каноническая форма произвольной комплексной матрицы по отношению к конгруэнциям представляет собой прямую сумму блоков всего лишь трех различных типов (см. [1, § 4.5]). Матрица (2) есть в точности блок одного из этих типов. В теореме 2 (см. §6) мы показываем, что, с точностью до диагональных сомножителей специального вида, все матрицы из $\mathcal{C}_\Delta^*$ являются верхнетреугольными и теплицевыми.

§2. Теплицево разложение

Напомним, что теплицевым разложением квадратной комплексной матрицы A называется ее представление в виде

$$A = B + iC,$$

где

$$B = B^* = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad C = C^* = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Матрицы B и C часто называют вещественной и мнимой частями матрицы A.

Вещественной частью матрицы Δ_n является перъединичная матрица

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \dots & \dots & \\ 1 & & & \end{pmatrix},$$

а мнимой частью – матрица

$$\mathcal{Q}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Пусть X – произвольная матрица из $\mathcal{C}_\Delta^*$. Из равенства

$$\Delta_n = \mathcal{P}_n + i\mathcal{Q}_n$$

вытекает, что

$$X^*\Delta_n X = X^*\mathcal{P}_n X + iX^*\mathcal{Q}_n X.$$

Слагаемые правой части – это эрмитова матрица $X^*\mathcal{P}_n X$ и косоэрмитова матрица $iX^*\mathcal{Q}_n X$. Поскольку теплицево разложение определено единственным образом, из равенства $X^*\Delta_n X = \Delta_n$ выводим соотношения

$$X^*\mathcal{P}_n X = \mathcal{P}_n \tag{3}$$

и

$$X^*\mathcal{Q}_n X = \mathcal{Q}_n. \tag{4}$$

Таким образом, $\mathcal{C}^*_\Delta$ есть пересечение конгруэнтных централизаторов матриц $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{Q}_n$.

§3. Верхнетреугольная форма

В этом параграфе мы покажем, что все матрицы из $\mathcal{C}^*_\Delta$ имеют верхнетреугольную форму.

Заметим, прежде всего, что из невырожденности матрицы Δ_n вытекает, что все матрицы в $\mathcal{C}^*_\Delta$ также невырожденны.

Лемма 1. *Вектор $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ является собственным для всякой матрицы $X \in \mathcal{C}^*_\Delta$.*

Доказательство. Перепишем (4) в виде

$$X^*\mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_n X^{-1},$$

а затем умножим обе части слева на вектор-строку e_1^T. Это дает

$$e_1^T X^*\mathcal{Q}_n = 0,$$

или

$$\mathcal{Q}_n(Xe_1) = 0.$$

Тем самым вектор $x_1 = Xe_1$ (т.е. первый столбец матрицы X) принадлежит одномерному ядру матрицы $\mathcal{Q}_n$. Отсюда следует, что $x_1 = \lambda_1 e_1$ для некоторого ненулевого числа $\lambda_1 \in \mathbf{C}$. □

Лемма 2. *Вектор $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$ является левым собственным вектором для всякой матрицы $X \in \mathcal{C}^*_\Delta$.*

Доказательство. Перепишем (3) в виде

$$\mathcal{P}_n X = X^{-*}\mathcal{P}_n.$$

Умножая обе части на вектор e_1 и используя лемму 1, получаем

$$\mathcal{P}_n X e_1 = \mathcal{P}_n x_1 = \lambda_1 \mathcal{P}_n e_1 = \lambda_1 e_n,$$
$$X^{-*}\mathcal{P}_n e_1 = X^{-*} e_n,$$

откуда выводим

$$X^* e_n = \frac{1}{\overline{\lambda_1}} e_n.$$

Это равенство доказывает лемму. Заодно оно показывает, что векторам e_1 и e_n^T соответствуют собственные значения λ_1 и $1/\overline{\lambda_1}$ матрицы X. □

Леммы 1 и 2 позволяют нам представить X как блочную матрицу

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & y^T & \beta \\ 0 & X_{n-2} & z \\ 0 & 0 & \overline{\lambda_1}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь y и z – это векторы-столбцы размерности $n-2$, а X_{n-2} – подматрица порядка $n-2$.

Лемма 3. *Подматрица X_{n-2} принадлежит конгруэнтному централизатору матрицы $\mathcal{P}_{n-2}$.*

Доказательство. Блочное разбиение матрицы $\mathcal{P}_n$, аналогичное разбиению (5), выглядит так:

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathcal{P}_{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая центральные блоки в равенстве (3), получаем

$$X_{n-2}^* \mathcal{P}_{n-2} X_{n-2} = \mathcal{P}_{n-2},$$

что доказывает лемму. □

Лемма 4. *Подматрица X_{n-2} принадлежит конгруэнтному централизатору матрицы $\mathcal{Q}_{n-2}$.*

Доказательство. Блочное разбиение матрицы $\mathcal{Q}_n$, аналогичное разбиению (5), выглядит так:

$$\mathcal{Q}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{n-2} & e_1 \\ 0 & e_1^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь e_1 – это первый координатный вектор размерности $n-2$.

Подставляя (5) и (6) в равенство (4), приходим к соотношению

$$X_{n-2}^* \mathcal{Q}_{n-2} X_{n-2} = \mathcal{Q}_{n-2},$$

доказывающему лемму. □

Следствие 1. *Подматрица X_{n-2} принадлежит конгруэнтному централизатору матрицы Δ_{n-2}.*

Применение лемм 1 и 2 к матрице X_{n-2} приводит к такому заключению.

Следствие 2. *Все поддиагональные элементы во втором столбце матрицы (5) равны нулю. Это же верно в отношении внедиагональных элементов строки $n-1$, расположенных левее главной диагонали. Если обозначить через λ_2 диагональный элемент x_{22}, то элемент $x_{n-1,n-1}$ равен $1/\overline{\lambda_2}$.*

Это же рассуждение может быть применено к центральной подматрице X_{n-4}, затем к подматрице X_{n-6}, и т.д. В конечном счете, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Все матрицы из $\mathcal{C}_\Delta^*$ являются верхнетреугольными. При этом диагональные элементы матрицы $X \in \mathcal{C}_\Delta^*$ подчиняются соотношениям*

$$\overline{x_{ii}} x_{n+1-i,n+1-i} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, [n/2]. \tag{7}$$

§4. Главная диагональ матрицы X

Теперь мы воспользуемся блочным разбиением матрицы $X \in \mathcal{C}_\Delta^*$, отличным от (5), а именно,

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \hat{y}^T \\ 0 & \widehat{X}_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Здесь $\widehat{X}_{n-1}$ – подматрица порядка $n-1$.

Подставим (8) в соотношение (4), заменим $\mathcal{Q}_n$ аналогичным блочным представлением и приравняем блоки, стоящие в позиции (2,2), что дает

$$\widehat{X}^*_{n-1}\mathcal{P}_{n-1}\widehat{X}_{n-1} = \mathcal{P}_{n-1}. \tag{9}$$

Таким образом, в дополнение к леммам 3 и 4 имеем следующее предложение.

Лемма 5. *Подматрица $\widehat{X}_{n-1}$ принадлежит конгруэнтному централизатору матрицы $\mathcal{P}_{n-1}$.*

Поскольку подматрица $\widehat{X}_{n-1}$ треугольная, координатный вектор e_1^{n-1} размерности $n-1$ является для нее собственным вектором, отвечающим собственному значению $x_{22} = \lambda_2$. Используя этот факт, равенство (9) и такие же рассуждения, как в доказательстве леммы 2, заключаем, что e_{n-1}^{n-1} есть левый собственный вектор матрицы $\widehat{X}_{n-1}$, соответствующий собственному значению $1/\overline{\lambda_2}$. В сочетании с соотношением (7) при $i = 1$ это означает, что

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Те же соображения, применяемые к X_{n-2} (напомним, что эта подматрица принадлежит конгруэнтному централизатору матрицы Δ_{n-2}), приводят к равенству

$$\lambda_2 = \lambda_3.$$

Спускаясь таким образом по размерностям центральных подматриц, мы в конечном счете получим равенства

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k, \quad k = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Из них, в свою очередь, вытекают равенства

$$\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{\overline{\lambda_1}}.$$

В частности, диагональная матрица $D \in \mathcal{C}^*_\Delta$ полностью определяется своим первым диагональным элементом λ_1. Поскольку $\mathcal{C}^*_\Delta$ – мультипликативная группа, любую матрицу $X \in \mathcal{C}^*_\Delta$ можно превратить в унитреугольную умножением на подходящую диагональную матрицу $D \in \mathcal{C}^*_\Delta$. Учитывая это обстоятельство, будем в дальнейшем считать, что

$$x_{11} = \cdots = x_{nn} = 1.$$

§5. Матрицы малого порядка

Чтобы понять структуру недиагональных матриц из $\mathcal{C}^*_\Delta$, найдем явную форму таких матриц для малых порядков n.

$\mathbf{n} = \mathbf{2}.$ Будем искать X в виде

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из равенства $X^*\mathcal{P}_2 X = \mathcal{P}_2$ выводим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha + \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, α – чисто мнимое число. Что касается равенства $X^*\mathcal{Q}_2 X = \mathcal{Q}_2$, то оно выполнено для всех α. Таким образом, недиагональные матрицы $X \in \mathcal{C}^*_\Delta$ описываются формулой

$$X = \begin{pmatrix} 1 & ia \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

$\mathbf{n} = \mathbf{3}.$ Согласно лемме 5, нижняя угловая 2×2-подматрица искомой матрицы X должна совпадать с матрицей (10). Поэтому будем искать X в виде

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & ia \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Записывая равенство $X^*\mathcal{P}_3 X = \mathcal{P}_3$, имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \overline{\alpha_1} + ia \\ 1 & \alpha_1 - ia & \alpha_2 + \overline{\alpha_2} + a^2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}_3,$$

откуда следует, что

$$\alpha_1 = ia, \qquad \mathrm{Re}\ \alpha_2 = -\frac{a^2}{2},$$

то есть

$$\alpha_2 = -\frac{a^2}{2} + ib, \quad b \in \mathbf{R}.$$

Заметим, что сделанный нами выбор нижней угловой подматрицы позволяет избежать проверки условия $X^*\mathcal{Q}_3 X = \mathcal{Q}_3$. В самом деле, первый столбец и первая строка в произведении, стоящем в левой части, нулевые, а нижняя угловая подматрица в этом произведении равна $X_2^*\mathcal{P}_2 X_2$. Здесь X_2 – нижняя угловая подматрица матрицы X. По лемме 5, имеем $X_2^* \mathcal{P}_2 X_2 = \mathcal{P}_2$. Следовательно, матрица $X^* \mathcal{Q}_3 X$ совпадает с $\mathcal{Q}_3$.

(Аналогичные соображения относительно нижней угловой подматрицы порядка $n-1$ справедливы для $n > 3$.)

Мы заключаем, что 3×3-матрицы из $\mathcal{C}_\Delta^*$, имеющие единичную диагональ, даются формулой

$$X = \begin{pmatrix} 1 & ia & -\frac{a^2}{2} + ib \\ 0 & 1 & ia \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}. \tag{12}$$

$\mathbf{n = 4.}$ Вследствие леммы 5 и формулы (12), мы можем искать X в виде

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & ia & -\frac{a^2}{2} + ib \\ 0 & 0 & 1 & ia \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Равенство $X^* \mathcal{P}_4 X = \mathcal{P}_4$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \overline{\alpha_1} + ia \\ 0 & 1 & 0 & \overline{\alpha_2} + \frac{a^2}{2} + ib \\ 1 & \alpha_1 - ia & \alpha_2 + \frac{a^2}{2} - ib & \alpha_3 + \overline{\alpha_3} + 2ab \end{pmatrix} = \mathcal{P}_4.$$

Отсюда находим

$$\alpha_1 = ia, \quad \alpha_2 = -\frac{a^2}{2} + ib, \quad \operatorname{Re} \alpha_3 = -ab,$$

то есть

$$\alpha_3 = -ab + ic, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Итак, 4×4-матрицы $X \in \mathcal{C}_\Delta^*$ с единичной диагональю – это матрицы вида

$$X = \begin{pmatrix} 1 & ia & -\frac{a^2}{2} + ib & -ab + ic \\ 0 & 1 & ia & -\frac{a^2}{2} + ib \\ 0 & 0 & 1 & ia \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbf{R}. \tag{13}$$

§6. Главный результат

Формулы (10), (12) и (13) показывают, что матрицы X порядков 2, 3 и 4 являются теплицевыми. С ростом порядка n значение ia, найденное из матрицы (10), передается вверх вдоль первой наддиагонали, а значение $-a^2/2+ib$, определяемое матрицей (12), распространяется вдоль второй наддиагонали. Мы покажем, что это описание верно для матриц $X \in \mathcal{C}_\Delta^*$ всех порядков n.

Теорема 2. *Все матрицы $X \in \mathcal{C}_\Delta^*$ с единичной диагональю являются теплицевыми.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по порядку матрицы X. Базис индукции дают результаты предыдущего раздела. Предположим, что $n > 4$ и утверждение теоремы верно для всех порядков, меньших чем n.

Запишем матрицу $X \in \mathcal{C}_\Delta^*$ в виде

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ & 1 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-3} & t_{n-2} \\ & & 1 & t_1 & \dots & t_{n-4} & t_{n-3} \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 1 & t_1 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

По индуктивному предположению, нижняя угловая подматрица X_{n-1} является теплицевой. Ее элементы рассматриваются как известные числа, определяемые угловыми подматрицами меньших порядков. В частности, для некоторых вещественных чисел $a, b, c, \dots$ имеем

$$t_1 = ia, \quad t_2 = -\frac{a^2}{2} + ib, \quad t_3 = -ab + ic, \quad \dots.$$

Напротив, числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ в первой строке матрицы X пока не известны. Найдем эти числа, приравнивая элементы последней строки в матричном соотношении $X^*\mathcal{P}_nX = \mathcal{P}_n$. Для позиций $(n,2), (n,3)$ и $(n,4)$ получаем

$$\begin{aligned} &\overline{t_1} + \alpha_1 = 0, \\ &\overline{t_2} + |t_1|^2 + \alpha_2 = 0, \\ &\overline{t_3} + \overline{t_2}t_1 + \overline{t_1}t_2 + \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = -\overline{t_1} = ia = t_1,$$

$$\alpha_2 = -\overline{t_2} - |t_1|^2 = \frac{a^2}{2} + ib - a^2 = -\frac{a^2}{2} + ib = t_2,$$

$$\alpha_3 = -\overline{t_3} - 2\mathrm{Re}(t_1\overline{t_2}) = ab + ic - 2\mathrm{Re}\Big(ab - i\frac{a^3}{2}\Big) = -ab + ic = t_3.$$

Продолжая таким образом, мы в результате придем к равенствам

$$\alpha_i = t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Наконец, приравнивая элементы в диагональной позиции (n, n), найдем возможные значения параметра α_{n-1}. Этим доказательство теоремы заканчивается. $\square$

Литература

1. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis. Second edition.* — Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

Ikramov Kh. D. The congruence centralizer of the Sergeichuk–Horn matrix.

Let A be a complex $n \times n$ matrix. We call the set of matrices X such that $X^*AX = A$ the congruence centralizer of A. This is an analog of the classical centralizer of A in the case where the group $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ acts on the matrix space $M_n(\mathbf{C})$ by congruence rather than similarity.

We find the congruence centralizer of the matrix

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdots & i \\ & 1 & \cdots & \\ 1 & i & & \end{pmatrix}.$$

This matrix represents one of the three types of building blocks for the canonical form of square complex matrices with respect to congruences found by R. Horn and V. Sergeichuk.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 31 марта 2016 г.