Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

Х. Д. Икрамов

КОНГРУЭНТНЫЙ ЦЕНТРАЛИЗАТОР БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

1. Пусть A – комплексная $n \times n$-матрица блочно-диагонального вида

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь B и C – квадратные подматрицы порядков соответственно k и l $(k+l=n)$. Предположим, что эти подматрицы не имеют общих собственных значений, и пусть X – произвольная матрица, коммутирующая с A (иначе говоря, $X \in \mathcal{C}_A$, централизатору матрицы A). Представим X в блочном виде, согласованном с (1):

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Приравнивая в соотношении

$$AX = XA \tag{3}$$

блоки, стоящие в позиции (1,2), получаем

$$BX_{12} - X_{12}C = 0.$$

Поскольку спектры матриц B и C не пересекаются, то, как известно, это однородное матричное уравнение Сильвестра имеет только нулевое решение $X_{12} = 0$. Аналогичным образом можем показать, что $X_{21} = 0$. Тем самым условие непересечения спектров обеспечивает, что всякая матрица X из централизатора $\mathcal{C}_A$ имеет тот же блочно-диагональный вид, что и сама матрица A.

В настоящей статье обсуждается вопрос, есть ли у этого факта аналог, если вместо стандартного централизатора матрицы (1) рассматривать ее *конгруэнтный централизатор* $\mathcal{C}_A^*$, т.е. множество матриц X таких, что

$$X^*AX = A. \tag{4}$$

В отличие от линейного уравнения (3), соотношение (4) есть квадратичное условие на решение X. Соответственно задача о блочной

Ключевые слова: централизатор, конгруэнтный централизатор, коквадрат, матричный пучок, каноническая форма относительно конгруэнций.

диагональности значительно усложняется, и мы даем лишь частичное ее решение. В разделе 2 указаны условия на подматрицы B и C, при выполнении которых всякая матрица $X \in \mathcal{C}_A^*$, *обладающая невырожденными блоками в представлении* (2), имеет тот же блочно-диагональный вид, что и A. В разделе 3 аналогичное исследование проведено в отношении матрицы A блочно-антидиагонального вида.

2. Невырожденность матрицы A автоматически влечет за собой невырожденность матрицы X в (4). Условимся, что и в случае вырожденной матрицы A будут рассматриваться *только невырожденные решения* этого уравнения.

Используя представления (1) и (2), заменим (4) системой блочных уравнений

$$X_{11}^* B X_{11} + X_{21}^* C X_{21} = B, \tag{5.1}$$

$$X_{11}^* B X_{12} + X_{21}^* C X_{22} = 0, \tag{5.2}$$

$$X_{12}^* B X_{11} + X_{22}^* C X_{21} = 0, \tag{5.3}$$

$$X_{12}^* B X_{12} + X_{22}^* C X_{22} = C. \tag{5.4}$$

Заметим, что в случае эрмитовой матрицы A соотношения (5.2) и (5.3) получаются друг из друга посредством матричной операции сопряжения. Именно в этом случае мы не можем рассчитывать на блочно-диагональный вид матрицы X. Вот простой пример: положим

$$B = \operatorname{diag}\,(1, 8), \qquad C = \operatorname{diag}\,(2, 1).$$

Можно проверить, что в этом случае одним из решений уравнения (4) является матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видим, она не является блочно-диагональной при разбиении на 2×2 блоки.

Учитывая это наблюдение, мы в дальнейшем считаем матрицу A неэрмитовой. В таком случае хотя бы одна из подматриц B и C в (1) неэрмитова, и соотношения (5.2) и (5.3) не эквивалентны.

Лемма 1. *Пусть подматрица C невырожденна. Тогда, если подматрица X_{11} вырождена, то вырождена и подматрица X_{22}.*

Доказательство. Пусть z – ненулевой вектор из ядра подматрицы X_{11}. Умножая соотношение (5.3) на z, имеем $X_{22}^* C X_{21} z = 0$. Равенство $X_{21} z = 0$ невозможно: оно означало бы, что z принадлежит ядру матрицы

$$\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix},$$

т.е. первые k столбцов матрицы X линейно зависимы. Следовательно, X – вырожденная матрица, что противоречит предположению, сделанному в начале этого раздела. □

Итак, $X_{21} z \neq 0$ и $C X_{21} z \neq 0$, поскольку матрица C невырожденна. Тем самым ненулевой вектор $C X_{21} z$ лежит в ядре матрицы X_{22}^*, а потому $\ker X_{22} \neq \{0\}$.

Аналогично доказывается

Лемма 2. *Пусть подматрица B невырожденна. Тогда из вырожденности подматрицы X_{22} вытекает вырожденность X_{11}.*

Если $k = l = n/2$, то все четыре блока в представлении (2) квадратные. В этом случае верны следующие два утверждения.

Лемма 3. *Пусть подматрица B невырожденна. Тогда из вырожденности подматрицы X_{21} вытекает вырожденность X_{12}.*

Лемма 4. *Пусть подматрица C невырожденна. Если вырождена подматрица X_{12}, то вырождена и X_{21}.*

Единственное существенное изменение в доказательствах по сравнению с первыми двумя леммами состоит в следующем: если z – вектор из соответствующего ядра, то уравнения (5.2) и (5.3) нужно умножать слева на вектор-строку z^*.

Следствие. *Если матрица A в (1) невырожденна, то в любой матрице $X \in \mathcal{C}_A^*$ подматрицы X_{11} и X_{22} одновременно вырождены или невырожденны. Если $k = l = n/2$, то аналогичное утверждение верно в отношении подматриц X_{12} и X_{21}.*

Пусть $k = l = n/2$. Могут ли оказаться вырожденными все четыре подматрицы X_{ij} $(i, j = 1, 2)$? Если не накладывать на B и C никаких ограничений, то это вполне возможно. Простейшую иллюстрацию дают единичная матрица $A = I_4$ и матрица-перестановка

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а также матрицы, приведенные в начале данного раздела. Возможен ли аналогичный пример в случае неэрмитовой матрицы A остается открытым вопросом. Напомним, что мы считаем A неэрмитовой матрицей. Для оставшейся части статьи добавим к этому предположение о невырожденности A.

Предположим, что в матрице $X \in \mathcal{C}_A^*$ подматрица X_{11} невырожденна. По лемме 2, невырожденна и подматрица X_{22}. Положим

$$Y = X_{12}X_{22}^{-1}, \qquad Z = X_{21}X_{11}^{-1} \tag{6}$$

и перепишем соотношения (5.2) и (5.3) в виде

$$BY + Z^*C = 0, \tag{7.1}$$

$$Y^*B + CZ = 0. \tag{7.2}$$

Из (7.2) выводим

$$Z = -C^{-1}Y^*B. \tag{8}$$

Подставляя это выражение в (7.1), получаем

$$BY - B^*YC^{-*}C = 0.$$

Пользуясь невырожденностью матрицы B, можем записать это соотношение как однородное уравнение Сильвестра

$$(B^{-*}B)Y - YC^{-*}C = 0.$$

Оно имеет лишь тривиальное решение $Y = 0$, если спектры матриц $B^{-*}B$ и $C^{-*}C$ не пересекаются. В этом случае, согласно (8), имеем $Z = 0$. В соответствии с (6), это означает, что $X_{12} = 0$ и $X_{21} = 0$, а, следовательно, матрица X блочно-диагональная. Уравнения (5.1) и (5.4) принимают вид

$$X_{11}^*BX_{11} = B, \qquad X_{22}^*CX_{22} = C,$$

т.е. подматрицы X_{11} и X_{22} принадлежат конгруэнтным централизаторам соответственно матриц B и C.

Заметим, что матрица $B^{-*}B$ называется *коквадратом* матрицы B (см. [1, §4.5]). Поэтому результат предыдущих рассуждений можно подытожить следующим образом.

Теорема 1. *Пусть A – невырожденная $n \times n$-матрица вида* (1), *и пусть коквадраты $B^{-*}B$ и $C^{-*}C$ не имеют общих собственных значений. Если X – матрица из конгруэнтного централизатора $\mathcal{C}_A^*$ и ее диагональные блоки X_{11} и X_{22} невырожденны, то X есть прямая сумма этих блоков. Сами эти блоки принадлежат конгруэнтным централизаторам соответственно матриц B и C.*

Замечание. Одна из подматриц B и C может быть эрмитовой матрицей. Коквадрат невырожденной эрмитовой матрицы есть единичная матрица соответствующего порядка. Если, например, эрмитовой является матрица B, то в условия теоремы 1 входит требование, чтобы коквадрат матрицы C не имел собственного значения 1.

Предположим, что $k = l = n/2$. Возможны ли в этом случае решения X уравнения (4) с невырожденными блоками X_{12} и X_{21}? Пусть X – такое решение. Рассуждая, как в теореме 1, можем показать, что $X_{11} = X_{22} = 0$. Уравнения (5.1) и (5.4) принимают вид

$$X_{21}^* C X_{21} = B, \qquad X_{12}^* B X_{12} = C.$$

Эти соотношения означают, что матрицы B и C конгруэнтны, а, значит, матрица A конгруэнтна прямой сумме двух одинаковых матриц половинного порядка. Только в этом случае возможны решения вида

$$\begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть A – матрица четного порядка $n = 2k$, имеющая вместо (1) блочно-антидиагональную форму

$$A = \begin{pmatrix} 0 & F \\ G & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где все четыре блока имеют порядок k. Что в этом случае можно сказать об устройстве матриц $X \in \mathcal{C}_A^*$?

Снова представляя матрицу X в виде (2), заменим (4) системой блочных уравнений

$$X_{21}^* G X_{11} + X_{11}^* F X_{21} = 0, \tag{10.1}$$

$$X_{21}^* G X_{12} + X_{11}^* F X_{22} = F, \tag{10.2}$$

$$X_{22}^* G X_{11} + X_{12}^* F X_{21} = G, \tag{10.3}$$
$$X_{22}^* G X_{12} + X_{12}^* F X_{22} = 0. \tag{10.4}$$

Заметим, что в исключенном нами случае эрмитовой матрицы A мы имели бы $G = F^*$, а уравнения (10.2) и (10.3) получались бы одно из другого посредством матричной операции сопряжения.

Сопоставим матрице (9) пучок

$$F - \lambda G^*. \tag{11}$$

По предположению, матрицы F и G невырожденны, поэтому пучок (11) регулярен.

Теорема 2. *Предположим, что спектр пучка* (11) *не содержит пар вида* $(\lambda, 1/\overline{\lambda})$. *Если в представлении* (2) *матрицы* $X \in \mathcal{C}_A^*$ *блок* X_{11} *невырожден, то:*

(i) *блоки* X_{12} *и* X_{21} *нулевые, т.е. матрица* X *блочно-диагональная;*

(ii) *блок* X_{22} *подобен матрице* X_{11}^{-*}, *и подобие между ними осуществляется матрицами* F *и* G^*.

Доказательство. Положив

$$Y = X_{21} X_{11}^{-1}, \tag{12}$$

перепишем (10.1) в виде

$$FY + Y^* G = 0. \tag{13}$$

Это уравнение типа Сильвестра, которое в условиях данной теоремы имеет только тривиальное решение $Y = 0$ (см. [2, Lemma 8]). В соответствии с (12), это означает, что $X_{21} = 0$. Поскольку матрица X невырожденна, то невырожденным должен быть и блок X_{22}. Полагая

$$Z = X_{12} X_{22}^{-1}, \tag{14}$$

можем переписать (10.4) в виде уравнения типа Сильвестра

$$GZ + Z^* F = 0. \tag{15}$$

Ассоциированный с этим уравнением пучок $G - \mu F^*$ имеет собственные значения, сопряженные с собственными значениями пучка (11). Следовательно, в его спектре также нет пар вида $(\mu, 1/\overline{\mu})$, а потому $Z = 0$ есть единственное решение уравнения (15). Отсюда следует, что $X_{12} = 0$, т.е. матрица X блочно-диагональная.

Неиспользованные пока уравнения (10.2) и (10.3) принимают теперь вид

$$X_{11}^* F X_{22} = F, \qquad X_{22}^* G X_{11} = G,$$

откуда выводим представления

$$X_{22} = F^{-1} X_{11}^{-*} F, \qquad X_{22} = G^{-*} X_{11}^{-*} G^*,$$

доказывающие утверждение (ii). □

Условия теоремы 2 выполнены, в частности, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ J_k(\mu) & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Здесь $J_k(\mu)$ – жорданова клетка порядка k для числа μ, модуль которого отличен от 1. Таким образом, всякая матрица $X \in \mathcal{C}_A^*$ с невырожденным блоком X_{11} является блочно-диагональной.

Матрица (16) интересна тем, что представляет один из трех типов блоков, прямая сумма которых образует каноническую форму произвольной квадратной матрицы относительно конгруэнций. В частности, конгруэнтному централизатору $\mathcal{C}_A^*$ принадлежит ее коквадрат

$$A^{-*} A = J_k(\mu) \oplus J_k(\mu)^{-*},$$

имеющий, как видим, блочно-диагональную форму.

Очевидно, что в условиях теоремы 2 блок X_{11} можно заменить на X_{22}. А что получится, если потребовать невырожденность блока X_{21}?

Замена $Y = X_{11} X_{21}^{-1}$ (ср. (12)) превращает (10.1) в однородное уравнение типа Сильвестра

$$GY + Y^* F = 0,$$

допускающее только нулевое решение. Отсюда следует $X_{11} = 0$, а тогда матрица X_{12} обязана быть невырожденной. Повторяя те же рассуждения для уравнения (10.4), получаем $X_{22} = 0$. Теперь уравнения (10.2) и (10.3) принимают вид

$$X_{21}^* G X_{12} = F, \qquad X_{12}^* F X_{21} = G.$$

Второе из этих уравнений дает

$$X_{21} = F^{-1} X_{12}^{-*} G.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение, имеем

$$G^* X_{12}^{-1} F^{-*} G X_{12} = F,$$

или

$$X_{12}^{-1} (F^{-*} G) X_{12} = G^{-*} F.$$

Итак, матрицы $M = F^{-*}G$ и $N = G^{-*}F$ подобны. Между тем,

$$M^{-*} = FG^{-*},$$

а матрицы FG^{-*} и $N = G^{-*}F$, как известно, имеют одинаковый спектр. Поэтому подобие M и N означает, что спектр этих матриц наряду с каждым собственным значением λ содержит и число $1/\overline{\lambda}$. Однако спектр матрицы N совпадает со спектром пучка (11), в котором, по условию теоремы, пар вида $(\lambda, 1/\overline{\lambda})$ не должно быть. Это противоречие доказывает, что в централизаторе $\mathcal{C}_A^*$ нет матриц с невырожденным блоком X_{21} (а также матриц с невырожденным блоком X_{12}).

Литература

1. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis. Second edition.* Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
2. D. Kressner, C. Schröder, D. S. Watkins, *Implicit QR algorithms for palindromic and even eigenvalue problems.* — Numer. Algorithms **51** (2009), 209–238.

Ikramov Kh. D. The congruence centralizer of a block diagonal matrix.

Let a complex matrix A be the direct sum of its square submatrices B and C that have no common eigenvalues. Then every matrix X belonging to the centralizer of A has the same block diagonal form as the matrix A itself. In this paper, we discuss how the conditions on the submatrices B and C should be modified to make valid an analogous statement about the congruence centralizer of A, which is the set of matrices X such that $X^*AX = A$. We also consider the question whether the matrices in the congruence centralizer are block diagonal if A is a block antidiagonal matrix.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 14 марта 2016 г.