Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

Х. Д. Икрамов

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПСЕВДОУНИТАРНЫХ И ЦЕНТРОУНИТАРНЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Первые журнальные публикации о центросимметричных и центроэрмитовых матрицах появились в алгебраической литературе в 1970–80х годах (см. [1–3]). Если рассматривать $\mathbf{C}^n$ как псевдоунитарное пространство с метрической матрицей

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \tag{1}$$

то центросимметричные и центроэрмитовы матрицы можно интерпретировать соответственно как симметричные и эрмитовы (самосопряженные) операторы этого пространства.

Прошло несколько десятилетий, и названные классы матриц обрели права гражданства уже и в матричных энциклопедиях. В недавнем переиздании книги “Матричный анализ” Хорна и Джонсона мы находим и эти классы, и их косые варианты (косоцентросимметричные и косоцентроэрмитовы матрицы) (см. [4]). Однако еще один интересный класс специальных матриц, определение которого связано с метрикой (1), так и не появился до сих пор ни в алгебраических книгах, ни в журнальной литературе. Это матрицы, вводимые соотношением

$$Q^*\mathcal{P}_nQ = \mathcal{P}_n \tag{2}$$

и играющие роль унитарных операторов рассматриваемого псевдоунитарного пространства. Мы называем такие матрицы *центроунитарными* и обозначаем группу центроунитарных матриц порядка n символом CU_n.

В предлагаемой статье обсуждается структура центроунитарной группы четного порядка $2n$. В §2 показано, что в известном смысле группа CU_{2n} эквивалентна (изоморфна) группе псевдоунитарных

Ключевые слова: центросимметричная матрица, центроунитарная матрица, псевдоунитарная матрица.

матриц типа (n, n), обозначаемой в дальнейшем через $\mathrm{PU}_{n,n}$. Для последней метрической матрицей служит прямая сумма

$$J_{2n} = I_n \oplus (-I_n). \tag{3}$$

Хотя псевдоунитарные и (гораздо чаще) псевдоортогональные матрицы нередко встречаются в литературе по классическим группам, это относится главным образом к матрицам малого порядка.

В §3 изложены некоторые простые факты, относящиеся к псевдоунитарным матрицам, и введено несколько конкретных типов таких матриц, в частности, псевдоунитарные отражения и вращения. Алгоритм разложения произвольной матрицы $W \in \mathrm{PU}_{n,n}$ в произведение специальных матриц того же класса описан в §4. Основными сомножителями этого разложения являются псевдоунитарные отражения и вращения. Возможность такого разложения следует считать главным результатом данной статьи.

Обращая исходный изоморфизм в §5, мы приходим к аналогичному результату относительно разложений центроунитарных матриц.

§2. От центроунитарных к псевдоунитарным матрицам

Назовем вектор $x \in \mathbf{C}^n$ симметричным, если

$$\mathcal{P}_n x = x,$$

и кососимметричным, если

$$\mathcal{P}_n x = -x.$$

Симметричные векторы из $\mathbf{C}^n$ суть собственные векторы матрицы $\mathcal{P}_n$ для собственного значения 1, а кососимметричные являются собственными векторами для числа -1.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ – координатные векторы пространства $\mathbf{C}^m$ четной размерности $m = 2n$. Системы векторов

$$e_1 + e_{2n}, e_2 + e_{2n-1}, \ldots, e_n + e_{n+1}$$

и

$$-e_1 + e_{2n}, -e_2 + e_{2n-1}, \ldots, -e_n + e_{n+1}$$

образуют базисы в собственных подпространствах матрицы $\mathcal{P}_m$ соответственно для чисел 1 и -1. Составим из выписанных (и нормированных) векторов по столбцам унитарную матрицу порядка $2n$

$$V_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ \mathcal{P}_n & \mathcal{P}_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тогда

$$V_{2n}^* \mathcal{P}_{2n} V_{2n} = J_{2n}. \tag{5}$$

Применяя то же подобие к соотношению (2), в котором n заменено на $2n$, получаем

$$(V_{2n}^* Q V_{2n})^* J_{2n} (V_{2n}^* Q V_{2n}) = J_{2n},$$

т.е. определение псевдоунитарной матрицы

$$W = V_{2n}^* Q V_{2n} \tag{6}$$

типа (n, n).

§3. О псевдоунитарных матрицах

Большинство фактов, формулируемых в данном параграфе, справедливо для псевдоунитарных матриц произвольного типа (p, q), а не только для матриц из группы $\mathrm{PU}_{n,n}$. Там, где это возможно, мы приводим формулировки наибольшей общности.

Итак, пусть метрическая матрица имеет вид

$$J_{p,q} = I_p \oplus (-I_q), \qquad p, q > 0. \tag{7}$$

Псевдоунитарную матрицу W типа (p, q) представим в блочном виде

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где W_{11} и W_{22} – квадратные подматрицы порядков соответственно p и q. Расписывая основное соотношение

$$W^* J_{p,q} W = J_{p,q}, \tag{9}$$

находим

$$W_{11}^* W_{11} - W_{21}^* W_{21} = I_p, \tag{10а}$$

$$W_{11}^* W_{12} = W_{21}^* W_{22}, \tag{10б}$$

$$W_{12}^* W_{11} = W_{22}^* W_{21}, \tag{10в}$$

$$W_{22}^* W_{22} - W_{12}^* W_{12} = I_q. \tag{10г}$$

Отметим, что равенства (10б) и (10в) в сущности одинаковы.

Предложение 1. *Подматрицы W_{11} и W_{22} невырожденны.*

Доказательство. Пусть вектор $x \in \mathbf{C}^p$ таков, что $W_{11}x = 0$. Умножая соотношение (10а) справа на x и слева на x^*, получаем

$$x^* W_{11}^* W_{11} x - x^* W_{21}^* W_{21} x = -\|W_{21}x\|_2^2 = \|x\|_2^2.$$

Последнее равенство возможно лишь при $x = 0$. Невырожденность блока W_{22} доказывается аналогичным образом с помощью соотношения (10г). □

Предложение 2. *Предположим, что матрица* (8) *блочно-треугольная. Пусть, для определенности,* $W_{21} = 0$. *Тогда в действительности* W *является блочно-диагональной матрицей, т.е.* $W_{12} = 0$.

Доказательство. В самом деле, в условиях данного предложения соотношение (10б) превращается в равенство $W_{11}^* W_{12} = 0$. Поскольку матрица W_{11} невырожденна, имеем $W_{12} = 0$. □

Обозначим через $w_k^{(i,j)}$ столбец с индексом k в блоке W_{ij}. Следующее утверждение вытекает непосредственно из определения псевдоунитарной матрицы.

Предложение 3. *Столбцы* $w_k^{(i,j)}$ *подчиняются соотношениям*

$$\|w_k^{(1,1)}\|_2 - \|w_k^{(2,1)}\|_2 = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{11а}$$

$$\|w_k^{(2,2)}\|_2 - \|w_k^{(1,2)}\|_2 = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, q. \tag{11б}$$

Замечание. Вместе с W псевдоунитарной является и сопряженная матрица W^*. Поэтому соотношения, аналогичные (11), выполняются и для строк матрицы W.

Предложение 4. *Предположим, что все поддиагональные элементы в первом столбце матрицы* (8) *равны нулю. Тогда равны нулю и все внедиагональные элементы в первой строке этой матрицы.*

Доказательство. Согласно условию,

$$w_1^{(2,1)} = 0, \quad w_1^{(1,1)} = \alpha e_1,$$

где e_1 – первый координатный вектор пространства $\mathbf{C}^n$, а модуль числа α равен единице. Из соотношения (10в) выводим

$$0 = W_{22}^* w_1^{(2,1)} = W_{22}^* W_{21} e_1 = W_{12}^* W_{11} e_1 = W_{12}^* w_1^{(1,1)} = \alpha W_{12}^* e_1.$$

Эти равенства означают, что все элементы в первой строке блока W_{12} нулевые. Условие типа (11), записанное для первой строки матрицы W, принимает теперь вид

$$1 + |w_{12}|^2 + |w_{13}|^2 + \cdots + |w_{1n}|^2 = 1.$$

Следовательно,

$$w_{12} = \cdots = w_{1n} = 0. \qquad \square$$

Рассмотрим теперь некоторые специальные типы псевдоунитарных матриц.

(i) Блочно-диагональные матрицы W (т.е. $W_{12} = 0$, $W_{21} = 0$).

В этом случае соотношения (10а) и (10г) дают

$$W_{11}^* W_{11} = I_p, \quad W_{22}^* W_{22} = I_q,$$

т.е. W есть прямая сумма унитарных матриц с порядками соответственно p и q. Напротив, любая сумма такого вида является псевдоунитарной матрицей типа (p, q).

В следующем параграфе будет интенсивно использоваться частный случай матриц этого типа, а именно прямые суммы двух отражений порядка n:

$$\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2. \tag{12}$$

Будем называть такие матрицы *псевдоунитарными отражениями.*

(ii) Матрицы из $\mathrm{PU}_{n,n}$ с диагональными блоками W_{ij}.

Обозначим через $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$ диагональный элемент (j, j) соответственно в блоках W_{11}, W_{12}, W_{21} и W_{22}. Из соотношений (10) выводим

$$|\alpha_j|^2 - |\gamma_j|^2 = 1, \tag{13а}$$

$$|\delta_j|^2 - |\beta_j|^2 = 1, \tag{13б}$$

$$\alpha_j \overline{\beta}_j = \overline{\delta}_j \gamma_j. \tag{13в}$$

Переходя в последнем равенстве к модулям, имеем

$$|\alpha_j|^2 |\beta_j|^2 = |\delta_j|^2 |\gamma_j|^2.$$

Подставляя сюда выражения для $|\alpha_j|^2$ и $|\delta_j|^2$ из соотношений (13а) и (13б), приходим к равенству $|\beta_j| = |\gamma_j|$. Как следствие, получаем $|\alpha_j| = |\delta_j|$.

Выберем для α_j и δ_j положительное значение c. Тогда, согласно (13в), $\gamma_j = \overline{\beta}_j$. Если, считая β_j ненулевым, положить

$$\beta_j = s e^{i\phi}, \quad s > 0,$$

то

$$\gamma_j = se^{-i\phi}.$$

Положительные числа c и s связаны соотношением

$$c^2 = 1 + s^2$$

и, следовательно, могут интерпретироваться как гиперболические косинус и синус некоторого аргумента x. Таким образом, в случае $n = 1$ получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} c & se^{i\phi} \\ se^{-i\phi} & c \end{pmatrix}, \qquad c^2 - s^2 = 1. \tag{14}$$

Будем называть ее *гиперболическим вращением*. В случае произвольного n этим термином называем матрицу $W \in \mathrm{PU}_{n,n}$ с диагональными блоками W_{ij}, в которых диагональные элементы в какой-то позиции (j, j) образуют подматрицу вида (14), а все прочие диагональные элементы равны единице.

§4. Приведение к блочно-диагональному виду

В этом параграфе будет описан псевдоунитарный алгоритм, приводящий произвольную матрицу $W \in \mathrm{PU}_{n,n}$ к блочно-диагональному виду, т.е. к матрице типа (i) (см. §3). Алгоритм состоит из n шагов. Мы подробно разберем два первых шага и заключительный шаг. Из этого разбора станет ясно, как работает алгоритм в целом.

Первый шаг.

(i) Построим обычные (хаусхолдеровы) отражения $H_1^{(1)}$ и $H_2^{(1)}$ порядка n так, чтобы они переводили первые столбцы блоков W_{11} и W_{21} в положительные кратные n-мерного координатного вектора e_1. Положим

$$\mathcal{H}_1 = H_1^{(1)} \oplus H_2^{(1)}. \tag{15}$$

В первом столбце псевдоунитарной матрицы

$$\widetilde{W} = \mathcal{H}_1 W \tag{16}$$

отличны от нуля только два элемента: элемент α_1 в позиции (1,1) и элемент γ_1 в позиции $(n + 1,1)$. Оба этих числа положительны, причем

$$\alpha_1^2 - \gamma_1^2 = 1$$

(см. соотношение (11a)).

(ii) Построим гиперболическое вращение $\mathcal{R}_1$, в котором подматрица (14) расположена в строках и столбцах с индексами 1 и n+1. Положим $\phi_1 = 0$, а параметры c_1 и s_1 подберем так, чтобы выполнялось соотношение

$$\alpha_1 s_1 + \gamma_1 c_1 = 0. \tag{17}$$

С учетом соотношений

$$c_1 = \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2}, \qquad s_1 = \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2}$$

нетрудно проверить, что решением уравнения (17) является число

$$x_1 = \ln \frac{\alpha_1 - \gamma_1}{\alpha_1 + \gamma_1} = \ln(\alpha_1 - \gamma_1)^2 = 2\ln(\alpha_1 - \gamma_1).$$

Для построенного таким образом вращения $\mathcal{R}_1$ в первом столбце матрицы

$$W_1 = \mathcal{R}_1 \widetilde{W} \tag{18}$$

ненулевым будет только элемент (1,1). Из свойства псевдоунитарности следует, что модуль этого элемента равен единице. Согласно предложению 4, все внедиагональные элементы в первой строке матрицы W_1 равны нулю. Первый шаг алгоритма закончен, и W_1 является его результатом.

Второй шаг.

(i) Построим хаусхолдеровы отражения $H_1^{(2)}$ и $H_2^{(2)}$ порядка n следующим образом:

(а) умножение слева на $H_1^{(2)}$ не должно менять первой строки блока $W_{11}^{(1)}$. Тем самым первая строка и первый столбец в $H_1^{(2)}$ должны быть такими же, как у единичной матрицы I_n. Основное назначение отражения $H_1^{(2)}$ – аннулировать все элементы во втором столбце $W_{11}^{(1)}$ кроме элемента в диагональной позиции (2,2), принимающего положительное значение α_2;

(б) умножение слева на $H_2^{(2)}$ должно аннулировать все элементы второго столбца в блоке $W_{21}^{(1)}$ кроме элемента в диагональной позиции (2,2), принимающего положительное значение γ_2.

(Мы игнорируем маловероятный случай, когда второй столбец в $W_{21}^{(1)}$ уже имеет требуемый вид. В этом случае следует считать, что $H_2^{(2)} = I_n$.)

Положим

$$\mathcal{H}_2 = H_1^{(2)} \oplus H_2^{(2)} \tag{19}$$

и

$$\widetilde{W_1} = \mathcal{H}_2 W_1. \tag{20}$$

Во втором столбце матрицы $\widetilde{W_1}$ отличны от нуля только два элемента: элемент α_2 в позиции (2,2) и элемент γ_2 в позиции (n+2,2). Оба они положительны и

$$\alpha_2^2 - \gamma_2^2 = 1.$$

(ii) Построим гиперболическое вращение $\mathcal{R}_2$, в котором подматрица (14) расположена в строках и столбцах с индексами 2 и n+2. Положим $\phi_2 = 0$, а параметры c_2 и s_2 подберем из условия

$$\alpha_2 s_2 + \gamma_2 c_2 = 0.$$

Матрица

$$W_2 = \mathcal{R}_2 \widetilde{W_1} \tag{21}$$

сохраняет все нули, полученные на первом шаге алгоритма. Все элементы ее второго столбца, кроме диагонального элемента, также равны нулю. Модуль этого диагонального элемента равен единице и, согласно предложению 4, все внедиагональные элементы во второй строке матрицы W_2 нулевые. Матрица W_2 и есть результат второго шага.

Последний шаг.

В результате предыдущих n-1 шагов получена матрица W_{n-1}, в которой: а) последний столбец блока $W_{11}^{(n-1)}$ содержит единственный ненулевой элемент в позиции (n, n); б) все столбцы блока $W_{21}^{(n-1)}$, кроме последнего, нулевые.

(i) Построим матрицу

$$\mathcal{H}_n = D \oplus H_2^{(n)}$$

следующим образом:

(а) положим $w_{nn}^{(n-1)} = \alpha_n e^{i\phi_n}, \alpha_n > 0$. Тогда

$$D = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, e^{-i\phi_n}).$$

При левом умножении блока $W_{11}^{(n-1)}$ на такую матрицу D диагональный элемент (n, n) принимает положительное значение α_n;

(б) умножение слева на $H_2^{(n)}$ должно аннулировать все элементы в последнем столбце блока $W_{21}^{(n-1)}$ кроме элемента в диагональной позиции (n, n), принимающего положительное значение γ_n.

В n-м столбце матрицы

$$\widetilde{W}_{n-1} = \mathcal{H}_n W_{n-1} \tag{22}$$

отличны от нуля только два элемента: элемент α_n в позиции (n, n) и элемент γ_n в позиции $(2n, n)$. Они положительны и

$$\alpha_n^2 - \gamma_n^2 = 1.$$

(ii) Строим гиперболическое вращение $\mathcal{R}_n$, опорная матрица (14) которого расположена в строках и столбцах с номерами n и $2n$. Полагаем $\phi_n = 0$ и выбираем параметры c_n и s_n из условия

$$\alpha_n s_n + \gamma_n c_n = 0.$$

Матрица

$$W_n = \mathcal{R}_n \widetilde{W}_{n-1} \tag{23}$$

имеет нулевой блок $W_{21}^{(n)}$, а потому и нулевой блок $W_{12}^{(n)}$ (см. предложение 2). Эта блочно-диагональная матрица и есть итог всего алгоритма.

В совокупности формулы (16), (18), (20), (21) и аналогичные формулы последующих шагов, заканчивая формулой (23), описывают разложение произвольной матрицы $W \in \mathrm{PU}_{n,n}$ в произведение псевдоунитарных отражений, гиперболических вращений и блочно-диагональной матрицы W_n. Нетрудно видеть, что и матрица W_n может быть разложена в произведение (не более чем) $n-1$ отражений и диагональной унитарной матрицы.

§5. От псевдоунитарных матриц назад к центроунитарным

К псевдоунитарной матрице $W \in \mathrm{PU}_{n,n}$ и каждому сомножителю разложения, полученного для нее в предыдущем параграфе, применим унитарное подобие (или, что то же, конгруэнцию) с матрицей

$$V_{2n}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & \mathcal{P}_n \\ -I_n & \mathcal{P}_n \end{pmatrix}, \tag{24}$$

обратной к матрице (4). В результате получим теорему о разложении произвольной центроунитарной матрицы в произведение центроунитарных матриц более простого вида. Как выглядят сомножители этого произведения?

Если говорить о блочно-диагональных псевдоунитарных матрицах

$$W = W_{11} \oplus W_{22},$$

то они переходят в матрицы такого блочного устройства:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} W_{11}+W_{22} & (W_{11}-W_{22})\mathcal{P}_n \\ \mathcal{P}_n(W_{11}-W_{22}) & \mathcal{P}_n(W_{11}+W_{22})\mathcal{P}_n \end{pmatrix}.$$

Эта матрица центросимметрична, что легко было предвидеть, исходя из следующего наблюдения: следствием условий центроунитарности и обычной унитарности, т.е. равенств (2) и $Q^* = Q^{-1}$ является соотношение

$$\mathcal{P}_n Q = Q\mathcal{P}_n,$$

характеризующее центросимметричность.

Пусть теперь $W \in \mathrm{PU}_{n,n}$ – матрица с диагональными блоками W_{ij}, а Q – ее образ под действием подобия с матрицей (24). Примем для Q такое же блочное 2×2-разбиение, как и для W. Нетрудно проверить, что блоки Q_{11} и Q_{22} суть диагональные матрицы, а Q_{12} и Q_{21} – пердиагональные матрицы, т.е. тоже диагональные, но по отношению к диагонали $(n,1),(n-1,2),\ldots,(1,n)$. Учитывая структуру блоков, запишем центроунитарную матрицу этого типа в виде

$$Q = \begin{pmatrix} A & B\mathcal{P}_n \\ P_n C & \mathcal{P}_n D\mathcal{P}_n \end{pmatrix},$$

где все четыре матрицы A, B, C и D являются диагональными в обычном смысле. Требование центроунитарности накладывает на эти матрицы такие условия:

$$\overline{A}C + \overline{C}A = 0, \tag{25а}$$

$$\overline{A}D + \overline{C}B = I_n, \tag{25б}$$

$$\overline{B}C + \overline{D}A = I_n, \tag{25в}$$

$$\overline{B}D + \overline{D}B = 0. \tag{25г}$$

Поскольку матрицы A, B, C и D – диагональные, два средних равенства эквивалентны, как это было и в соотношениях псевдоунитарности (10). Другое следствие диагональности состоит в том, что условия (25) сводятся к скалярным уравнениям относительно элементов этих четырех матриц, расположенных в одинаковых диагональных позициях.

Литература

1. A. L. Andrew, *Eigenvectors of certain matrices.* — Linear Algebra Appl. **7** (1973), 151–162.
2. A. Lee, *On centrohermitian and skew-centrohermitian matrices.* — Linear Algebra Appl. **29** (1980), 205–210.
3. J. R. Weaver, *Centrosymmetric (cross-symmetric) matrices, their basic properties, eigenvalues, and eigenvectors.* — Amer. Math. Monthly **92** (1985), 711–717.
4. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis.* Second edition. — Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

Ikramov Kh. D. Decomposing pseudounitary and centrounitary matrices.

Consider $\mathbf{C}^n$ as the pseudounitary space with the inner product defined by the matrix

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

In this space, centrounitary matrices play the role of unitary operators.

The main result of this paper describes a certain factorization of an arbitrary centrounitary matrix of even order into a product of simpler centrounitary matrices. This result is an implication of a similar fact concerning factorizations of pseudounitary matrices of the type (n, n).

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 18 января 2016 г.