Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

Ю. К. Демьянович, А. С. Пономарев

О РЕАЛИЗАЦИИ СПЛАЙН-ВСПЛЕСКОВОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Всплесковые (вэйвлетные) разложения широко используются при обработке числовых информационных потоков; объемы таких потоков постоянно возрастают, и это является стимулом к дальнейшему развитию теории всплесков (см. [1–2]). Используемый в данной работе подход к построению всплесков основывается на применении аппроксимационных соотношений (см., например, [3]), так что автоматически обеспечивается эффективная аппроксимация (чаще всего, она асимптотически оптимальна по N-поперечнику стандартных компактов). В противоположность классическим вэйвлетам (см. [1]) упомянутый подход позволяет без дополнительных сложных исследований использовать неравномерную сетку (как конечную, так и бесконечную), что весьма важно для экономии компьютерных ресурсов в случае появления сингулярных изменений рассматриваемых потоков. Кроме того, при построении всплесковых разложений в многомерном случае (и даже на произвольном дифференцируемом многообразии, см. [4]) могут применяться известные конечно-элементные аппроксимации (Куранта, Зламала и т.п.), что существенно расширяет возможности использования всплесковых разложений. В классическом случае большую трудность представляет построение всплескового (вэйвлетного) базиса в том или ином функциональном пространстве (часто в $L_2(\mathbb{R}^1)$); используемый здесь подход не требует предварительного построения всплескового базиса (при желании этот базис может быть получен после проведения основных исследований). С другой стороны, знание всплескового базиса позволяет достичь существенной экономии

Ключевые слова: дискретные сплайн-всплески, формулы декомпозиции, формулы реконструкции, калибровочные соотношения, оценка времени вычислений.

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 15-01-08847.

компьютерных и сетевых ресурсов. Заметим, что для получения упомянутой экономии не нужен всплесковый базис в пространстве функций с континуальной областью определения, достаточно лишь получить подходящий базис для пространства всплесковых числовых потоков, но для этого необходимо все построения выполнять без использования функций с континуальной областью определения.

Цель данной работы состоит в том, чтобы в рамках упомянутого подхода рассмотреть дискретное сплайн-всплесковое разложение первого порядка, а именно, провести все построения без отображения в пространства функций с континуальной областью определения: все построения проводятся лишь для сеточных функций (т.е. для функций, заданных на той или иной сетке; здесь они часто называются потоками числовой информации). Ввиду этого появляются специфические определения и свойства: в частности, вводятся конечномерные пространства исходных потоков, всплесковых потоков и основных потоков, ассоциированные с исходной и с укрупненной сетками соответственно. В результате получены достаточно простые формулы декомпозиции и реконструкции и установлено, что базисом пространства всплесков является простейшая совокупность ортов евклидова пространства. Кроме того, дана оценка времени реализации декомпозиции с учетом свойств коммуникационной среды вычислительной системы.

Работа содержит двенадцать разделов. В первом разделе излагается основная идея общего подхода к сплайн-всплесковому разложению на одномерном модельном примере; для наглядности здесь областью определения рассматриваемых функций служит континуум (интервал вещественной оси). Во втором разделе вводится исходная сетка, служащая областью определения исходного потока числовой информации. В третьем разделе рассматривается укрупнение упомянутой сетки: вновь получаемая сетка служит областью определения основного потока. В четвертом разделе рассматриваются калибровочные соотношения, связывающие дискретные сплайны на укрупненной сетке с дискретными сплайнами на исходной сетке. Пятый и шестой разделы служат для описания дискретного сплайн-всплескового разложения; здесь получаются формулы декомпозиции в общей форме. В седьмом и восьмом разделах эти формулы конкретизируются для рассматриваемой ситуации (т.е. вычисляются коэффициенты в упомянутых формулах с использованием представлений дискретных сплайнов). В девятом разделе приводится иллюстативный пример дискретного всплескового разложения. В десятом разделе рассмотрен континуальный образ рассматриваемого разложения. Одиннадцатый раздел посвящен вариантам алгоритмов адаптивного укрупнения сетки, определяемого исходным потоком. В двенадцатом разделе найдено время вычислений всплескового разложения на вычислительной системе с учетом влияния коммуникационной среды.

§1. Основная идея сплайн-всплескового разложения (неклассический подход)

Для удобства читателя здесь рассматривается общая идея (см. [5]) сплайн-всплескового разложения на одномерном примере; для простоты областью определения здесь служит континуум – интервал вещественной оси.

Пусть $\mathbb{L}$ – линейное пространство функций, определенных на интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$. Рассмотрим сетку

$$X : \ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots, \tag{1.1}$$

$$\lim_{j \to -\infty} x_j = \alpha, \qquad \lim_{j \to -\infty} x_j = \beta, \tag{1.2}$$

и вектор-функцию $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$, с компонентами, принадлежащими пространству $\mathbb{L}$: $\varphi_i \in \mathbb{L}$, $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Рассмотрим множество G линейных функционалов $g^{(s)} \in \mathbb{L}^*$, $G \stackrel{\text{def}}{=} \{g^{(s)}\}_{s \in \mathbb{Z}}$, со свойством

$$\operatorname{supp} g^{(s)} \subset (x_s, x_{s+1}) \qquad \forall s \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Результат действия функционала $g^{(s)}$ на функцию $u \in \mathbb{L}$ обозначается острыми скобками $\langle g^{(s)}, u \rangle$, а результат действия функционала на вектор-функцию $\varphi(t)$ представляет собой вектор-столбец с числовыми компонентами в соответствии с формулами

$$\langle g^{(s)}, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} (\langle g^{(s)}, \varphi_0 \rangle, \langle g^{(s)}, \varphi_1 \rangle, \ldots, \langle g^{(s)}, \varphi_m \rangle)^T.$$

Предположим, что выполнено условие

$$\det(\langle g^{(s)}, \varphi \rangle, \langle g^{(s+1)}, \varphi \rangle, \ldots, \langle g^{(s+m)}, \varphi \rangle) \neq 0 \qquad \forall s \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

По определению положим

$$\mathbf{a}_s \stackrel{\text{def}}{=\!=} \langle g^{(s)}, \varphi \rangle. \tag{1.5}$$

Линейная независимость векторов $\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_{s+1}, \ldots, \mathbf{a}_{s+m+1}$ следует из формулы (1.4).

Теперь рассмотрим аппроксимационные соотношения

$$\sum_{i=k-m}^{k} \mathbf{a}_i \omega_i(t) = \varphi(t) \qquad \forall t \in (x_k, x_{k+1}) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{1.6}$$

$$\operatorname{supp} \omega_s \subset [x_s, x_{s+m+1}] \qquad \forall s \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Из аппроксимационных соотношений (1.6)–(1.7) однозначно определяются функции $\omega_i(t)$.

Предположим, что $\omega_s \in \mathbb{L}$. Согласно формулам (1.3)–(1.7) имеем

$$\langle g^{(j)}, \omega_s \rangle = \delta_{j,s} \qquad \forall j, s \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{S} = \mathbb{S}(X, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathcal{L}\{\omega_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$, где $\mathcal{L}$ – линейная оболочка функций, находящихся в фигурных скобках.

Если рассмотреть подмножество $\widetilde{X}$ сетки X такое, что

$$\widetilde{X} : \ldots < \widetilde{x}_{-2} < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_2 < \ldots,$$

$$\lim_{j\to-\infty} \widetilde{x}_j = \alpha, \qquad \lim_{j\to-\infty} \widetilde{x}_j = \beta, \qquad \widetilde{X} \subset X,$$

то можно найти функции $\widetilde{\omega}_i$, связанные с новой сеткой $\widetilde{X}$ аналогично предыдущему, и рассмотреть линейное пространство $\widetilde{\mathbb{S}} = \mathbb{S}(\widetilde{X}, \varphi)$, которое при определенных условиях окажется подпространством пространства $\mathbb{S}(X, \varphi)$.

Рассмотрим оператор P, который проецирует пространство $\mathbb{S}$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}$:

$$Pu \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \langle \widetilde{g}^{(s)}, u \rangle \omega_s \qquad \forall u \in \mathbb{S}(X, \varphi), \tag{1.8}$$

где $\{\widetilde{g}^{(s)}\}_{s\in\mathbb{Z}}$ – фиксированная система функционалов, биортогональная системе функций $\{\widetilde{\omega}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Ясно, что если $t \in (\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_{k+1})$ фиксировано, то правая часть формулы (1.8) имеет не более $m+1$ слагаемого:

$$Pu(t) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{s=k-m}^{k} \langle \widetilde{g}^{(s)}, u \rangle \omega_s(t) \qquad \forall t \in (\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_{k+1}). \tag{1.9}$$

Проецирующий оператор P определяет всплесковое разложение

$$\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}} \dotplus \mathbb{W}. \tag{1.10}$$

Пусть $\mathbf{c} = (\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots)$ – исходный поток числовой информации. Рассмотрим функцию

$$u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j c_j \omega_j(t); \tag{1.11}$$

ее проекция $\widetilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} Pu$ на пространство $\widetilde{\mathbb{S}}$ может быть представлена в форме

$$\widetilde{u} = \sum_i a_i \widetilde{\omega}_i. \tag{1.12}$$

Итак, имеем так называемый основной поток

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots),$$

который соответствует укрупнению $\widetilde{X}$ сетки X, а также вспесковый поток $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots)$, который определяется разложением разности $w \stackrel{\text{def}}{=} u - \widetilde{u}$ по базису пространства $\mathbb{S}$: $w = \sum\limits_s b_s \omega_s$ (см. формулы (1.9)–(1.12)).

Переход от исходного потока $\mathbf{c}$ к потокам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется *декомпозицией*, а обратный переход называется *реконструкцией*.

Формулы декомпозиции могут быть представлены в форме $\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c}$, а формулы реконструкции – в форме $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathfrak{P}^T \mathbf{a}$, где $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ – матрицы сужения и продолжения соответственно.

В частном случае для $m = 1$, $\varphi(t) = (1, t)^T$, $X \setminus \widetilde{X} = \{x_{k+1}\}$ формулы декомпозиции имеют вид

$$a_i = c_i \quad \text{при} \quad i \leqslant k-1, \qquad a_i = c_{i+1} \quad \text{при} \quad i \geqslant k,$$

$$b_j = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k, \qquad b_k = -\frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_k} \cdot c_{k-1} + c_k - \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+2} - x_k} \cdot c_{k+1},$$

а формулы реконструкции могут быть представлены в форме

$$c_j = a_j + b_j \quad \text{при} \quad j \leqslant k-1,$$

$$c_k = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_k} \cdot a_{k-1} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+2} - x_k} \cdot a_k + b_k,$$

$$c_j = a_{j-1} + b_j \quad \text{при} \quad j \geqslant k+1.$$

Заметим, что если отрезок $[a, b]$ содержится в интервале (α, β), то все предыдущие построения справедливы для сужения рассматриваемых функций на этот отрезок; при этом рассматриваемые сетки, а также исходный, основной и всплесковый потоки оказываются конечными.

На этом закончим описание основной идеи построений и перейдем к реализации этой идеи в условиях, когда расматриваются лишь сеточные функции.

§2. Первоначальные обозначения

В отличие от предыдущего пункта, где описывается основная идея сплайн-всплесковых разложений, в данной работе всюду (кроме раздела 11) рассматриваются сеточные функции, область определения которых – та или иная сетка вида (1.1)–(1.2) или ее часть. Такой подход удобен при обработке числовых потоков, представляющих собой последовательности чисел; последние можно рассматривать как функции заданные на сетке (например, на множестве целых чисел).

Пусть на интервале (α, β) рассматривается сетка

$$\Xi: \quad \ldots < \xi_{-2} < \xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 \ldots, \tag{2.1}$$

$$\lim_{i \to -\infty} \xi_i = \alpha, \quad \lim_{i \to +\infty} \xi_i = \beta. \tag{2.2}$$

Множество функций $u(t)$, заданных на сетке Ξ, обозначим $C(\Xi)$; ясно, что $C(\Xi)$ – линейное пространство.

Если $a \in \Xi$, то существует такое $i \in \mathbb{Z}$, что $a = \xi_i$; в этом случае обозначим $a^- \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i-1}$, $a^+ \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i+1}$.

Далее предполагается, что

$$a, b \in \Xi, \qquad a^+ < b^-, \tag{2.3}$$

т.е. для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$, $i + 2 < j$, верны равенства $a = \xi_i$, $b = \xi_j$. При упомянутых a и b введем обозначение $[\![a, b]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_s \mid a \leqslant \xi_s \leqslant b,\ s \in \mathbb{Z}\}$; таким образом, $[\![a, b]\!] = \{\xi_s \mid i \leqslant s \leqslant j,\ s \in \mathbb{Z}\}$; множество $[\![a, b]\!]$ будем называть сеточным отрезком.

Рассмотрим линейное нормированное пространство $C[\![a, b]\!]$ функций $u(t)$, заданных на сеточном отрезке $[\![a, b]\!]$, где норма вводится соотношением

$$\|u\|_{C[\![a,b]\!]} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t \in [\![a,b]\!]} |u(t)|. \tag{2.4}$$

Очевидно, что пространство $C[\![a,b]\!]$ конечномерно.

§3. Укрупнение сетки

Для натурального числа m положим

$$J_m \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{0,1,\ldots,m\}, \qquad J'_m \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{-1,0,1,\ldots,m\}.$$

На сеточном отрезке $[\![a,b]\!]$,

$$a=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_{M-1}<\xi_M=b,$$

рассмотрим функции $\{\omega_j(t)\}_{j\in J'_{M-1}}$ пространства $C[\![a,b]\!]$:

$$\omega_j(\xi_s)=\delta_{s,j+1}, \qquad s\in J_M, \tag{3.1}$$

а также линейные функционалы $g^{(i)}$, $i\in J'_{M-1}$, определяемые формулой

$$\langle g^{(i)},u\rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(\xi_{i+1}) \qquad \forall u\in C[\![a,b]\!]. \tag{3.2}$$

Система $\{\omega_j\}_{j\in J'_{M-1}}$ является базисом в пространстве $C[\![a,b]\!]$; будем называть ее дискретным базисом.

Лемма 1. *Система функционалов $\{g^{(i)}\}_{i\in J'_{M-1}}$ биортогональна дискретному базису $\{\omega_j\}_{j\in J'_{M-1}}$:*

$$\langle g^{(i)},\omega_j\rangle=\delta_{i,j} \qquad \forall\, i,j\in J'_{M-1}. \tag{3.3}$$

Формула (3.3) легко получается из формул (3.1)–(3.2).

В дальнейшем условимся считать, что при $c>d$ множество $[\![c,d]\!]$ пусто.

Пусть $5\leqslant K<M$. Рассмотрим инъективное отображение $\varkappa$ множества J_K в множество J_M, при котором

$$\varkappa(0)=0, \quad \varkappa(i)<\varkappa(i+1), \quad \varkappa(K)=M. \tag{3.4}$$

Введем множество $J^*\subset J_M$, задаваемое формулой

$$J^* \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varkappa J_K; \tag{3.5}$$

на этом множестве определено однозначное обратное отображение $\forall r\in J^* \quad \varkappa^{-1}: \; r\longrightarrow s, \quad s\in J_K, \quad J_K=\varkappa^{-1}J^*$. Рассмотрим новую сетку

$$\widehat{X}: \quad a=\widehat{x}_0<\widehat{x}_1<\ldots<\widehat{x}_K=b, \tag{3.6}$$

где $\widehat{x}_i \stackrel{\text{def}}{=\!=} \xi_{\varkappa(i)}$, $i\in J_K$.

Замечание 1. В дальнейшем иногда рассматриваются виртуальные узлы ξ_{-1} и $\widehat{x}_{-1}$ сеток $[\![a,b]\!]$ и $\widetilde{X}$ со свойством $\xi_{-1}=\widehat{x}_{-1}<a$; они виртуальны в том смысле, что служат для удобства записей, но на окончательный результат они не оказывают влияния.

Введем функции $\widehat{\omega}_j(t)$, $j\in J'_{K-1}$, согласно формулам

$$\widehat{\omega}_{-1}(t)=(\widehat{x}_1-t)(\widehat{x}_1-\widehat{x}_0)^{-1} \quad \text{при} \quad t\in[\![\widehat{x}_0,\widehat{x}_1^{\,-}]\!], \tag{3.7}$$

$$\widehat{\omega}_{-1}(t)=0 \quad \text{при} \quad t\in[\![a,b]\!]\setminus[\![\widehat{x}_0,\widehat{x}_1^{\,-}]\!], \tag{3.8}$$

$$\widehat{\omega}_i(t)=(t-\widehat{x}_i)(\widehat{x}_{i+1}-\widehat{x}_i)^{-1} \quad \text{при} \quad t\in[\![\widehat{x}_i^{\,+},\widehat{x}_{i+1}^{\,-}]\!], \tag{3.9}$$

$$\widehat{\omega}_i(t)=(\widehat{x}_{i+2}-t)(\widehat{x}_{i+2}-\widehat{x}_{i+1})^{-1} \quad \text{при} \quad t\in[\![\widehat{x}_{i+1},\widehat{x}_{i+2}^{\,-}]\!], \tag{3.10}$$

$$\widehat{\omega}_i(t)=0 \quad \text{при} \quad t\in[\![a,b]\!]\setminus[\![\widehat{x}_i^{\,+},\widehat{x}_{i+2}^{\,-}]\!], \quad i\in J_{K-2}, \tag{3.11}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t)=(t-\widehat{x}_{K-1})(\widehat{x}_K-\widehat{x}_{K-1})^{-1} \quad \text{при} \quad t\in[\![\widehat{x}_{K-1}^{\,+},\widehat{x}_K]\!], \tag{3.12}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t)=0 \quad \text{при} \quad t\in[\![a,b]\!]\setminus[\![\widehat{x}_{K-1}^{\,+},\widehat{x}_K]\!]. \tag{3.13}$$

Формулы (3.7)–(3.13) могут быть переписаны с использованием узлов исходной сетки следующим образом:

$$\widehat{\omega}_{-1}(t)=(\xi_{\varkappa(1)}-t)(\xi_{\varkappa(1)}-\xi_{\varkappa(0)})^{-1} \quad \text{при} \quad t\in[\![\xi_{\varkappa(0)},\xi_{\varkappa(1)}^{\,-}]\!], \tag{3.14}$$

$$\widehat{\omega}_{-1}(t)=0 \quad \text{при} \quad t\in[\![a,b]\!]\setminus[\![\xi_{\varkappa(0)},\xi_{\varkappa(1)}^{\,-}]\!], \tag{3.15}$$

$$\widehat{\omega}_i(t)=(t-\xi_{\varkappa(i)})(\xi_{\varkappa(i+1)}-\xi_{\varkappa(i)})^{-1} \quad \text{при} \quad t\in[\![\xi_{\varkappa(i)}^{\,+},\xi_{\varkappa(i+1)}]\!], \tag{3.16}$$

$$\widehat{\omega}_i(t)=(\xi_{\varkappa(i+2)}-t)(\xi_{\varkappa(i+2)}-\xi_{\varkappa(i+1)})^{-1} \\ \text{при} \quad t\in[\![\xi_{\varkappa(i+1)}^{\,+},\xi_{\varkappa(i+2)}^{\,-}]\!], \tag{3.17}$$

$$\widehat{\omega}_i(t)=0 \quad \text{при} \quad t\in[\![a,b]\!]\setminus[\![\xi_{\varkappa(i)}^{\,+},\xi_{\varkappa(i+2)}^{\,-}]\!], \quad i\in J_{K-2}, \tag{3.18}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t)=(t-\xi_{\varkappa(K-1)})(\xi_{\varkappa(K)}-\xi_{\varkappa(K-1)})^{-1} \\ \text{при} \quad t\in[\![\xi_{\varkappa(K-1)}^{\,+},\xi_{\varkappa(K)}]\!], \tag{3.19}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t)=0 \quad \text{при} \quad t\in[\![a,b]\!]\setminus[\![\xi_{\varkappa(K-1)}^{\,+},\xi_{\varkappa(K)}]\!]. \tag{3.20}$$

Для $t\in[\![a,b]\!]$ имеем

$$\widehat{\omega}_i(t)=(t-\xi_{\varkappa(i)})(\xi_{\varkappa(i+1)}-\xi_{\varkappa(i)})^{-1} \\ \text{при} \quad t\in[\![\xi_{\varkappa(i)}^{\,+},\xi_{\varkappa(i+1)}]\!],\ i\in J_{K-1}, \tag{3.21}$$

$$\widehat{\omega}_i(t)=(\xi_{\varkappa(i+2)}-t)(\xi_{\varkappa(i+2)}-\xi_{\varkappa(i+1)})^{-1} \\ \text{при} \quad t\in[\![\xi_{\varkappa(i+1)},\xi_{\varkappa(i+2)}^{\,-}]\!],\ i\in J'_{K-2}, \tag{3.22}$$

$$\widehat{\omega}_i(t)=0 \quad \text{при} \quad t\in[\![a,b]\!]\setminus[\![\xi_{\varkappa(i)}^{\,+},\xi_{\varkappa(i+2)}^{\,-}]\!]. \tag{3.23}$$

Ясно, что

$$\widehat{\omega}_i(\xi_{\varkappa(i+1)}) = 1 \quad \forall i \in {J'}_{K-1}. \tag{3.24}$$

Замечание 2. Носителем функции $\widehat{\omega}_i$ назовем множество, состоящее из тех узлов сетки X, в которых эта функция отлична от нуля, а кратностью накрытия $\kappa(t)$ точки $t \in X$ носителями функций $\widehat{\omega}_i$ назовем число функций, отличных от нуля в точке t. Ясно, что $1 \leqslant \kappa(t) \leqslant 2$, а кроме того $\kappa(t) = 2$ $\forall t \in X \setminus \widehat{X}$, или (что то же самое)

$$\kappa(\xi_s) = 2 \qquad \forall s \in J_M \backslash J^*. \tag{3.25}$$

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$\operatorname{supp} \widehat{\omega}_i = [\![\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+2}]\!]. \tag{3.26}$$

§4. Калибровочные соотношения

Сплайны $\widehat{\omega}_i$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций сплайнов ω_j

$$\widehat{\omega}_i(t) = \sum_{j \in {J'}_{M-1}} \mathfrak{p}_{i,j}\omega_j(t) \quad \forall t \in [\![a, b]\!], \quad i \in {J'}_{K-1}, \tag{4.1}$$

называемых *калибровочными соотношениями.*

При фиксированном $t \in X$ в сумме (4.1) имеется одно слагаемое, так что (4.1) можно рассматривать как разложение вектора $\widehat{\omega}_i$ по ортогональной (в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{M+1}$) системе векторов ω_j.

Лемма 2. *Для чисел* $\mathfrak{p}_{i,j}$ *справедливы следующие формулы:*

$$\mathfrak{p}_{-1,j} = \widehat{\omega}_{-1}(\xi_{j+1}) \qquad \forall j \in \{\varkappa(0)-1, \varkappa(0), \dots, \varkappa(1)-2\}, \tag{4.2}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \widehat{\omega}_i(\xi_{j+1}) \qquad \forall j \in \{\varkappa(i), \varkappa(i)+1, \dots, \varkappa(i+2)-2\} \quad \forall i \in J_{K-2}, \tag{4.3}$$

$$\mathfrak{p}_{K-1,j} = \widehat{\omega}_{K-1}(\xi_{j+1}) \qquad \forall j \in \{\varkappa(K-1), \varkappa(K-1)+1, \dots, \varkappa(K)-1\}; \tag{4.4}$$

числа $\mathfrak{p}_{r,s}$, $r \in {J'}_{K-1}$, $s \in {J'}_{M-1}$, *не упомянутые в этих формулах, равны нулю.*

Доказательство. Применяя функционалы $g^{(j)}$ в (4.1) и учитывая соотношения (3.2)–(3.3), имеем

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = \sum_{j=\varkappa(0)-1}^{\varkappa(1)-2} \widehat{\omega}_{-1}(\xi_{j+1})\omega_j(t) \quad \text{при} \quad t \in [\![\xi_{\varkappa(0)}, \xi^{\,+}_{\varkappa(1)}]\!], \tag{4.5}$$

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \setminus [\![\xi_{\varkappa(0)}, \xi^{\,+}_{\varkappa(1)}]\!], \tag{4.6}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = \sum_{j=\varkappa(i)}^{\varkappa(i+2)-2} \widehat{\omega}_i(\xi_{j+1})\omega_j(t) \quad \text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!], \tag{4.7}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \setminus [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!], \quad i \in J_{K-2}, \tag{4.8}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = \sum_{j=\varkappa(K-1)}^{\varkappa(K)-1} \widehat{\omega}_{K-1}(\xi_{j+1})\omega_j(t) \quad \text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(K-1)}, \xi_{\varkappa(K)}]\!], \tag{4.9}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \setminus [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(K-1)}, \xi_{\varkappa(K)}]\!]. \tag{4.10}$$

Из формул (4.5)–(4.10) следуют соотношения (4.2)–(4.4). □

Лемма 3. *Числа $\mathfrak{p}_{i,j}$ могут быть представлены в следующем виде:*

$$\mathfrak{p}_{-1,j} = (\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{\varkappa(0)})^{-1}(\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{j+1}) \quad \forall j \in \{\varkappa(0)-1, \varkappa(0), \ldots, \varkappa(1)-2\}, \tag{4.11}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = (\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{\varkappa(i)})^{-1}(\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(i)}) \quad \forall j \in \{\varkappa(i), \varkappa(i)+1, \ldots, \varkappa(i+1)-1\} \quad \forall i \in J_{K-2}, \tag{4.12}$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = (\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{\varkappa(i+1)})^{-1}(\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{j+1}) \quad \forall j \in \{\varkappa(i+1), \varkappa(i)+1, \ldots, \varkappa(i+2)-2\} \quad \forall i \in J_{K-2}, \tag{4.13}$$

$$\mathfrak{p}_{K-1,j} = (\xi_{\varkappa(K)} - \xi_{\varkappa(K-1)})^{-1}(\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(K-1)}) \quad \forall j \in \{\varkappa(K-1), \varkappa(K-1)+1, \ldots, \varkappa(K)-1\}; \tag{4.14}$$

числа $\mathfrak{p}_{r,s}$, $r \in J'_{K-1}$, $s \in J'_{M-1}$, не фигурирующие в этих формулах, равны нулю.

Доказательство. С учетом соотношений (3.14)–(3.20) представления (4.5)–(4.10) могут быть записаны в следующей форме:

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = (\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{\varkappa(0)})^{-1} \sum_{j=\varkappa(0)-1}^{\varkappa(1)-2} (\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{j+1}) \cdot \omega_j(t) \quad \text{при} \quad t \in [\![\xi_{\varkappa(0)}, \xi^{\,+}_{\varkappa(1)}]\!], \tag{4.15}$$

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \setminus [\![\xi_{\varkappa(0)}, \xi^{\,+}_{\varkappa(1)}]\!], \tag{4.16}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = (\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{\varkappa(i)})^{-1} \sum_{j=\varkappa(i)}^{\varkappa(i+1)-1} (\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(i)}) \cdot \omega_j(t)$$

$$\text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi_{\varkappa(i+1)}]\!], \tag{4.17}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = (\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{\varkappa(i+1)})^{-1} \sum_{j=\varkappa(i+1)}^{\varkappa(i+2)-2} (\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{j+1}) \cdot \omega_j(t)$$

$$\text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i+1)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!], \tag{4.18}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \setminus [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(i)}, \xi^{\,-}_{\varkappa(i+2)}]\!], \quad i \in J_{K-2}, \tag{4.19}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = (\xi_{\varkappa(K)} - \xi_{\varkappa(K-1)})^{-1} \sum_{j=\varkappa(K-1)}^{\varkappa(K)-1} (\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(K-1)}) \cdot \omega_j(t)$$

$$\text{при} \quad t \in [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(K-1)}, \xi_{\varkappa(K)}]\!], \tag{4.20}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [\![a,b]\!] \setminus [\![\xi^{\,+}_{\varkappa(K-1)}, \xi_{\varkappa(K)}]\!]. \tag{4.21}$$

Из (4.15)–(4.21) получаем соотношения (4.11)–(4.14). □

Рассмотрим функционалы

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(\widehat{x}_{i+1}) \quad \forall u \in C[\![a,b]\!], \quad i \in J\,'_{K-1}. \tag{4.22}$$

Лемма 4. *Система функционалов* (4.22) *биортогональна системе сплайнов* $\{\widehat{\omega}_j\}_{j \in J\,'_{K-1}}$*:*

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, \widehat{\omega}_j \rangle = \delta_{i,j} \qquad \forall i,j \in J\,'_{K-1}. \tag{4.23}$$

Доказательство соотношений (4.23) легко получается из формул (3.7)–(3.13) применением к ним функционалов (4.22). □

Лемма 5. *Справедливы равенства*

$$\widehat{g}^{(i)} = g^{(\varkappa(i+1)-1)} \quad \textit{при} \quad i \in J\,'_{K-1}. \tag{4.24}$$

Доказательство. Используя соотношения (3.2), (3.4)–(3.6) и (4.22), для $u \in C[\![a,b]\!]$ и $i \in J\,'_{K-1}$ имеем

$$\langle \widehat{g}^{(i)}, u \rangle = u(\widehat{x}_{i+1}) = u(\xi_{\varkappa(i+1)}) = \langle g^{\varkappa(i+1)-1}, u \rangle;$$

последнее эквивалентно равенствам (4.24). □

Следствие 1. *Верно равенство*

$$\widehat{g}^{(\varkappa^{-1}(j+1)-1)} = g^{(j)} \qquad \forall j+1 \in J^*. \tag{4.25}$$

Доказательство. В (4.24) положим $j = \varkappa(i+1) - 1$. Поскольку $i \in {J'}_{K-1}$, то $i+1 \in J_K$, и согласно определению J^* (см. формулу (3.5)) имеем $\varkappa(i+1) \in J^*$. Итак, $j+1 \in J^*$ и $i = \varkappa^{-1}(j+1) - 1$. Подставляя полученное i в (4.24), находим (4.25). $\square$

§5. Матрица сужения и ее свойства

Рассмотрим матрицу $\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{i,j})$, $i \in {J'}_{K-1}, j \in {J'}_{M-1}$, называемую матрицей сужения; здесь, как и прежде,

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \langle g^{(j)}, \widehat{\omega}_i \rangle. \tag{5.1}$$

Введем упорядоченные (по возрастанию) подмножества множества целых чисел, обозначая

$$J^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, \dots, \varkappa(1) - 2\}, \tag{5.2}$$

$$J^1(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varkappa(r), \dots, \varkappa(r+1) - 1\} \qquad \forall r \in J_{K-1}, \tag{5.3}$$

$$J^2(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varkappa(r+1), \dots, \varkappa(r+2) - 2\} \qquad \forall r \in J_{K-2}, \tag{5.4}$$

$$J(r) \stackrel{\text{def}}{=} J^1(r) \bigcup J^2(r) \quad \forall r \in J_{K-2}, \qquad J(K-1) \stackrel{\text{def}}{=} J^1(K-1). \tag{5.5}$$

Условимся считать множество пустым, если первое из выписанных чисел больше последнего.

Замечание 3. Согласно только что введенным соглашениям, равенство $J^2(r) = \varnothing$ эквивалентно соотношению $\varkappa(r+2) - \varkappa(r+1) < 2$. Поскольку $\varkappa(s)$ – возрастающая целочисленная функция (так что $\varkappa(r+2) - \varkappa(r+1) \geqslant 1$), то множество $J^2(r)$ может быть пустым лишь в том случае, когда $\varkappa(r+2) = \varkappa(r+1) + 1$. Множество $J^1(r)$ не может оказаться пустым, ибо неравенство $\varkappa(r+1) - \varkappa(r) < 1$ для функции $\varkappa(s)$ невозможно. Легко видеть, что множества J^0 и $J(K-1)$ также не могут быть пустыми.

Теорема 1. *Справедливы калибровочные соотношения*

$$\widehat{\omega}_r(t) = \sum_{q \in {J'}_{M-1}} \mathfrak{p}_{r,q} \omega_q(t) \qquad \forall t \in [\![a, b]\!], \quad r \in {J'}_{K-1}, \tag{5.6}$$

где

$$\mathfrak{p}_{-1,q} = \frac{\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{q+1}}{\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{\varkappa(0)}}, \qquad q \in J^0, \tag{5.7}$$

$$\mathfrak{p}_{r,q} = \frac{\xi_{q+1} - \xi_{\varkappa(r)}}{\xi_{\varkappa(r+1)} - \xi_{\varkappa(r)}}, \qquad q \in J^1(r), \quad r \in J_{K-1}, \tag{5.8}$$

$$\mathfrak{p}_{r,q} = \frac{\xi_{\varkappa(r+2)} - \xi_{q+1}}{\xi_{\varkappa(r+2)} - \xi_{\varkappa(r+1)}}, \qquad q \in J^2(r), \quad r \in J_{K-2}, \tag{5.9}$$

а неупомянутые в формулах (5.7)–(5.9) *элементы* $\mathfrak{p}_{r,q}$ *матрицы* $\mathfrak{P}$ *равны нулю.*

Доказательство. Заметим, что соотношения (5.8) и (5.9) непротиворечивы, ибо при заданном r множества $J^1(r)$ и $J^2(r)$ не пересекаются. Нетрудно видеть, что формулы (5.6)–(5.9) являются другой формой записи установленных ранее формул (4.15)–(4.21). □

Следствие 2. *Калибровочные соотношения* (5.6)–(5.9) *для* $\forall t \in [\![a,b]\!]$ *могут быть представлены в виде*

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = \sum_{j \in J^0} \mathfrak{p}_{-1,j}\omega_j(t), \tag{5.10}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = \sum_{j \in J(i)} \mathfrak{p}_{i,j}\omega_j(t), \qquad i \in {J'}_{K-2}, \tag{5.11}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = \sum_{j \in J^1(K-1)} \mathfrak{p}_{K-1,j}\omega_j(t) \quad \forall t \in [\![a,b]\!], \tag{5.12}$$

а также в виде

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = \sum_{j \in J^0} \frac{\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{j+1}}{\xi_{\varkappa(1)} - \xi_{\varkappa(0)}}\omega_j(t), \tag{5.13}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = \sum_{j \in J^1(i)} \frac{\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(i)}}{\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{\varkappa(i)}}\omega_j(t) + \sum_{j \in J^2(i)} \frac{\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{j+1}}{\xi_{\varkappa(i+2)} - \xi_{\varkappa(i+1)}}\omega_j(t),$$
$$i \in J_{K-2}, \tag{5.14}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = \sum_{j \in J^1(K-1)} \frac{\xi_{j+1} - \xi_{\varkappa(K-1)}}{\xi_{\varkappa(K)} - \xi_{\varkappa(K-1)}}\omega_j(t) \quad \forall t \in [\![a,b]\!]. \tag{5.15}$$

Доказательство. Формулы (5.10)–(5.15) очевидным образом следуют из теоремы 1 (они эквивалентны соотношениям (5.6)–(5.9)). □

Следствие 3. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{i,\varkappa(i+1)-1} = 1 \qquad \forall i \in {J'}_{K-1}. \tag{5.16}$$

Если при фиксированном $i \in J_{K-2}$

$$\varkappa(i+1) = \varkappa(i) + 1, \quad \varkappa(i+2) = \varkappa(i+1) + 1, \tag{5.17}$$

то (кроме единичного элемента, указанного формулой (5.16)) *все остальные элементы i-й строки равны нулю, так что*

$$\mathfrak{p}_{i,s} = \delta_{\varkappa(i+1)-1,\, s} \qquad \forall s \in J'_{M-1}. \tag{5.18}$$

Если выполнено условие $\varkappa(1) = 1$, *то формула* (5.18) *верна для* $i = -1$, *а если* $\varkappa(K-1) = M-1$, *то упомянутая формула верна при* $i = K-1$.

Доказательство. При $i = -1$ формулу (5.16) получаем из (5.7), полагая там $q = -1$. Если $i \in J_{K-1}$, то (5.16) вытекает из (5.8) при $q = \varkappa(i+1) - 1$.

Если $i \in J_{K-2}$, то при условии (5.17) множество индексов $J^1(i)$ состоит из одного элемента, $J^1(i) = \{\varkappa(i)\}$, а множество индексов $J^2(i)$ пусто. В соответствии с теоремой 1 это означает, что элементы $\mathfrak{p}_{i,q}$ матрицы $\mathfrak{P}$ для $q \neq \varkappa(i+1) - 1$ равны нулю, и, следовательно, верно соотношение (5.18).

Если $\varkappa(1) = 1$, то $J^0 = \{-1\}$, и поэтому (согласно теореме 1) верна формула (5.18) при $i = -1$, а если $\varkappa(K-1) = M-1$, то $J^1(K-1) = \{M-1\}$, откуда (снова используем теорему 1) выводим формулу (5.18) при $i = K-1$. □

Следствие 4. *Если* $j+1 \in J^*$, *то в j-м столбце матрицы $\mathfrak{P}$ на i-м месте,* $i = \varkappa^{-1}(j+1) - 1$, *находится единица; остальные элементы этого столбца – нули, так что*

$$\mathfrak{p}_{r,j} = \delta_{r,\varkappa^{-1}(j+1)-1} \qquad \forall r \in J'_{K-1}. \tag{5.19}$$

Доказательство. Для доказательства используем формулы (5.1) для чисел $p_{r,j}$, формулу (4.25) и свойство (4.23). При любом $r \in J'_{K-1}$ имеем

$$p_{r,j} = \langle g^{(j)}, \widehat{\omega}_r \rangle = \langle \widehat{g}^{(\varkappa^{-1}(j+1)-1)}, \widehat{\omega}_r \rangle \qquad \forall\, r \in J'_{K-1},$$

откуда вытекает соотношение (5.19). □

§6. Дискретное сплайн-всплесковое разложение

Обозначим $\mathbb{S}(\widehat{X})$ линейное пространство, являющееся линейной оболочкой функций $\widehat{\omega}_j$:

$$\mathbb{S}(\widehat{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\{\widehat{\omega}_i(t) \mid \forall t \in [\![a,b]\!] \quad \forall i \in J'_{K-1}\}.$$

Пространство $\mathbb{S}(\widehat{X})$ называется *пространством дискретных сплайнов первой степени на сетке* $\widehat{X}$.

Заметим, что построения, относящиеся к ранее предложенному (см. [3]) всплесковому разложению для функций, заданных на континууме, годятся и в рассматриваемом здесь случае дискретных числовых потоков. Для удобства чтения данной работы и учитывая, что эти построения занимают весьма мало места, приведем их здесь.

Поскольку $\mathbb{S}(\widehat{X}) \subset C[\![a,b]\!]$, то можно рассмотреть оператор P проецирования пространства $C[\![a,b]\!]$ на подпространство $\mathbb{S}(\widehat{X})$:

$$Pu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in {J'}_{K-1}} \langle \widehat{g}^{(i)}, u\rangle\, \widehat{\omega}_i \quad \forall u \in C[\![a,b]\!]; \tag{6.1}$$

пусть $Q = I - P$, где I – оператор, тождественный в $C[\![a,b]\!]$.

Итак, в соответствии с (6.1) получаем прямое разложение

$$C[\![a,b]\!] = \mathbb{S}(\widehat{X}) \dot{+} \mathbb{W}, \tag{6.2}$$

где $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} QC[\![a,b]\!]$. Пространство $\mathbb{S}(\widehat{X})$ называется *основным пространством*, а $\mathbb{W}$ – *пространством всплесков (вэйвлетов)* в *всплесковом разложении* (6.2) пространства $C[\![a,b]\!]$.

Пусть $u \in C[\![a,b]\!]$; используя соотношение (6.2), получаем два представления элемента u

$$u = \sum_{s\in {J'}_{M-1}} c_s\omega_s, \tag{6.3}$$

а также

$$u = \widehat{u} + w, \tag{6.4}$$

где

$$\widehat{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in {J'}_{K-1}} a_i\widehat{\omega}_i, \qquad w \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\in {J'}_{M-1}} b_j\omega_j,$$

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widehat{g}^{(i)}, u\rangle \quad \forall i \in {J'}_{K-1}, \quad b_j,\ c_s\ \in \mathbb{R}^1 \quad \forall j,s \in {J'}_{M-1}. \tag{6.5}$$

Очевидно, соотношение (6.4) представляет всплесковое разложение элемента $u \in C[\![a,b]\!]$, где $\widehat{u} \in \mathbb{S}(\widehat{X})$, а $w \in \mathbb{W}$.

Из (6.3)–(6.4) имеем

$$\sum_{j\in {J'}_{M-1}} c_j\omega_j = \sum_{i\in {J'}_{K-1}} a_i \sum_{j\in {J'}_{M-1}} \mathfrak{p}_{i,j}\omega_j + \sum_{j\in {J'}_{M-1}} b_j\omega_j,$$

откуда ввиду линейной независимости системы $\{\omega_j\}_{j\in J'_{M-1}}$ получаем *формулы реконструкции*

$$c_j = \sum_{i\in J'_{K-1}} a_i \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \qquad \forall j \in J'_{M-1}. \tag{6.6}$$

Используя представление (6.5), перепишем формулы (6.6) в виде

$$c_j = \sum_{i\in J'_{K-1}} \langle \widehat{g}^{(i)}, u\rangle \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \qquad \forall j \in J'_{M-1}$$

и подставим сюда u из соотношения (6.3):

$$c_j = \sum_{i\in J'_{K-1}} \sum_{s\in J'_{M-1}} c_s \langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s\rangle \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \qquad \forall j \in J'_{M-1};$$

отсюда

$$b_j = c_j - \sum_{i\in J'_{K-1}} \sum_{s\in J'_{M-1}} c_s \langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s\rangle \mathfrak{p}_{i,j} \qquad \forall j \in J'_{M-1}. \tag{6.7}$$

Подставляя (6.3) в (6.5), имеем

$$a_i = \langle \widehat{g}^{(i)}, \sum_{s\in J'_{M-1}} c_s \omega_s\rangle \qquad \forall i \in J'_{K-1},$$

так что

$$a_i = \sum_{s\in J'_{M-1}} c_s \langle \widehat{g}^{(i)}, \omega_s\rangle \qquad \forall i \in J'_{K-1}. \tag{6.8}$$

Формулы (6.7) и (6.8) называются *формулами декомпозиции.*

§7. Матрица продолжения

Полагая

$$\mathfrak{q}_{s,j} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \langle \widehat{g}^{(s)}, \omega_j\rangle, \tag{7.1}$$

рассмотрим матрицу $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\mathfrak{q}_{s,j})_{s\in J'_{K-1},\, j\in J'_{M-1}}$; эту матрицу называем *матрицей продолжения.*

Лемма 6. *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{s,j} = \delta_{\varkappa(s+1)-1,\, j} \qquad \textit{при} \quad s \in J'_{K-1},\ j \in J'_{M-1}. \tag{7.2}$$

Доказательство. Из формул (3.3), (4.22), (4.24), (6.8) и (7.1), имеем

$$\mathfrak{q}_{s,j} = \langle \widehat{g}^{(s)}, \omega_j\rangle = \langle g^{\varkappa(s+1)-1}, \omega_j\rangle = \delta_{\varkappa(s+1)-1,\, j}.$$

Формула (7.2) доказана. □

Следствие 5. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *нулевыми являются те столбцы* $\mathfrak{q}^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\mathfrak{q}_{sj})_{s\in J'_{K-1}}$ *матрицы* $\mathfrak{Q}$, *номер* j *которых удовлетворяет условию* $j+1 \notin J^*$;

2) *остальные столбцы, т.е. столбцы, номер* j *которых удовлетворяет условию* $j+1 \in J^*$, *содержат единицу на месте* s_0, *где* $\varkappa(s_0+1) = j+1$; *остальные элементы* j*-го столбца равны нулю.*

Доказательство. Из формулы (7.2) получаем $\mathfrak{q}_{s,j} = \delta_{\varkappa(s+1),\, j+1}$, а поскольку $\varkappa(s+1) \in J^*$ и $j+1 \notin J^*$, то $\varkappa(s+1) \neq j+1$, и значит $\mathfrak{q}_{s,j} = 0$; первый пункт следствия доказан.

Если $j+1 \in J^*$, то существует единственное s_0 такое, что $s_0+1 \in J_K$ и $j+1 = \varkappa(s_0+1)$; из формулы (7.2) имеем $\mathfrak{q}_{s_0,j} = 1$, а для $s \neq s_0$ из той же формулы получаем $\mathfrak{q}_{s_0,j} = 0$. Теперь доказан и второй пункт следствия. $\square$

Следствие 6. *Матрица* $\mathfrak{Q}$ *является левой обратной к матрице* $\mathfrak{P}^T$:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I, \tag{7.3}$$

где I *– единичная матрица размеров* $(K+1)\times(K+1)$.

Доказательство. Для элемента $[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{i,j}$ матрицы $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T$ имеем

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{i,j} = \sum_{s\in J'_{M-1}} \mathfrak{q}_{is}\mathfrak{p}_{js}, \quad i,j \in J'_{K-1}.$$

Согласно формуле (7.2), отсюда получаем

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{i,j} = \sum_{s\in J'_{M-1}} \delta_{\varkappa(i+1)-1,s}\mathfrak{p}_{js} = \mathfrak{p}_{j,\varkappa(i+1)-1}. \tag{7.4}$$

Используя представление (4.22) и формулу (4.23), находим

$$\mathfrak{p}_{j,\varkappa(i+1)-1} = \langle g^{\varkappa(i+1)-1}, \widehat{\omega}_j\rangle = \langle \widehat{g}^{(i)}, \widehat{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j}, \quad i,j \in J'_{K-1}. \tag{7.5}$$

Из (7.4) и (7.5) выводим (7.3). $\square$

§8. Потоки. Формулы декомпозиции

Введем в рассмотрение три вектора

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{K-1}),$$

$$\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{M-1}),$$

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{M-1})$$

и будем называть их основным, всплесковым и исходным числовыми потоками. Линейные пространства этих потоков обозначим $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ соответственно.

Соотношениями

$$\widetilde{u} = \sum_{i \in J'_{K-1}} a_i \widetilde{\omega}_i, \quad w = \sum_{i \in J'_{N-1}} b_i \omega_i, \quad u = \sum_{i \in J'_{N-1}} c_i \omega_i \tag{8.1}$$

устанавливаются линейные изоморфизмы только что введенных пространств и пространств $\mathbb{S}(\widehat{X})$, $\mathbb{W}$, $C[\![a,b]\!]$:

$$\mathcal{A} \sim \mathbb{S}(\widehat{X}), \qquad \mathcal{B} \sim \mathbb{W}, \qquad \mathcal{C} \sim C[\![a,b]\!]. \tag{8.2}$$

Ввиду этих изоморфизмов имеем

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \dotplus \mathcal{B}.$$

Используя введенные векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и матрицы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$, перепишем формулы (6.6)–(6.8) в виде

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathfrak{P}^T \mathbf{a}, \tag{8.3}$$

$$\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c}. \tag{8.4}$$

Лемма 7. *Элементы* $[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{i,j}$, $i, j \in J'_{M-1}$, *матричного произведения* $\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}$ *определяются формулами*

$$[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{i,j} = 0 \qquad \textit{при} \quad i \in J'_{M-1},\ j+1 \in J_M \setminus J^*, \tag{8.5}$$

$$[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{i,j} = \mathfrak{p}_{\varkappa^{-1}(j+1)-1,i} \qquad \textit{при} \quad i \in J'_{M-1},\ j+1 \in J^*. \tag{8.6}$$

Доказательство. При $j+1 \in J^*$, согласно формуле (7.2), имеем

$$\mathfrak{q}_{s,j} = \delta_{\varkappa(s+1)-1,j} = \delta_{\varkappa(s+1),j+1} = \delta_{s+1,\varkappa^{-1}(j+1)} = \delta_{s,\varkappa^{-1}(j+1)-1} \tag{8.7}$$

$$\forall s \in J'_{K-1} \quad \forall j+1 \in J^*, \tag{8.8}$$

а при $j+1 \in J_M \backslash J^*$ получаем

$$\mathfrak{q}_{s,j} = \delta_{\varkappa(s+1),j+1} = 0 \qquad \forall s \in J'_{K-1} \quad \forall j+1 \in J_M \setminus J^*. \tag{8.9}$$

При $j+1 \in J^*$ из (8.7)–(8.8) следует, что

$$[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{i,j} = \sum_{s \in J'_{K-1}} \mathfrak{p}_{s,i} \mathfrak{q}_{s,j} = \mathfrak{p}_{\varkappa^{-1}(j+1)-1,i} \qquad \text{при} \quad i \in J'_{M-1}.$$

Если $j+1 \in J_M \setminus J^*$, то из (8.9) имеем

$$[\mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}]_{i,j} = 0 \qquad \text{при} \quad i \in J'_{M-1},\ j+1 \in J_M \setminus J^*.$$

Итак, формулы (8.5)–(8.6) доказаны. □

Следствие 7. *Если* $i+1,\ j+1 \in J^*$, *то*

$$[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{i,j} = \delta_{i,j}. \tag{8.10}$$

Доказательство. Учитывая, что $j+1 \in J^*$, положим

$$r = \varkappa^{-1}(j+1) - 1. \tag{8.11}$$

Ясно, что $r \in J'_{K-1}$ и $j = \varkappa(r+1) - 1$. Согласно формуле (8.6), имеем

$$[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{i,j} = \mathfrak{p}_{\varkappa^{-1}(j+1)-1,i} = \mathfrak{p}_{r,i} \qquad \text{при} \quad i \in J'_{M-1},\ j+1 \in J^*. \tag{8.12}$$

Поскольку по условию $i+1 \in J^*$, то выполнены условия следствия 4 (с $j = i$), и поэтому, согласно формуле (5.19), получаем

$$\mathfrak{p}_{r,i} = \delta_{r,\varkappa^{-1}(i+1)-1}. \tag{8.13}$$

Учитывая (8.13) в соотношении (8.12), находим

$$[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{i,j} = \delta_{r,\varkappa^{-1}(i+1)-1}. \tag{8.14}$$

Подставляя r из (8.11) в соотношение (8.14), после элементарных преобразований находим

$$[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{i,j} = \delta_{\varkappa^{-1}(j+1)-1,\varkappa^{-1}(i+1)-1} = \delta_{i,j}.$$

Этим доказана формула (8.10). □

Теорема 2. *Для формул декомпозиции справедливы соотношения*

$$a_i = c_{\varkappa(i+1)-1} \quad \forall i \in J'_{K-1}, \tag{8.15}$$

$$b_q = 0 \quad \forall q+1 \in J^*, \tag{8.16}$$

$$b_q = c_q - \sum_{j \in J'_{K-1}} \langle g^{(q)}, \widehat{\omega}_j \rangle c_{\varkappa(j+1)-1} \quad \forall q+1 \in J_M \setminus J^*. \tag{8.17}$$

Доказательство. Из (6.8) и (7.1)–(7.2) при $i \in J'_{K-1}$ имеем

$$a_i = \sum_{j \in J'_{M-1}} \mathfrak{q}_{ij} c_j = \sum_{j \in J'_{M-1}} \delta_{\varkappa(i+1)-1} c_j = c_{\varkappa(i+1)-1}.$$

Итак, формула (8.15) установлена.

Из второго соотношения (8.4) имеем

$$b_q = c_q - [\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\mathbf{c}]_q \qquad \forall q \in J'_{M-1},$$

так что

$$b_q = c_q - \sum_{s \in J'_{M-1}} [\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{q,s}\, c_s.$$

Учитывая формулы (8.5),

$$[\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{q,s} = 0 \qquad \text{при} \quad s+1 \notin J^* \quad \forall q \in J'_{M-1},$$

получаем

$$b_q = c_q - \sum_{s+1\in J^*} [\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}]_{q,s}\, c_s.$$

Из (8.6) следует, что

$$b_q = c_q - \sum_{s+1\in J^*} \mathfrak{p}_{\varkappa^{-1}(s+1)-1,q}\, c_s. \tag{8.18}$$

Из (5.19) при $q+1 \in J^*$ получаем

$$\mathfrak{p}_{\varkappa^{-1}(s+1)-1,q} = \delta_{s,q},$$

откуда находим

$$b_q = c_q - \sum_{s+1\in J^*} \delta_{s,q}\, c_s = 0, \quad q+1 \in J^*.$$

Этим доказана формула (8.16).

Теперь обратимся к случаю $q+1 \in J_M \setminus J^*$.

Используя биективное соответствие $\varkappa: \quad J_K \longrightarrow J^*$ (см. (3.4)–(3.5)), в формуле (8.18) сделаем подстановку в индексе суммирования:

$$j = \varkappa^{-1}(s+1) - 1 \iff s = \varkappa(j+1) - 1;$$

ясно, что $j \in J'_{K-1}$. В результате получаем

$$b_q = c_q - \sum_{j\in J'_{K-1}} \mathfrak{p}_{j,\,q}\, c_{\varkappa(j+1)-1}.$$

Применяя формулу (5.1), выводим соотношение (8.17). □

Теорема 3. *Для всплескового потока при $q+1 \in J_M \backslash J^*$ верны равенства*

$$b_q = c_q - (\widehat{x}_{s+1} - \widehat{x}_s)^{-1}\Big[(\widehat{x}_{s+1} - \xi_{q+1})c_{\varkappa(s)-1} + (\xi_{q+1} - \widehat{x}_s)c_{\varkappa(s+1)-1}\Big], \tag{8.19}$$

где

$$\widehat{x}_s < \xi_{q+1} < \widehat{x}_{s+1}. \tag{8.20}$$

Доказательство. Заметим, что отличными от нуля слагаемыми в соотношении (8.17) являются разве лишь те, для которых $\langle g^{(q)}, \widehat{\omega}_j\rangle \neq 0$; в силу определения (3.2) последнее эквивалентно соотношению

$$\widehat{\omega}_j(\xi_{q+1}) \neq 0.$$

Выберем $s \in J_K$ так, чтобы выполнялось неравенство (8.20); ввиду условия $q+1 \in J_M \backslash J^*$ такое s существует и единственно. Учитывая соотношение $\operatorname{supp} \widehat{\omega}_j = [\![\widehat{x}_j^+, \widehat{x}_{j+2}^-]\!]$ (см. (3.26)), видим, что под знаком суммы в (8.17) имеется не более двух ненулевых слагаемых, а именно слагаемые, соответствующие значениям $j = s-1$ и $j = s$. Итак,

$$b_q = c_q - \langle g^{(q)}, \widehat{\omega}_{s-1} \rangle c_{\varkappa(s)-1} - \langle g^{(q)}, \widehat{\omega}_s \rangle c_{\varkappa(s+1)-1}. \tag{8.21}$$

Для завершения доказательства в соотношении (8.21) осталось воспользоваться формулами (3.7)–(3.13). □

Следствие 8. *Формуле* (8.17) *можно придать вид*

$$b_q = c_q - \mathfrak{p}_{s-1,q} c_{\varkappa(s)-1} - \mathfrak{p}_{s,q} c_{\varkappa(s+1)-1}, \tag{8.22}$$

где s удовлетворяет соотношению (8.20).

Следствие 9. *Пространство всплесковых потоков $\mathcal{B}$ имеет вид*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} = (b_{-1}, b_0, \dots, b_{M-1}) \quad \forall b_{j-1} \in \mathbb{R}^1, \\ j \in J_M \setminus J^*; \quad b_{i-1} = 0 \quad \forall i \in J^*\}; \end{aligned} \tag{8.23}$$

таким образом, пространство всплесковых потоков является линейной оболочкой ортонормированной[1] *системы*

$$\mathbf{e}_j \stackrel{\text{def}}{=\!=} ([\mathbf{e}_j]_{-1}, [\mathbf{e}_j]_0, \dots, [\mathbf{e}_j]_{M-1}),$$

где $[\mathbf{e}_j]_i = \delta_{i,j}$, $i, j \in J'_{M-1}$.

Доказательство. Известно (см. [5]), что пространство всплесковых потоков совпадает с ядром оператора $\mathfrak{Q}$. Поскольку

$$\mathfrak{Q}\mathbf{b} = 0 \quad \iff \quad \sum_{j \in J'_{M-1}} \mathfrak{q}_{ij}\, b_j = 0 \qquad \forall i \in J'_{K-1},$$

то, ввиду соотношения (7.2), имеем

$$\sum_{j \in J'_{M-1}} \delta_{\varkappa(i+1)-1,j}\, q_{ij}\, b_j = 0 \qquad \forall i \in J'_{K-1}$$

$$\iff \quad b_{\varkappa(i+1)-1} = 0 \qquad \forall i \in J'_{K-1}.$$

Таким образом (см. также (8.16)), нулевыми оказываются следующие компоненты всплескового потока:

$$b_{j-1} = 0 \qquad \forall j \in J^*.$$

[1] В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{M+1}$ со стандартным скалярным произведением.

Остальные компоненты – произвольные; они определяют пространство $\mathcal{B}$ всплесковых потоков в представлении (8.2). Формула (8.23) доказана. $\square$

§9. Иллюстративный пример всплескового разложения

Здесь приведем иллюстративный пример.

Положим $M = 10$ и на сеточном отрезке $[\![a, b]\!]$ рассмотрим сетку

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_9 < \xi_{10} = b;$$

в качестве дискретного базиса (3.1) рассмотрим элементы

$$\{\omega_j(t)\}_{j \in {J'}_{M-1}}$$

пространства $C[\![a, b]\!]$:

$$\omega_j(\xi_s) = \delta_{s,j+1}, \qquad s \in J_{10}, \tag{9.1}$$

а также линейные функционалы $g^{(i)}$, $i \in {J'}_9$, определяемые формулой

$$\langle g^{(i)}, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(\xi_{i+1}) \qquad \forall u \in C[\![a, b]\!], \tag{9.2}$$

где

$$J_{10} = \{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}, \qquad {J'}_9 = \{-1, 0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Рассмотрим новую сетку

$$\widehat{X}: \quad a = \widehat{x}_0 < \widehat{x}_1 < \ldots < \widehat{x}_8 = b, \tag{9.3}$$

где $\widehat{x}_i \stackrel{\text{def}}{=\!=} \xi_{\varkappa(i)}$, $i \in J_8$, а отображение $\varkappa(i)$ определяется соотношениями

$$\varkappa(0) = 0,\ \varkappa(1) =,\ \ldots, \varkappa(5) = 5,\ \varkappa(6) = 8,\ \varkappa(7) = 9,\ \varkappa(8) = 10.$$

Итак, в рассматриваемом случае $K = 8$, а подмножество J^* множества J_{10}, получаемое по формуле (3.5), имеет вид

$$J^* = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\};$$

таким образом, $J_{10} \setminus J^* = \{6, 7\}$.

Из формулы (5.2) получаем $J^0 = \{-1\}$, а из (5.3) имеем $J^1(s) = \{s\}$ при $s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $J^1(5) = \{5, 6, 7\}$, $J^1(6) = \{8\}$.

Применяя формулу (5.4), находим $J^2(s) = \varnothing$ при $s \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$, $J^2(4) = \{5, 6\}$, из второй формулы в (5.5) выводим $J^1(7) = \{9\}$.

Наконец, согласно первой формуле (5.5), находим $J(s) = \{s\}$ при $s \in \{0, 1, 2, 3\}$, $J(4) = \{4, 5, 6\}$, $J(5) = \{5, 6, 7\}$, $J(s) = \{s + 2\}$ при $s \in \{6, 7\}$.

Введем функции $\widehat{\omega}_j(t)$, $j \in J'_7$, согласно формулам (3.7)–(3.13) и рассмотрим векторы

$$\widehat{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\omega}_{-1}(t), \widehat{\omega}_0(t), \ldots, \widehat{\omega}_7(t))^T,$$

$$\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_{-1}(t), \omega_0(t), \ldots, \omega_9(t))^T.$$

Из теоремы 1 (см. формулы (5.7)–(5.9)) следует, что калибровочные соотношения $\widehat{\omega}(t) = \mathfrak{P}\omega(t)$ определяются матрицей

$$\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\begin{array}{c} \\ -\widehat{1} \\ \widehat{0} \\ \widehat{1} \\ \widehat{2} \\ \widehat{3} \\ \widehat{4} \\ \widehat{5} \\ \widehat{6} \\ \widehat{7} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\xi_8-\xi_6}{\xi_8-\xi_5} & \frac{\xi_8-\xi_7}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_6-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & \frac{\xi_7-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array};$$

таким образом,

$$\widehat{\omega}_i(t) = \omega_i(t) \quad \text{при } i \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}, \tag{9.4}$$

$$\widehat{\omega}_4(t) = \omega_4(t) + \frac{\xi_8 - \xi_6}{\xi_8 - \xi_5} \cdot \omega_5(t) + \frac{\xi_7 - \xi_6}{\xi_8 - \xi_5} \cdot \omega_6(t), \tag{9.5}$$

$$\widehat{\omega}_5(t) = \frac{\xi_6 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5} \cdot \omega_5(t) + \frac{\xi_7 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5} \cdot \omega_6(t) + \omega_7(t), \tag{9.6}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = \omega_{i+2}(t) \quad \text{при } i \in \{6, 7\}. \tag{9.7}$$

Проиллюстрируем следствие 3 на рассматриваемом примере. Легко видеть, что условия (5.17) выполнены при $i \in \{0, 1, 2, 3, 6\}$ и справедливы соотношения (5.18) при $s \in J'_9$. Поскольку $\varkappa(1) = 1$, то формула (5.18) справедлива при $i = -1$, так что $p_{-1,s} = \delta_{-1,s}$ при $s \in J'_9$. Поскольку $K = 8$, то $\varkappa(K-1) = \varkappa(7) = 9$, так что выполнено условие $\varkappa(K-1) = M-1$, и поэтому формула (5.18) справедлива при $i = K-1 = 7$; таким образом, $p_{7,s} = \delta_{9,s}$ для $s \in J'_9$.

Еще проще иллюстрируется следствие 4. Условие $j+1 \in J^*$ в рассматриваемом случае эквивалентно условию

$$j \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}.$$

В дальнейшем понадобится результат траспонирования матрицы $\mathfrak{P}$:

$$\mathfrak{P}^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} -\widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{3} & \widehat{4} & \widehat{5} & \widehat{6} & \widehat{7} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_8-\xi_6}{\xi_8-\xi_5} & \frac{\xi_6-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_8-\xi_7}{\xi_8-\xi_5} & \frac{\xi_7-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Операция проецирования пространства $C[\![a,b]\!]$ исходных потоков $\mathbb{W}$ на пространство $\mathbb{S}(\widehat{X})$ основных потоков определяется способом продолжения биортогональной (к системе координатных сплайнов $\{\widehat{\omega}_j\}_{j\in J\,'_7}$) системы функционалов $\{\widehat{g}^{(j)}_{j\in J\,'_7}\}$ на пространство $C[\![a,b]\!]$ (см. (6.1), (6.8) и (8.2)). В конечном счете это проецирование означает применение матрицы продолжения $\mathfrak{Q}$ к исходному потоку $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$: $\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}$. Согласно формулам (7.2), в рассматриваемом случае матрица $\mathfrak{Q}$ имеет вид

$$\mathfrak{Q} = \begin{array}{c} \\ -\widehat{1} \\ \widehat{0} \\ \widehat{1} \\ \widehat{2} \\ \widehat{3} \\ \widehat{4} \\ \widehat{5} \\ \widehat{6} \\ \widehat{7} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

так что

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{c}_i \qquad \text{при} \quad i \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}, \tag{9.8}$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{c}_{i+2} \qquad \text{при} \quad i \in \{7, 8\}. \tag{9.9}$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I$, где I – единичная квадратная матрица размеров 9×9. Из (8.5)–(8.6) следует, что квадратная матрица $\mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}$ размеров 11×11, имеет вид

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_8-\xi_6}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 & \frac{\xi_6-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_8-\xi_7}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 & \frac{\xi_7-\xi_5}{\xi_8-\xi_5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Заметим, что компоненты всплескового потока $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\mathbf{c}$ заведомо равны нулю, если их номера j таковы, что числа $j+1$ содержатся в множестве J^*. Всплесковый поток $\mathbf{b}$ получается из исходного потока $\mathbf{c}$ по формулам (8.19). В рассматриваемом случае получаем

$$\mathbf{b}_j = 0 \qquad \text{при} \quad j \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}, \tag{9.10}$$

$$\mathbf{b}_5 = -\frac{\xi_8 - \xi_6}{\xi_8 - \xi_5}\mathbf{c}_4 + \mathbf{c}_5 - \frac{\xi_6 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5}\mathbf{c}_7, \tag{9.11}$$

$$\mathbf{b}_6 = -\frac{\xi_8 - \xi_7}{\xi_8 - \xi_5}\mathbf{c}_4 + \mathbf{c}_6 - \frac{\xi_7 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5}\mathbf{c}_7. \tag{9.12}$$

Формулы (9.8)–(9.12) являются формулами декомпозиции.

Используя формулу (8.3), получаем формулы реконструкции исходного потока $\mathbf{c}$:

$$c_j = a_j + b_j \qquad \text{при} \quad j \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}, \tag{9.13}$$

$$c_5 = \frac{\xi_8 - \xi_6}{\xi_8 - \xi_5} \cdot a_4 + \frac{\xi_6 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5} \cdot a_5 + b_5, \tag{9.14}$$

$$c_6 = \frac{\xi_8 - \xi_7}{\xi_8 - \xi_5} \cdot a_4 + \frac{\xi_7 - \xi_5}{\xi_8 - \xi_5} \cdot a_5 + b_6, \tag{9.15}$$

$$c_j = a_{j-2} + b_j \qquad \text{при} \quad j \in \{7, 8, 9\}. \tag{9.16}$$

§10. Континуальный образ дискретного всплескового разложения

Как было отмечено во введении, в отличие от большинства подходов к всплесковым (вэйвлетным) разложениям (см. [1, 2]) в данной работе не использовались стандартные пространства функций (такие, как $C[a,b]$, L_2 и т.п.): во всем изложении фигурировали лишь конечномерные пространства потоков. Хотя использованный подход позволяет поддерживать алгоритмическую структуру на всех этапах построений, однако, иногда может возникнуть ситуация, в которой необходимо применить упомянутые выше бесконечномерные пространства функций (например, если исходный поток получается дискретизацией и оцифровкой непрерывного сигнала, поступающего от аудио- или видео-устройства аналогового типа). В этом случае введенные понятия и результаты сохраняются с поправкой на область определения для соответствующих функций; эту ситуацию будем называть *континуальным случаем.*

Рассмотрим континуальный случай несколько подробнее. Областью изменения аргумента t становится вся вещественная ось $\mathbb{R}^1$ или отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$, а множество $X \stackrel{\text{def}}{=\!=} [\![a,b]\!]$ является сеткой на отрезке $[a,b]$. При этом некоторые понятия и обозначения переопределяются таким образом, что вводимые функции оказываются результатом расширения области определения рассмотренных ранее отображений, а обозначения этих отображений переносятся на упомянутые функции.

Дискретный базис (3.1) заменяем на систему кусочно-линейных непрерывных функций:

$$\omega_{-1}(t) = (\xi_1 - t)(\xi_1 - \xi_0)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\xi_0, \xi_1), \tag{10.1}$$

$$\omega_{-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a,b] \setminus (\xi_0, \xi_1), \tag{10.2}$$

$$\omega_i(t) = (t - \xi_i)(\xi_{i+1} - \xi_i)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\xi_i, \xi_{i+1}), \tag{10.3}$$

$$\omega_i(t) = (\xi_{i+2} - t)(\xi_{i+2} - \xi_{i+1})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\xi_{i+1}, \xi_{i+2}), \tag{10.4}$$

$$\omega_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a,b] \setminus (\xi_i, \xi_{i+2}), \quad i \in J_{M-2}, \tag{10.5}$$

$$\omega_{M-1}(t) = (t - \xi_{M-1})(\xi_M - \xi_{M-1})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\xi_{M-1}, \xi_M), \tag{10.6}$$

$$\omega_{M-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a,b] \setminus (\xi_{M-1}, \xi_M). \tag{10.7}$$

Функции $\widehat{\omega}_j(t)$, определенные формулами (3.7)–(3.13) как функции дискретного аргумента $t \in [\![a,b]\!]$, переопределяются путем расширения их области определения до отрезка $[a,b]$:

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = (\widehat{x}_1 - t)(\widehat{x}_1 - \widehat{x}_0)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1), \tag{10.8}$$

$$\widehat{\omega}_{-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a,b] \setminus (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1), \tag{10.9}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = (t - \widehat{x}_i)(\widehat{x}_{i+1} - \widehat{x}_i)^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+1}), \tag{10.10}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = (\widehat{x}_{i+2} - t)(\widehat{x}_{i+2} - \widehat{x}_{i+1})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\widehat{x}_{i+1}, \widehat{x}_{i+2}), \tag{10.11}$$

$$\widehat{\omega}_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a,b] \setminus (\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+2}), \quad i \in J_{K-2}, \tag{10.12}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = (t - \widehat{x}_{K-1})(\widehat{x}_K - \widehat{x}_{K-1})^{-1} \quad \text{при} \quad t \in (\widehat{x}_{K-1}, \widehat{x}_K), \tag{10.13}$$

$$\widehat{\omega}_{K-1}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [a,b] \setminus (\widehat{x}_{K-1}, \widehat{x}_K). \tag{10.14}$$

Заметим, что переход к расширенной области определения не отражается на формулировках лемм и теорем, фигурирующих в разделах 1–8.

Рассматривая ситуацию с упомянутой точки зрения, вспомним, что

$$\mathbb{S}(\widehat{X}) = \mathcal{L}\{\widehat{\omega}_i(t) \mid \forall t \in [\![a,b]\!] \quad \forall i \in J'_{K-1}\},$$

и введем обозначения

$$X \stackrel{\text{def}}{=\!=} [\![a,b]\!], \qquad \mathbb{S}(X) \stackrel{\text{def}}{=\!=} C[\![a,b]\!],$$

$$\widetilde{\mathbb{S}}(X) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathcal{L}\{\omega_j(t) \mid \forall t \in [a,b]\ \forall j \in J'_{M-1}\},$$

$$\widetilde{\mathbb{S}}(\widehat{X}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathcal{L}\{\widehat{\omega}_i(t) \mid \forall t \in [a,b]\ \forall i \in J'_{K-1}\},$$

где функции $\omega_j(t)$ и $\widehat{\omega}_i(t)$ определяются соотношениями (10.1)–(10.7) и (10.8)–(10.14) соответственно.

Очевидны линейные изоморфизмы

$$\mathcal{C} \sim \widetilde{\mathbb{S}}(X) \sim \mathbb{S}(X), \qquad \mathcal{A} \sim \widetilde{\mathbb{S}}(\widehat{X}) \sim \mathbb{S}(\widehat{X}),$$

а также вложение

$$\widetilde{\mathbb{S}}(\widehat{X}) \subset \widetilde{\mathbb{S}}(X).$$

В соответствии с формулами (6.2)–(6.4) с учетом упомянутых изоморфизмов получаем всплесковое разложение в континуальном случае

$$\widetilde{\mathbb{S}}(X) = \widetilde{\mathbb{S}}(\widehat{X}) \dotplus \widetilde{\mathbb{W}},$$

где

$$\widetilde{\mathbb{W}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\{\omega_{j-1}(t) \mid \forall t \in [a,b] \; \forall j \in J_M \setminus J^*\}.$$

Ясно, что пространства $\mathcal{B}$, $\mathbb{W}$ и $\widetilde{\mathbb{W}}$ также линейно изоморфны: $\mathcal{B} \sim \mathbb{W} \sim \widetilde{\mathbb{W}}$.

§11. Об алгоритме укрупнения сетки

11.1. Предварительные замечания. Данная статья начиналась с априори данного укрупнения сетки, порождаемого отображением $\varkappa$. В работе [6] предложены варианты алгоритмов адаптивного укрупнения, обеспечивающие априори заданную оценку уклонения основного потока от исходного, оценку объемов используемых данных в основном потоке при различных характеристиках нерегулярности исходного потока, а также предельные характеристики упомянутых объемов в случае, когда исходный поток порожден дифференцируемой функцией. Для полноты изложения дадим формулировки утверждений, доказанных в работе [6].

Сразу же отметим один из центральных результатов упомянутой работы: если поток порожден функцией $u \in C^1[a,b]$, то отношение объема основного потока, связанного с соответствующей неравномерной сеткой адаптивного типа, к объему основного потока, связанного с псевдоравномерной сеткой, при стремлении шагов сетки к нулю характеризуется величиной

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |u'(t)|\,dt / \|u'\|_{C[a,b]},$$

а если $u \in C^2[a,b]$, то аналогичное отношение при соответствующих сетках характеризуется величиной

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{|u''(t)|}\,dt / \|\sqrt{u''}\|_{C[a,b]}.$$

11.2. Сетка адаптивного типа. Рассмотрим функцию $f \in C(\Xi)$, удовлетворяющую соотношению

$$f(t) \geqslant c \quad \forall t \in \Xi, \tag{11.1}$$

где $c > 0$ – некоторая константа.

Пусть

$$\varepsilon \in (\varepsilon^*, \varepsilon^{**}), \tag{11.2}$$

где

$$\varepsilon^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\xi \in [\![a,\, b^-]\!]} \max_{t \in \{\xi, \xi^+\}} f(t)(\xi^+ - \xi), \quad \varepsilon^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\|f\|_{C[\![a,\, b]\!]}. \tag{11.3}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 8. *Если выполнены условия* (11.1)–(11.3), *то существуют и единственны натуральное число* $K = K(f, \varepsilon, \Xi)$ *и сетка*

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}(f, \varepsilon, \Xi): \quad a = \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots < \widetilde{x}_K \leqslant \widetilde{x}_{K+1} = b \tag{11.4}$$

такие, что

$$\max_{t \in [\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s) \leqslant \varepsilon < \max_{t \in [\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} f(t)(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s) \tag{11.5}$$

$$\forall s \in \{0, 1, \ldots, K-1\},$$

$$\max_{t \in [\![\widetilde{x}_K,\, b]\!]} f(t)(b - \widetilde{x}_K) \leqslant \varepsilon, \quad \widetilde{X} \subset \Xi. \tag{11.6}$$

Лемма 8 доказывается индукционным переходом от узлов $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_s$ к узлам $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{s+1}$.

Сетка вида (11.4) со свойствами (11.5)–(11.6) называется *сеткой адаптивного типа* для дискретной функции f со свойством (1.1).

Целочисленная функция $K(f, \varepsilon, \Xi)$ обладает свойством монотонности: если $\varepsilon' \leqslant \varepsilon''$, то $K(f, \varepsilon', \Xi) \geqslant K(f, \varepsilon'', \Xi)$.

11.3. Псевдоравномерная сетка. Предположим, что число ε удовлетворяет условию

$$\varepsilon \in (\overline{\varepsilon}^*, \varepsilon^{**}), \tag{11.7}$$

где

$$\overline{\varepsilon}^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\xi \in [\![a,\, b^-]\!]} (\xi^+ - \xi)\|f\|_{C[\![a,\, b]\!]}, \quad \varepsilon^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (b-a)\|f\|_{C[\![a,\, b]\!]}. \tag{11.8}$$

По рассматриваемому ε найдем числа

$$N = N(f, \varepsilon, \Xi) \stackrel{\text{def}}{=} \lceil \varepsilon^{**}/\varepsilon \rceil \tag{11.9}$$

и

$$h = h(f, \varepsilon, \Xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{N+1}; \tag{11.10}$$

заметим, что для вещественного числа r выражение $\lceil r \rceil$ означает целое число k со свойством $0 \leqslant k - r < 1$.

На сеточном отрезке $[\![a, b]\!]$ рассмотрим сетку

$$\overline{X} = \overline{X}(f, \varepsilon, \Xi): \quad a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_N = b, \quad \overline{X} \subset \Xi, \tag{11.11}$$

где

$$\overline{x}_{s+1} - \overline{x}_s \leqslant h < \overline{x}^+_{s+1} - \overline{x}_s, \quad s \in \{0, 1, \ldots, N-1\}, \tag{11.12}$$

$$\overline{x}_{N+1} - \overline{x}_N \leqslant h. \tag{11.13}$$

Сетку (11.11) со свойствами (11.12)–(11.13) будем называть *псевдоравномерной сеткой шага* h. Из (11.9) имеем

$$(b-a)\|f\|_{C[\![a,b]\!]} - \varepsilon < N\varepsilon \leqslant (b-a)\|f\|_{C[\![a,b]\!]}, \tag{11.14}$$

$$\max_{t \in [\![\overline{x}_s, \overline{x}_{s+1}]\!]} f(t)\,(\overline{x}_{s+1} - \overline{x}_s) \leqslant \varepsilon, \quad s \in \{0, 1, \ldots, N\}. \tag{11.15}$$

Лемма 9. *По заданному числу ε, удовлетворяющему соотношениям* (11.7)–(11.8)*, однозначно определяется сетка* (11.11) *со свойствами* (11.12)–(11.13)*; при этом выполнены соотношения* (11.14)–(11.15)*.*

Доказательство существования и единственности сетки (11.11) проводится математической индукцией аналогично доказательству леммы 8.

11.4. Предельные соотношения. Предположим, что функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и обладает свойством

$$f(t) \geqslant c > 0 \quad \forall t \in [a, b]. \tag{11.16}$$

Рассмотрим последовательность сеток $\Xi(\lambda)$ вида (2.1)

$$\Xi(\lambda): \quad \ldots < \xi_{-2}(\lambda) < \xi_{-1}(\lambda) < \xi_0(\lambda) < \xi_1(\lambda) < \xi_2(\lambda) \ldots, \tag{11.17}$$

зависящих от параметра $\lambda > 0$ таких, что $a, b \in \Xi(\lambda)$.

Введем обозначения

$$[\![a, b]\!]_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \Xi(\lambda) \cap [a, b], \quad h_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\xi \in [\![a, b^-]\!]_\lambda} (\xi^+ - \xi).$$

Теорема 4. *Если непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f(t)$ *удовлетворяет условию* (11.16), *а последовательность сеток* (11.17) *такова, что* $\lim\limits_{\lambda\to+0} h_\lambda = 0$, *то верно соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{\lambda\to+0}\frac{K}{N} = \frac{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt}{\|f\|_{C[a,b]}}. \tag{11.18}$$

11.5. Варианты аппроксимации дискретного потока. Рассмотрим сетку $\widehat{X}$,

$$\widehat{X}: \quad a = \widehat{x}_0 < \widehat{x}_1 < \widehat{x}_2 < \ldots < \widehat{x}_{\widehat{K}} < \widehat{x}_{\widehat{K}+1} = b, \quad \widehat{X}\subset\Xi, \tag{11.19}$$

являющуюся подмножеством сетки Ξ, и для сеточной функции $u(t)$, заданной на $[\![a,b]\!]$, построим кусочно линейную интерполяцию

$$\widetilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=\!=} u(\widehat{x}_j) + \frac{u(\widehat{x}_{j+1}) - u(\widehat{x}_j)}{\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j}(t - \widehat{x}_j) \qquad \forall t\in[\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}), \tag{11.20}$$

$$j\in\{0,1,\ldots,\widehat{K}\}.$$

Для $u\in C[\![a,b]\!]$ при $\xi\in[\![a^+,b^-]\!]$ рассмотрим разностные отношения

$$D_\Xi u(\xi) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{u(\xi^+) - u(\xi)}{\xi^+ - \xi},$$

$$D^2_\Xi u(\xi) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{D_\Xi u(\xi) - D_\Xi u(\xi^-)}{\xi - \xi^-}.$$

Теорема 5. *Для кусочно-линейной интерполяции* (11.20) *для сетки* (11.19) *при* $t\in[\![\widehat{x}_j,\widehat{x}_{j+1}]\!]$ *справедливы неравенства*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant (\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j) \max_{\xi\in[\![\widehat{x}_j, \widehat{x}^-_{j+1}]\!]} |D_\Xi u(\xi)|, \tag{11.21}$$

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant (\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j)^2 \max_{\xi\in[\![\widehat{x}^+_j, \widehat{x}^-_{j+1}]\!]} |D^2_\Xi u(\xi)|. \tag{11.22}$$

Если $u\in C^1[a,b]$, *то*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant \max_{\xi\in[\widehat{x}_j,\widehat{x}_{j+1}]} |u'(\xi)|(\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j),$$

а если $u\in C^2[a,b]$, *то*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant \max_{\zeta\in[\widehat{x}_j,\widehat{x}_{j+1}]} |u''(\zeta)|(\widehat{x}_{j+1} - \widehat{x}_j)^2 \quad \forall t\in(\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}).$$

11.6. О числе узлов сетки адаптивного типа.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие*

$$|D_\Xi u(t)| \geqslant c > 0 \qquad \forall t \in [\![y,z]\!]. \tag{11.23}$$

Если при $\eta > 0$ *сетка* $\widehat{X}$ *совпадает с сеткой* $\widetilde{X}(|D_\Xi u(t)|, \eta, \Xi)$, *то*

1) *число узлов* $K'_{u,\Xi}(\eta) \stackrel{\rm def}{=\!=} K(|D_\Xi u(t)|, \eta, \Xi)$ *этой сетки удовлетворяет соотношениям*

$$\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}_{s+1}]\!]} |D_\Xi u(t)|(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s)/\eta \leqslant K'_{u,\Xi}(\eta) <$$
$$< \sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} |D_\Xi u(t)|(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s)/\eta; \tag{11.24}$$

2) *верно неравенство*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant \eta \qquad \forall t \in [a,b];$$

3) *если* $u \in C^1[a,b]$ *со свойством* $|u'(t)| \geqslant c > 0$ $\forall t \in [a,b]$ *и рассматривается последовательность сеток вида* (11.17), *для которой* $\lim\limits_{\lambda\to+0} h_\lambda = 0$, *то*

$$\lim_{\eta'\to+0} \lim_{\lambda\to+0} K'_{u,\Xi(\lambda)}(\eta')\eta' = \int_a^b |u'(t)|\, dt.$$

Теорема 7. *Пусть выполнено условие*

$$|D^2_\Xi u(t)| \geqslant c > 0 \qquad \forall t \in [\![y,z]\!].$$

Если при $\eta > 0$ *сетка* $\widehat{X}$ *совпадает с сеткой* $\widetilde{X}(\sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}, \eta, \Xi)$, *то*

1) *число узлов* $K''_{u,\Xi}(\eta) \stackrel{\rm def}{=\!=} K(\sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}, \eta, \Xi)$ *этой сетки удовлетворяет соотношениям*

$$\sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}_{s+1}]\!]} \sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s)/\eta \leqslant K''_{u,\Xi}(\eta) <$$
$$< \sum_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} \sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s)/\eta;$$

2) *верно неравенство*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant \eta^2 \qquad \forall t \in [a,b];$$

3) *если* $u \in C^2[a,b]$ *со свойством* $|u''(t)| \geqslant c > 0$ $\forall t \in [a,b]$ *и рассматривается последовательность сеток вида* (11.17)*, для которой* $\lim_{\lambda\to+0} h_\lambda = 0$*, то*

$$\lim_{\eta'\to+0}\lim_{\lambda\to+0} K''_{u,\Xi(\lambda)}(\eta')\eta' = \int_a^b \sqrt{|u''(t)|}\,dt.$$

11.7. О числе узлов псевдоравномерной сетки.

Теорема 8. *Если сетка* $\widehat{X}$ *совпадает с сеткой* $\overline{X}(|D_\Xi u|, \eta, \Xi)$*, то*

1) *число* $N'_{u,\Xi}(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} N(|D_\Xi u|, \eta, \Xi)$ *внутренних узлов этой сетки удовлетворяет соотношению*

$$(b-a)\|D_\Xi u\|_{C[\![a,b]\!]}/\eta - 1 < N'_{u,\Xi}(\eta) \leqslant$$
$$\leqslant (b-a)\|D_\Xi u\|_{C[\![a,b]\!]}/\eta; \qquad (11.25)$$

2) *верно неравенство*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant \eta \qquad \forall t \in [\![a,b]\!]. \qquad (11.26)$$

Доказательство. Полагая $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{X}(|D_\Xi u|, \eta, \Xi)$, применим формулу (11.14); в результате получим соотношение (11.25). Неравенство (11.26) получается применением соотношения (11.15) при $f = |D_\Xi u|$ и $\varepsilon = \eta$. $\square$

Теорема 9. *Если сетка* $\widehat{X}$ *совпадает с сеткой* $\overline{X}(\sqrt{|D^2_\Xi u|}, \eta, \Xi)$*, то*

1) *число* $N''_{u,\Xi}(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} N(\sqrt{|D^2_\Xi u|}, \eta, \Xi)$ *внутренних узлов этой сетки удовлетворяет соотношению*

$$(b-a)\|\,|D^2_\Xi u|^{1/2}\|_{C[\![a,b]\!]}/\eta - 1 < N''_{u,\Xi}(\eta)$$
$$\leqslant (b-a)\|\,|D^2_\Xi u|^{1/2}\|_{C[\![a,b]\!]}/\eta. \qquad (11.27)$$

2) *верно неравенство*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant \eta^2 \qquad \forall t \in [\![a,b]\!]. \qquad (11.28)$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы применим формулу (11.14) при $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{X}(\sqrt{|D^2_\Xi u|}, \eta, \Xi)$; в результате получим соотношение (11.27). Неравенство (11.28) получается применением соотношения (11.15) при $f = \sqrt{|D^2_\Xi u|}$ и $\varepsilon = \eta$. $\square$

11.8. Сравнительная характеристика числа узлов при одинаковой аппроксимации. Сравнение числа узлов псевдоравномерной и неравномерной сеток при одинаковой аппроксимации сводится к использованию теорем 7–9 для одной и той же функции f при соответствующих аппроксимациях на различных сетках.

Теорема 10. *Пусть для построения аппроксимации $\widetilde{u}(t)$ дискретной функции $u(t)$ с оценкой $|\widetilde{u}(t) - u(t)| \leqslant \eta$ используются два варианта выбора сетки: в первом варианте используется псевдоравномерная сетка, так что $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{X}(|D_\Xi u|, \eta, \Xi)$, а во втором варианте – $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{X}(|D_\Xi u|, \eta, \Xi)$. Тогда отношение количеств узлов этих сеток характеризуется неравенствами*

$$\frac{(b-a)\|D_\Xi u\|_{C[\![a,b]\!]} - \eta}{\sum\limits_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} |D_\Xi u(t)|(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s)} < \frac{N'_{u,\Xi}(\eta)}{K'_{u,\Xi}(\eta)}$$
$$\leqslant \frac{(b-a)\|D_\Xi u\|_{C[\![a,b]\!]}}{\sum\limits_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\, \widetilde{x}_{s+1}]\!]} |D_\Xi u(t)|(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s)}. \tag{11.29}$$

Теорема 11. *Если рассматривается семейство сеток вида* (11.17) *со свойством $\lim\limits_{\lambda\to+0} h_\lambda = 0$ и непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция $u(t)$ со свойством*

$$\|u'\|_{C[a,b]} \neq 0, \tag{11.30}$$

то

$$\lim_{\eta\to+0}\lim_{\lambda\to+0} \frac{N'_{u,\Xi}(\eta)}{K'_{u,\Xi}(\eta)} = \frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b |u'(t)|dt}{\|u'\|_{C[a,b]}}. \tag{11.31}$$

Доказательство. Для доказательства формулы (11.31) рассмотрим соотношение (11.29) и перейдем в нем к пределу сначала при $\lambda \to +0$, а затем при $\eta \to +0$. Поскольку правая часть этой формулы имеет смысл при любом $c > 0$, то условие (11.23) может быть заменено условием (11.30). □

Теорема 12. *Пусть для построения аппроксимации $\widetilde{u}(t)$ дискретной функции $u(t)$ с оценкой $|\widetilde{u}(t) - u(t)| \leqslant \eta^2$ используются два варианта выбора сетки: в первом варианте используется псевдоравномерная сетка вида $\widehat{X} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{X}(\sqrt{|D^2_\Xi u|}, \eta, \Xi)$, а во втором варианте –*

$\widehat{X} \stackrel{\rm def}{=} \widetilde{X}(\sqrt{|D^2_\Xi u|}, \eta, \Xi)$. *Тогда отношение количеств узлов этих сеток характеризуется неравенствами*

$$\frac{(b-a)\|\,|D^2_\Xi u|^{1/2}\|_{C[\![a,b]\!]} - \eta}{\sum\limits_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}^+_{s+1}]\!]} \sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}(\widetilde{x}^+_{s+1} - \widetilde{x}_s)} < \frac{N''_{u,\Xi}(\eta)}{K''_{u,\Xi}(\eta)}$$

$$\leqslant \frac{(b-a)\|\,|D^2_\Xi u|^{1/2}\|_{C[\![a,b]\!]}}{\sum\limits_{s=0}^{K-1} \max_{t\in[\![\widetilde{x}_s,\,\widetilde{x}_{s+1}]\!]} \sqrt{|D^2_\Xi u(t)|}(\widetilde{x}_{s+1} - \widetilde{x}_s)}. \tag{11.32}$$

Теорема 13. *Если рассматривается семейство сеток вида* (11.17) *со свойством* $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} h_\lambda = 0$ *и дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[a,b]$ *функция* $u(t)$ *со свойством*

$$\|u''\|_{C[a,b]} \neq 0,$$

то

$$\lim_{\eta\to+0}\lim_{\lambda\to+0} \frac{N''_{u,\Xi}(\eta)}{K''_{u,\Xi}(\eta)} = \frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{|u''(t)|}dt}{\|\sqrt{|u''|}\|_{C[a,b]}}. \tag{11.33}$$

Доказательство соотношения (11.33) получается из (11.32) рассуждением, аналогичным тому, которое было применено для доказательства теоремы 11.

§12. Вычисление всплескового разложения

Вычисление всплескового разложения состоит из двух этапов: первый этап – реализация формул декомпозиции, второй этап – реализация формул реконструкции.

Реализация формул декомпозиции содержит две задачи: отыскание основного потока и отыскание всплескового потока. Первая из этих задач, как правило, является более важной, чем вторая, поскольку в большинстве случаев именно основной поток дает представление о характере исходного потока.

При численной реализации всплескового разложения требуется для исходной сетки X построить вложенную сетку $\widehat{X}$, а это построение обычно определяется исходным потоком $\mathbf{c}$ (см. раздел 11) и может требовать значительные компьютерные ресурсы. Заметим, что используемый здесь алгоритм построения вложенной сетки в определенном смысле является оптимальным; недостаток этого алгоритма в том, что он представляет собой существенно последовательный процесс, хотя в реальных ситуациях обработка может проводиться как на однопроцессорной вычислительной системе (ОВС), так и на параллельной вычислительной системе (ПВС). Применение последовательного алгоритма (или параллельного алгоритма небольшой ширины) предпочтительнее в случае поступления исходного потока и его обработки в реальном масштабе времени: в этом случае весь поток еще не получен. Если же исходный поток уже получен, то его обработка на ПВС может оказаться весьма эффективной за счет разбиения потока на достаточно длинные фрагменты, количество которых равно числу параллельных вычислительных модулей; обработка каждой из таких частей проводится в последовательном режиме назначенным для этой части вычислительным модулем с последующим соединением этих частей в исходном порядке.

В дальнейшем считается, что рассматриваемая вычислительная система (ВС) является (однопроцессорной или параллельной) вычислительной системой дискретного действия, которая работает синхронно (по тактам). На такой ВС рассматривается дискретное время, единицей времени считается длина такта, так что принимаемые временем значения представляют собой отрезок натурального ряда, а любой рассматриваемый промежуток времени имеет целочисленную длину (см. [7]).

При реализации упомянутых алгоритмов приходится извлекать элемент из некоторого массива (т.е. присваивать его значения некоторой промежуточной переменной), погружать элемент в массив (т.е. присваивать значение промежуточной переменной элементу массива), а также выполнять определенные арифметические и логические операции.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathbf{A}$ – массив, элементами A_i которого являются числа типа $f_{\mathbf{A}}$ (для простоты можно ограничиться числами одного типа, например, можно считать, что $f_{\mathbf{A}} = f$, где f означает тип `real`; конкретное представление типов $f_{\mathbf{A}}$ и f в ВС рассматривать не будем).

Предположим, что $\breve{T}_{\mathbf{A}}$ – время (т.е. длина отрезка времени[2]) извлечения i-го элемента A_i массива $\mathbf{A}$ в простую (вспомогательную)

[2]Напомним, что время считается дискретным, единица времени равна длине такта ВС.

переменную; через $\widehat{T}_{\mathbf{A}}$ обозначим время, требуемое для погружения значения простой переменной в элемент A_i этого массива[3].

Для краткости в дальнейшем массивы, необходимые для хранения числовых потоков $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, и их элементы будем обозначать теми символами, которыми обозначаются потоки и их компоненты; то же соглашение относится к другим подобным объектам: X, $\widehat{X}$, J_s, J^* и т.п. Все рассматриваемые далее массивы считаются динамически расширяемыми (т.е. длина массива заранее не фиксируется, при добавлении элемента в массив его длина увеличивается на единицу).

Рассмотрим сначала формулы декомпозиции (8.15)–(8.16):

$$a_i = c_{\varkappa(i+1)-1} \qquad \forall i \in {J'}_{K-1}, \tag{12.1}$$

$$b_q = 0 \qquad \forall q+1 \in J^*, \tag{12.2}$$

а при $q+1 \in J_M \backslash J^*$ соотношения (8.19)–(8.20) можно переписать в виде

$$b_q = c_q - (\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{\varkappa(i)})^{-1}\Big[(\xi_{\varkappa(i+1)} - \xi_{q+1})c_{\varkappa(i)-1} + (\xi_{q+1} - \xi_{\varkappa(i)})c_{\varkappa(i+1)-1}\Big], \tag{12.3}$$

где

$$\varkappa(i) + 1 \leqslant q + 1 \leqslant \varkappa(i+1) - 1. \tag{12.4}$$

Можно представить ряд вариантов вычислений по такого рода формулам. Рассмотрим один из них, предполагая, что

$$a = 0, \quad b = M, \qquad \xi_i = i. \tag{12.5}$$

Таким образом,

$$X \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \{a = 0, 1, 2, \ldots, M-1, M = b\}.$$

В этом случае $\widehat{x}_i = \varkappa(i)$, $i \in \{0, 1, \ldots, K\}$,

$$\widehat{X} = \{a = \varkappa(0), \varkappa(1), \varkappa(2), \ldots, \varkappa(K-1), \varkappa(K) = b\};$$

очевидно, что $X = J_M$ и $\widehat{X} = J^*$.

При условии (12.5) формулы (12.3)–(12.4) принимают вид

$$b_q = c_q - (\varkappa(i+1) - \varkappa(i))^{-1}\Big[(\varkappa(i+1) - q - 1)c_{\varkappa(i)-1} + ((q + 1 - \varkappa(i))c_{\varkappa(i+1)-1}\Big], \tag{12.6}$$

[3] Считаем, что упомянутые времена не зависят от номера i рассматриваемого элемента, но, возможно, зависят от типа элементов массива и от его длины.

где
$$\varkappa(i) + 1 \leqslant q + 1 \leqslant \varkappa(i+1) - 1. \tag{12.7}$$

Пусть реализация алгоритма отыскания $j = \varkappa(i)$ требует τ_i единиц времени; будем считать, что аддитивная операция требует t_a единиц времени, а мультипликативная – t_m единиц времени.

Для ясности изложения, как правило, не указываем имена промежуточных переменных, хотя их присутствие подразумевается (например, вместо присваивания $j := \varkappa(i+1)$ с дальнейшим использованием простой переменной j будем говорить "вычислим $\varkappa(i+1)$").

Реализацию декомпозиции представим в виде последовательности этапов. Рассмотрим $(i+1)$-й этап процесса декомпозиции.

Для обозначения состояния массивов на i-м этапе будем использовать i в качестве нижнего индекса.

Перед началом $(i+1)$-го этапа состояние массивов характеризуется следующим образом:

а/ вычислено значение $\varkappa(i)$ (и сохранено в некоторой простой переменной),

б/ массив X_i представляется в виде
$$X_i = \{0, 1, 2, \ldots, i-1, i\},$$

в/ массив $J_i^* = \widehat{X}_i$ имеет вид
$$\widehat{X}_i = \{a = \varkappa(0), \varkappa(1), \varkappa(2), \ldots, \varkappa(i)\},$$

г/ массив $\mathbf{a}$ заполнен вплоть до элемента $a_{\varkappa(i-1)}$, так что
$$\mathbf{a}_i = \{a_{\varkappa(0)}, a_{\varkappa(1)}, \ldots, a_{\varkappa(i-1)}\},$$

д/ массив $\mathbf{b}$ заполнен вплоть до элемента $b_{\varkappa(i-1)-1}$, т.е.
$$\mathbf{b}_i = \{b_{\varkappa(i_0+1)}, \ldots, b_{\varkappa(i_1)-1}\},$$
где $i_0 = \min\{i \mid i \in X \backslash \widehat{X}\}$, $i_1 = \max\{i \mid i \in X \backslash \widehat{X}\}$,

е/ вычислено значение $c_{\varkappa(i)-1}$.

Проведение $(i+1)$-го этапа состоит в следующих действиях.

1. Сначала вычислим $\varkappa(i+1)$; это потребует $\tau_i + t_a$ единиц времени.

2. Подключаем к массиву $\widehat{X}_i$ следующий элемент $\varkappa(i+1)$; это потребует $\widehat{T}_{\widehat{X}}$ единиц времени, и упомянутый массив примет вид
$$\widehat{X}_{i+1} = \{a = \varkappa(0), \varkappa(1), \varkappa(2), \ldots, \varkappa(i), \varkappa(i+1)\}.$$

3. Вычисление и извлечение элемента $c_{\varkappa(i+1)-1}$ из массива $\mathbf{c}$ дополнительно потребует $t_a + \breve{T}_{\mathbf{c}}$ единиц времени.

4. Добавление элемента $a_i = c_{\varkappa(i+1)-1}$ в массив $\mathbf{a}$ потребует $\widehat{T}_{\mathbf{a}}$ единиц времени (напоминаем, что значение $\varkappa(i+1)-1$ уже вычислено и помещено в простую переменную, имя которой в соответствии с принятым соглашением не упоминается).

5. По формулам (12.6)–(12.7) вычисляем b_q для каждого

$$q \in \{\varkappa(i), \varkappa(i)+1, \ldots, \varkappa(i+1)-2\} \tag{12.8}$$

(заметим, что множество индексов (12.8) непусто, ибо $q+1 \in J_M \setminus J^*$). Поскольку элементы $\varkappa(i)$, $\varkappa(i+1)$ и $c_{\varkappa(i)-1}$ уже вычислены, то потребуется лишь извлечь элемент $c_{\varkappa(i+1)-1}$ из массива $\mathbf{c}$ и составить разность $\varkappa(i+1)-\varkappa(i)$; для этого потребуется $\breve{T}_{\mathbf{c}}+t_a$ единиц времени.

Для вычисления b_q положим $q = \varkappa(i)+j$, так что

$$b_{\varkappa(i)+j} = c_{\varkappa(i)+j} - (\varkappa(i+1)-\varkappa(i))^{-1}\Big[(\varkappa(i+1)-\varkappa(i)+j-1)c_{\varkappa(i)-1} \\ +(j+1)c_{\varkappa(i+1)-1}\Big], \tag{12.9}$$

и создадим цикл по $j \in \{0, 1, \ldots, \varkappa(i+1)-\varkappa(i)-2\}$.

На j-й итерации этого цикла потребуется

5.1) извлечь $c_{\varkappa(i)+j}$ из массива $\mathbf{c}$, на что потребуется $t_a+\breve{T}_{\mathbf{c}}$ единиц времени,

5.2) в квадратных скобках выражения (12.9) выполнить 4 аддитивных и две мультипликативных операции (выполненные ранее операции естественно в этом подсчете не учитываются), на что потребуется $4t_a+2t_m$ единиц времени,

5.3) вне квадратных скобок потребуется выполнить 1 мультипликативную и одну аддитивную операцию; на это потребуется t_a+t_m единиц времени,

5.4) полученное значение $b_q = b_{\varkappa(i)+j}$ нужно погрузить в массив $\mathbf{b}$, для чего потребуется $\widehat{T}_{\mathbf{b}}$ единиц времени.

Итак, для реализации одной итерации цикла по j требуется $6t_a + 3t_m + \breve{T}_{\mathbf{c}}$ единиц времени, а таких итераций всего $\varkappa(i+1)-\varkappa(i)-1$ (очевидно, что итераций нет вовсе в случае, когда $\varkappa(i+1) = \varkappa(i)+1$). С учетом упомянутых выше подготовительных операций для отыскания всех требуемых значений b_q на $(i+1)$-м этапе потребуется $\breve{T}_{\mathbf{c}}+t_a+(6t_a+3t_m+\breve{T}_{\mathbf{c}}+\widehat{T}_{\mathbf{b}})(\varkappa(i+1)-\varkappa(i)-1)$ единиц времени.

Теперь видно, что для реализации $(i+1)$-го этапа в целом требуется

$$\tau_i+3t_a+\widehat{T}_{\widehat{X}}+\breve{T}_{\mathbf{c}}+\widehat{T}_{\mathbf{a}}+\breve{T}_{\mathbf{c}}+(6t_a+3t_m+\breve{T}_{\mathbf{c}}+\widehat{T}_{\mathbf{b}})(\varkappa(i+1)-\varkappa(i)-1) \tag{12.10}$$

единиц времени.

Теорема 14. *Время T^*, требуемое для реализации алгоритма декомпозиции на ОВС вычисляется по формуле*

$$T^* = \sum_{i=0}^{K-1} \tau_i + K(3t_a + \widehat{T}_{\widehat{X}} + 2\breve{T}_{\mathbf{c}} + \widehat{T}_{\mathbf{a}}) + (6t_a + 3t_m + \breve{T}_{\mathbf{c}} + \widehat{T}_{\mathbf{b}})(M - K). \quad (12.11)$$

Доказательство. Число этапов равно числу K отрезков вида $[\![\varkappa(i), \varkappa(i+1)]\!]$. Используя формулу (12.10), видим, что время, затраченное на реализацию всех этапов, равно

$$T^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{K-1} \Big(\tau_i + 3t_a + \widehat{T}_{\widehat{X}} + 2\breve{T}_{\mathbf{c}} + \widehat{T}_{\mathbf{a}} + (6t_a + 3t_m + \breve{T}_{\mathbf{c}} + \widehat{T}_{\mathbf{b}})(\varkappa(i+1) - \varkappa(i) - 1) \Big).$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=0}^{K-1} (\varkappa(i+1) - \varkappa(i) - 1) = \varkappa(K) - \varkappa(0) - K = M - K,$$

и потому справедливо соотношение (12.11). □

Оценка времени реконструкции проводится аналогично; она будет рассмотрена в другой статье.

Литература

1. S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing.* Academic Press, 1999.
2. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
3. Ю. К. Демьянович, *Всплесковые (вэйвлетные) разложения на неравномерной сетке.* — Труды СПбМО **13** (2007), 27–51.
4. Ю. К. Демьянович, *Вэйвлеты на многообразии.* — Доклады РАН **421**, No. 2 (2009), 1–5.
5. Ю. К. Демьянович, *Теория сплайн-всплесков.* СПб. Изд-во СПбГУ, 2013.
6. Ю. К. Демьянович, А. Ю. Пономарева, *Адаптивная сплайн-всплесковая обработка дискретного потока.* — Ж. пробл. мат. анализа, Вып. **81** (2015), 29–46.
7. Ю. К. Демьянович и др. *Параллельные алгоритмы. Разработка и реализация.* М.: Национальный открытый университет “ИНТУИТ”: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.

Dem'yanovich Yu. K., Ponomarev A. S. Realization of the spline-wavelet decomposition of the first order.

The paper considers the discrete spline-wavelet decomposition of the first order based on a nonclassical approach to constructing wavelet decompositions. All the constructions only use mesh functions (flows); the finite-dimensional spaces of original flows, wavelet flows, and principal flows are introduced. These spaces are associated with an original and a coarsened meshes, respectively. As a result, simple decomposition and reconstruction formulas are obtained, and a basis of the wavelet space is provided by the simplest collection of unit coordinate vectors of the Euclidean space. An estimate for the time of realizing the decomposition with account for properties of the communication media of a computing system is presented.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: y.demjanovich@spbu.ru
E-mail: ponomarevalexanderstrict@gmail.com

Поступило 7 ноября 2016 г.