Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

Х. Д. Икрамов

О КОНГРУЭНТНОМ ЦЕНТРАЛИЗАТОРЕ ЖОРДАНОВОЙ КЛЕТКИ

1. Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – алгебра комплексных $n \times n$-матриц и $A, B \in M_n(\mathbf{C})$. Обозначим через $\mathcal{M}_{AB}$ множество невырожденных матриц, преобразующих A в B подобием:

$$X^{-1}AX = B. \tag{1}$$

Структура этого множества такова. Фиксируем какую-нибудь матрицу $X_0 \in \mathcal{M}_{AB}$, и пусть Y – любая другая матрица из $\mathcal{M}_{AB}$:

$$Y^{-1}AY = B. \tag{2}$$

Полагая $Z = YX_0^{-1}$, выводим из (1), где X заменено на X_0, и (2) соотношение

$$Z^{-1}AZ = A,$$

или

$$AZ = ZA,$$

т.е. Z принадлежит централизатору $\mathcal{C}_A$ матрицы A. Итак, $\mathcal{M}_{AB}$ есть множество матриц вида

$$Y = ZX_0, \tag{3}$$

где Z – произвольная невырожденная матрица из $\mathcal{C}_A$.

Вместо отношений подобия (1) и (2) рассмотрим теперь отношения конгруэнтности

$$X^*AX = B \tag{4}$$

и

$$Y^*AY = B.$$

Как и выше, X и Y – невырожденные матрицы. По-прежнему фиксируя какую-либо матрицу X_0 в соотношении (4) и полагая $Z = YX_0^{-1}$, получаем

$$Z^*AZ = A.$$

Снова приходим к тому, что множество $\mathcal{N}_{AB}$ невырожденных матриц, преобразующих A в B конгруэнцией, описывается формулой (3),

Ключевые слова: конгруэнции, централизатор, жорданова клетка, собственный вектор.

где X_0 – фиксированная матрица, удовлетворяющая теперь соотношению (4), а Z – произвольная невырожденная матрица, для которой

$$Z^*AZ = A. \tag{5}$$

Множество решений этого уравнения будем называть конгруэнтным централизатором матрицы A и обозначать его символом C_A^*.

Устройство централизатора $\mathcal{C}_A$ хорошо известно и описывается во многих учебниках линейной алгебры (см., например, [1, §VIII.2]). Основными компонентами этого описания являются централизатор жордановой клетки и множество решений однородного матричного уравнения

$$J_1X - XJ_2 = 0,$$

где J_1 и J_2 – жордановы клетки, вообще говоря, различных порядков. Структура обоих множеств весьма проста: так, централизатор жордановой клетки порядка n есть множество всех многочленов от нее, иначе говоря, множество всех треугольных теплицевых матриц того же порядка.

Напротив, описание множества C_A^* не известно даже в простейшем случае жордановой клетки J (для определенности, правой) с нулем на главной диагонали. Цель данной статьи – сформулировать некоторые общие факты относительно строения матриц из C_J^* при любом n (см. раздел 2) и дать полное описание этих групп для малых порядков $n = 2, 3, 4, 5$ (раздел 3).

2. Пусть W – произвольная матрица из группы C_J^*, т.е.

$$W^*JW = J. \tag{6}$$

Перечислим вначале простейшие следствия из (6).

Предложение 1. $\overline{W} \in C_J^*$.

Предложение 2. $W, \overline{W} \in G_{J^T}^*$.

Доказательство. Транспонируя равенство (6), получаем

$$W^TJ^T\overline{W} = J^T, \tag{7}$$

т.е. включение $\overline{W} \in G_{J^T}^*$, после чего пользуемся предложением 1. $\square$

Символом $\mathcal{P}$ будем обозначать перъединичную матрицу

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

порядка n.

Предложение 3. $\mathcal{P}\overline{W}\mathcal{P} \in C_J^*$.

Доказательство. Из равенства (7) выводим

$$(\mathcal{P}W^T\mathcal{P})(\mathcal{P}J^T\mathcal{P})(\mathcal{P}\overline{W}\mathcal{P}) = \mathcal{P}J^T\mathcal{P}.$$

Заметим теперь, что $\mathcal{P}J^T\mathcal{P} = J$, откуда следует нужное утверждение. □

Замечание. Матрица $\mathcal{P}\overline{W}\mathcal{P}$ получается из W отражением относительно центра и поэлементным комплексным сопряжением.

Перейдем к менее очевидным фактам.

Лемма 1. *Всякая матрица $W \in C_J^*$, где $n > 1$, невырожденна.*

Доказательство. Из равенства (6) очевидно, что

$$\operatorname{rank} W \geqslant n - 1.$$

Если допустить, что $\det W = 0$, то ядро матрицы W одномерно. Пусть $Wx = 0,\ x \neq 0$. Тогда из (6) следует, что $Jx = 0$. Это возможно лишь если x коллинеарен первому координатному вектору e_1.

С другой стороны, умножая (6) слева на вектор-строку x^*, находим

$$x^*W^*JW = 0 = x^*J$$

и, следовательно, $J^Tx = 0$. Отсюда должно следовать, что x коллинеарен последнему координатному вектору e_n. Это невозможно при $n > 1$. □

Следствие. $W^{-1} \in C_J^*$. *Тем самым множество C_J^* является группой.*

Теорема 1. *Векторы e_1 и e_n являются (правыми) собственными векторами для любой матрицы $W \in C_J^*$.*

Доказательство. Из (6) выводим

$$W^*JWe_1 = Je_1 = 0.$$

Поскольку матрица W невырожденна, то $J(We_1) = 0$. Ненулевой вектор We_1 (первый столбец матрицы W) должен быть коллинеарен вектору e_1 из одномерного ядра клетки J:

$$We_1 = \alpha e_1. \tag{8}$$

Теперь умножим (6) слева на e_n^T:

$$e_n^T W^*JW = e_n^T J = 0,$$

или

$$W^T J^T \overline{W} e_n = 0,$$

откуда

$$J^T(\overline{W}e_n) = 0.$$

Рассуждая, как выше, приходим к равенству

$$\overline{W}e_n = \beta e_n, \qquad \beta \neq 0,$$

или

$$We_n = \overline{\beta} e_n. \tag{9}$$

□

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда векторы e_2 и e_{n-1} являются левыми собственными векторами для любой матрицы $W \in C_J^*$.*

Доказательство. Из (6) выводим

$$W^*JWe_n = Je_n = e_{n-1}.$$

Согласно (9), имеем

$$\overline{\beta} W^* Je_n = e_{n-1},$$

или

$$W^* e_{n-1} = \overline{\beta}^{-1} e_{n-1}. \tag{10}$$

Таким образом, e_{n-1} есть собственный вектор матрицы W^*, т.е. левый собственный вектор матрицы W.

Согласно предложению 2, можем написать

$$W^* J^T W = J^T, \tag{11}$$

откуда

$$W^* J^T W e_1 = J^T e_1 = e_2,$$

или

$$W^* e_2 = \alpha^{-1} e_2, \tag{12}$$

т.е. e_2 – левый собственный вектор матрицы W. $\square$

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 5$. Тогда для любой матрицы $W \in C_J^*$ вектор We_3 (третий столбец матрицы W) есть линейная комбинация векторов e_1 и e_3, а вектор We_{n-2} – линейная комбинация векторов e_{n-2} и e_n.*

Доказательство. Заметим, что все решения уравнения

$$Jz = e_2$$

описываются формулой

$$z = e_3 + \gamma e_1,$$

где γ – произвольное комплексное число. Умножая (6) на вектор e_3, получаем

$$W^* J W e_3 = J e_3 = e_2,$$

откуда

$$J W e_3 = W^{-*} e_2.$$

Поскольку $W^{-1} \in C_J^*$, то, в силу теоремы 2, $W^{-*} e_2 = \delta e_2$ для некоторого $\delta \neq 0$. Теперь из равенства

$$J W e_3 = \delta e_2$$

выводим

$$W e_3 = \delta e_3 + \gamma e_1, \tag{13}$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

Доказательство второго утверждения начнем с такого замечания: множество решений уравнения $J^T z = e_{n-1}$ дается формулой

$$z = e_{n-2} + \mu e_n,$$

где μ – произвольное комплексное число. Умножая (6) слева на e_{n-2}^T, имеем

$$e_{n-2}^T W^* J W = e_{n-2}^T J = e_{n-1}^T,$$

или

$$W^* J^T W e_{n-2} = e_{n-1},$$

или

$$J^T W e_{n-2} = (W^{-1})^* e_{n-1}.$$

Снова применяя теорему 2, можем переписать это равенство как

$$J^T(We_{n-2}) = \nu e_{n-1}, \qquad \nu \neq 0.$$

Отсюда следует, что

$$We_{n-2} = \nu e_{n-2} + \mu e_n. \tag{14}$$

□

Теорема 4. *Пусть $n \geqslant 7$. Тогда для любой матрицы $W \in C_J^*$ вектор W^*e_4 есть линейная комбинация векторов e_2 и e_4, а вектор W^*e_{n-3} – линейная комбинация векторов e_{n-1} и e_{n-3}.*

Доказательство. Из (6) находим

$$W^*JWe_{n-2} = Je_{n-2} = e_{n-3}.$$

Используя (14), получаем

$$W^*J(\nu e_{n-2} + \mu e_n) = e_{n-3},$$

или

$$\nu W^*e_{n-3} = e_{n-3} - \mu W^*e_{n-1} = e_{n-3} - \mu\overline{\beta}^{-1}e_{n-1}$$

(см. (10)). Поскольку $\nu \neq 0$, это равенство доказывает второе утверждение теоремы.

Умножая (11) на e_3, имеем

$$W^*J^TWe_3 = J^Te_3 = e_4.$$

Отсюда, согласно (13),

$$W^*J^T(\delta e_3 + \gamma e_1) = e_4,$$

или

$$\delta W^*e_4 = e_4 - \gamma W^*J^Te_1 = e_4 - \gamma W^*e_2 = e_4 - \alpha^{-1}\gamma e_2$$

(см. (12)). Эти соотношения доказывают первое утверждение теоремы. □

Теоремы 1 и 3 означают, что в любой матрице $W \in C_J^*$ (достаточно большого порядка) крайние столбцы имеют лишь по одному ненулевому элементу в своих диагональных позициях, а столбцы с индексами 3 и $n-2$ – по (не более, чем) два ненулевых элемента (в диагональной позиции и в позициях соответственно 1 и n). Аналогичный смысл, но только по отношению к строкам матрицы W, выражают теоремы 2 и 4: строки 2 и $n-1$ имеют по одному ненулевому элементу, а строки 4 и $n-3$ – по (не более, чем) два ненулевых элемента.

Для матриц большего порядка n этот ряд теорем можно продолжить, и количество ненулевых элементов в столбце или строке увеличивается по мере того, как их индекс приближается к числу $n/2$.

3. В этом разделе мы даем полное описание групп C_J^* для порядков $n = 2, 3, 4, 5$.

$n = 2$. Согласно теореме 1, W должна быть диагональной матрицей:

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрица $W^* J_2 W$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{w_{11}} w_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из равенства $W^* J_2 W = J_2$ выводим

$$w_{22} = \frac{1}{\overline{w_{11}}}.$$

$n = 3$. Согласно теореме 1, имеем

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 \\ 0 & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя произведение $W^* J_3 W$, находим

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{w_{11}} w_{22} & 0 \\ 0 & \overline{w_{12}} w_{22} + \overline{w_{22}} w_{32} & \overline{w_{22}} w_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $W^* J_3 W = J_3$, то

$$w_{22} = \frac{1}{\overline{w_{11}}}, \qquad w_{33} = \frac{1}{\overline{w_{22}}} = w_{11}.$$

Представим W как произведение

$$W = D_3 \widetilde{W},$$

где

$$D_3 = \operatorname{diag}(w_{11}, \frac{1}{\overline{w_{11}}}, w_{11}),$$

$$\widetilde{W} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_{12}}{w_{11}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{w_{32}}{w_{11}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим
$$\alpha = \frac{w_{12}}{w_{11}}.$$
Из равенства $\overline{w_{12}}w_{22} + \overline{w_{22}}w_{32} = 0$ заключаем, что
$$\frac{w_{32}}{w_{11}} = -\frac{\overline{w_{12}}}{\overline{w_{11}}} = -\overline{\alpha},$$
т.е. W – матрица вида
$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\overline{\alpha} & 1 \end{pmatrix}.$$

$n = 4$. Из теорем 1 и 2 вытекает, что W имеет следующее строение:
$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{33} & 0 \\ 0 & w_{42} & w_{43} & w_{44} \end{pmatrix}.$$
Найдем матрицу W^*J_4W:
$$W^*J_4W = \begin{pmatrix} 0 & \overline{w_{11}}w_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{w_{12}}w_{22} & \overline{w_{22}}w_{33} & 0 \\ 0 & \overline{w_{13}}w_{22} + \overline{w_{33}}w_{42} & \overline{w_{33}}w_{43} & \overline{w_{33}}w_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Таким образом, должны выполняться равенства
$$\overline{w_{11}}w_{22} = \overline{w_{22}}w_{33} = \overline{w_{33}}w_{44} = 1, \tag{15.1}$$
$$\overline{w_{12}}w_{22} = \overline{w_{33}}w_{43} = 0, \tag{15.2}$$
$$\overline{w_{13}}w_{22} + \overline{w_{33}}w_{42} = 0. \tag{15.3}$$
Из соотношений (15.1) видно, что все диагональные элементы матрицы W отличны от нуля, причем
$$w_{22} = \frac{1}{\overline{w_{11}}}, \qquad w_{33} = \frac{1}{\overline{w_{22}}} = w_{11}, \qquad w_{44} = \frac{1}{\overline{w_{33}}} = \frac{1}{\overline{w_{11}}}.$$
Равенства (15.2) означают, что $w_{12} = w_{43} = 0$.

Как и в предыдущем случае, представим W в виде произведения
$$W = D_4\widetilde{W},$$
где
$$D_4 = \mathrm{diag}(w_{11}, \frac{1}{\overline{w_{11}}}, w_{11}, \frac{1}{\overline{w_{11}}}),$$

$$\widetilde{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{w_{13}}{w_{11}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & w_{42}\overline{w_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\beta = \frac{w_{13}}{w_{11}}.$$

Согласно (15.3),

$$w_{42}\overline{w_{33}} = w_{42}\overline{w_{11}} = -w_{22}\overline{w_{13}} = -\frac{\overline{w_{13}}}{\overline{w_{11}}} = -\overline{\beta}.$$

Итак, $\widetilde{W}$ – матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\overline{\beta} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$n = 5$. Используя теоремы 1–3, заключаем, что матрица W должна иметь вид

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{32} & w_{33} & w_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{44} & 0 \\ 0 & w_{52} & w_{53} & w_{54} & w_{55} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем произведение W^*J_5W:

$$W^*J_5W = \begin{pmatrix} 0 & \overline{w_{11}}w_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{w_{12}}w_{22} + \overline{w_{22}}w_{32} & \overline{w_{22}}w_{33} & \overline{w_{22}}w_{34} + \overline{w_{32}}w_{44} & 0 \\ 0 & \overline{w_{13}}w_{22} & 0 & \overline{w_{33}}w_{44} & 0 \\ 0 & \overline{w_{14}}w_{22} + \overline{w_{44}}w_{52} & \overline{w_{44}}w_{53} & \overline{w_{34}}w_{44} + \overline{w_{44}}w_{54} & \overline{w_{44}}w_{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из равенства $W^*J_5W = J_5$ выводим

$$\overline{w_{11}}w_{22} = \overline{w_{22}}w_{33} = \overline{w_{33}}w_{44} = \overline{w_{44}}w_{55} = 1, \tag{16.1}$$

$$\overline{w_{13}}w_{22} = \overline{w_{44}}w_{53} = 0, \tag{16.2}$$

$$\overline{w_{12}}w_{22} + \overline{w_{22}}w_{32} = 0, \qquad \overline{w_{22}}w_{34} + \overline{w_{32}}w_{44} = 0, \tag{16.3}$$

$$\overline{w_{14}}w_{22} + \overline{w_{44}}w_{52} = 0, \qquad \overline{w_{34}}w_{44} + \overline{w_{44}}w_{54} = 0. \tag{16.4}$$

Для диагональных элементов получаем соотношения:

$$w_{22} = \frac{1}{\overline{w_{11}}}, \qquad w_{33} = w_{11}, \qquad w_{44} = \frac{1}{\overline{w_{11}}}, \qquad w_{55} = w_{11}.$$

Элементы w_{13} и w_{53} равны нулю, что и следовало ожидать в соответствии с теоремой 3. Снова записываем W как произведение

$$W = D_5\widetilde{W},$$

где

$$D_5 = \mathrm{diag}(w_{11}, \frac{1}{\overline{w_{11}}}, w_{11}, \frac{1}{\overline{w_{11}}}, w_{11}),$$

$$\widetilde{W} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_{12}}{w_{11}} & 0 & \frac{w_{14}}{w_{11}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{w_{32}}{w_{33}} & 1 & \frac{w_{34}}{w_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{w_{52}}{w_{55}} & 0 & \frac{w_{54}}{w_{55}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\gamma = \frac{w_{12}}{w_{11}}, \qquad \delta = \frac{w_{14}}{w_{11}}.$$

Из соотношений (16.3) и (16.4) находим

$$\frac{w_{32}}{w_{33}} = w_{32}\overline{w_{22}} = -w_{22}\overline{w_{12}} = -\frac{\overline{w_{12}}}{\overline{w_{11}}} = -\overline{\gamma},$$

$$\frac{w_{34}}{w_{33}} = w_{34}\overline{w_{22}} = -w_{44}\overline{w_{32}} = -\frac{\overline{w_{32}}}{\overline{w_{33}}} = \gamma,$$

$$\frac{w_{52}}{w_{55}} = w_{52}\overline{w_{44}} = -w_{22}\overline{w_{14}} = -\frac{\overline{w_{14}}}{\overline{w_{11}}} = -\overline{\delta},$$

$$\frac{w_{54}}{w_{55}} = w_{54}\overline{w_{44}} = -w_{44}\overline{w_{34}} = -\frac{\overline{w_{34}}}{\overline{w_{33}}} = -\overline{\gamma}.$$

Итак, матрица $\widetilde{W}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{\gamma} & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\overline{\delta} & 0 & -\overline{\gamma} & 1 \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. М., Наука, 1966.

Ikramov Kh. D. On the congruent centralizer of the Jordan block.

The congruent centralizer of a complex $n \times n$ matrix A is the set of $n \times n$ matrices Z such that $Z^*AZ = A$. This set is an analog of the classical centralizer in the case where the similarity relation on the space of $n \times n$ matrices is replaced by the congruence relation.

The study of the classical centralizer $\mathcal{C}_A$ reduces to describing the set of solutions to the *linear* matrix equation $AZ = ZA$. The structure of this set is well known and is explained in many monographs on matrix theory. As to the congruent centralizer, its analysis amounts to a description of the solution set of a system of n^2 *quadratic* equations for n^2 unknowns. The complexity of this problem is the reason why we still have no description of the congruent centralizer C_J^* even for the simplest case of the Jordan block $J = J_n(0)$ with zero on the principal diagonal. This paper presents certain facts concerning the structure of matrices in C_J^* for an arbitrary n and then gives complete descriptions of the groups C_J^* for $n = 2, 3, 4, 5$.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 14 марта 2016 г.