Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

А. Э. Гутерман, Д. К. Кудрявцев

ДЛИНА АЛГЕБР КВАТЕРНИОНОВ И ОКТОНИОНОВ

§1. Введение

В настоящей работе $\mathcal{A}$ – конечномерная не обязательно ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ – конечная система порождающих алгебры $\mathcal{A}$. Дадим определения длины системы порождающих и длины алгебры.

Обозначение 1.1. Конечные произведения элементов из $\mathcal{S}$ с умножениями, выполненными в произвольном порядке, будем называть словами системы $\mathcal{S}$. *Длина* слова равна количеству множителей в соответствующем произведении. Будем считать 1 словом $\mathcal{S}$ *длины* 0.

Обозначение 1.2. Пусть S_i обозначает множество всех слов длины не большей, чем i, $i \geqslant 0$.

Обозначение 1.3. Положим $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle S_i \rangle$, где $\langle S \rangle$ – линейная оболочка (множество всех конечных линейных комбинаций с коэффициентами из $\mathbb{R}$) множества S. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1 \rangle = \mathbb{R}$. Обозначим, $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$.

Замечание 1.4. Множество $\mathcal{S}$ является системой порождающих для $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Определение 1.5. *Длиной системы порождающих* $\mathcal{S}$ конечномерной алгебры $\mathcal{A}$ называется число $l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

Определение 1.6. *Длиной алгебры* $\mathcal{A}$ называется число $l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

Определение 1.7. Говорят, что система $K = \{a_1, \ldots, a_m\}$ алгебры $\mathcal{A}$ является *линейно независимой по модулю подалгебры действительных чисел*, если для всех $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ из условия $c_1 a_1 + \ldots + c_m a_m \in \mathbb{R}$ следует, что $c_1 = \ldots = c_m = 0$.

Ключевые слова: октонионы, кватернионы, длина матриц.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РНФ 16-11-10075.

Размерностью алгебры $\mathcal{A}$ будем называть ее размерность над полем вещественных чисел, и будем обозначать ее через $\dim \mathcal{A}$. Через $|S|$ будем обозначать число элементов множества S.

Длина ассоциативных алгебр является важным инвариантом их структурной теории и находится в центре внимания современных исследований, см. работы [1, 3–5] и их библиографию. С одной стороны, функция длины актуальна в различных теоретических и прикладных вопросах, а с другой стороны, она является постоянным источником новых интересных научных задач и открытых проблем. Для иллюстрации достаточно упомянуть, что уже даже вычисление длины полной матричной алгебры над полем является открытой проблемой.

Согласно теореме Гурвица, существуют ровно четыре нормированные алгебры с делением: действительные числа ($\mathbb{R}$), комплексные числа ($\mathbb{C}$), кватернионы ($\mathbb{H}$) и октонионы ($\mathbb{O}$), см. [2]. Легко видеть, что длина $\mathbb{R}$ как алгебры над собой равняется 0, длина $\mathbb{C}$ как $\mathbb{R}$-алгебры равняется 1. Целью настоящей работы является доказательство того, что длины $\mathbb{R}$-алгебр кватернионов и октонионов равняются, соответственно, 2 и 3. Таким образом, в настоящей работе вычислены длины всех нормированных алгебр с делением.

Работа построена следующим образом. Во втором параграфе содержатся некоторые вспомогательные определения и результаты. Параграф 3 посвящен вычислению длин алгебры кватернионов и алгебры обобщенных кватернионов. В §4 вычисляется длина алгебры октонионов.

§2. Определения и вспомогательные результаты

Определение 2.1. Множество T элементов системы $\mathcal{S}$ порождающих алгебры назовем *неочищенным*, если существует элемент $t \in T$, представимый в виде многочлена с действительными коэффициентами от оставшихся элементов множества T.

Определение 2.2. *Очищением* неочищенного подмножества $T \subseteq \mathcal{S}$ называется удаление из $\mathcal{S}$ того элемента T, который представляется как многочлен с действительными коэффициентами от оставшихся элементов множества T, при этом если можно выразить несколько элементов, то удаляется один любой из них.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, $\mathcal{S}$ – система порождающих алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ – подмножество, полученное очищением одного или нескольких подмножеств элементов $\mathcal{S}$. Тогда*

1) *$\mathcal{S}_0$ – система порождающих алгебры $\mathcal{A}$,*
2) *$l(\mathcal{S}_0) \geqslant l(\mathcal{S})$.*

Доказательство следует непосредственно из определения процедуры очищения. □

Лемма 2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, $\mathcal{S}$ – конечная система порождающих алгебры $\mathcal{A}$. Тогда для любых $u \in \mathcal{S} \setminus \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$ множество*

$$\mathcal{S}_0 = \{u + r\} \cup \mathcal{S} \setminus \{u\}$$

также является порождающим и $l(\mathcal{S}) = l(\mathcal{S}_0)$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{S} \setminus \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$ – произвольные элементы. Поскольку, по определению, $1 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{S})$ и $1 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{S}_0)$, получаем, что $\mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_0)$, откуда $\mathcal{L}_m(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_m(\mathcal{S}_0)$ для всех натуральных $m > 1$, и оба утверждения следуют. □

Следствие 2.5. *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, $\mathcal{S} = \{a_1, \dots, a_s\}$ – конечная система порождающих алгебры $\mathcal{A}$. Пусть $a_1, \dots, a_k \notin \mathbb{R}$. Тогда для любых $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}$ множество $\mathcal{S}_0 = \{a_1 + r_1, \dots, a_k + r_k, a_{k+1}, \dots, a_s\}$ также является порождающим и $l(\mathcal{S}) = l(\mathcal{S}_0)$.*

Доказательство получается k-кратным применением леммы 2.4. □

Лемма 2.6. *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, $\mathcal{A} \neq \mathbb{R}$, и $\mathcal{S}$ – конечная система порождающих алгебры $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ – максимальное подмножество в $\mathcal{S}$, все элементы которого линейно независимы по модулю подалгебры $\mathbb{R}$. Тогда $l(\mathcal{S}) = l(\mathcal{S}_0)$.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0$. Тогда в силу максимальности $\mathcal{S}_0$ имеем $u = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n + r$, где $v_i \in \mathcal{S}_0$, $a_i, r \in \mathbb{R}$, – многочлен первой степени, откуда $\mathcal{L}_m(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_m(\mathcal{S}_0)$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Так как $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, имеем обратное включение $\mathcal{L}_m(\mathcal{S}_0) \subseteq \mathcal{L}_m(\mathcal{S})$, откуда получаем, что $\mathcal{L}_m(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_m(\mathcal{S}_0)$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что $\mathcal{S}_0$ – порождающая система той же длины, что и $\mathcal{S}$. □

§3. Длина алгебры кватернионов

Определение 3.1. *Алгебра кватернионов*, обозначаемая $\mathbb{H}$, – это четырехмерная алгебра над полем действительных чисел без делителей нуля, в которой умножение базисных элементов выполняется в соответствии со следующей таблицей:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Алгебра кватернионов была открыта Уильямом Гамильтоном в 1843 году, см. [8], во время прогулки с женой вдоль Королевского канала в Дублине перед собранием Ирландской национальной академии.

Замечание 3.2 ([8])**.** Алгебра кватернионов не является коммутативной, но является ассоциативной.

Теорема 3.3. *Длина алгебры* $\mathbb{H}$ *равна* 2.

Доказательство. Рассмотрим произвольную порождающую систему $\mathcal{S}$ алгебры $\mathbb{H}$. Заметим, что $\dim\langle S\setminus\mathbb{R}\rangle > 1$, так как если бы она была равна 0, алгебра $\mathbb{H}$ совпадала бы с $\mathbb{R}$, а если бы она равнялась 1, то существовал бы элемент $s\in\mathcal{S}$, такой, что $S\setminus\mathbb{R}\subset\langle s\rangle$, то есть $\mathcal{S}$ порождало бы такую же алгебру, что и s, но один элемент порождает коммутативную подалгебру, тогда как алгебра $\mathbb{H}$ некоммутативна, см. замечание 3.2. Значит, $\dim\langle S\setminus\mathbb{R}\rangle\geqslant 2$, то есть $\dim\mathcal{L}_1(\mathcal{S})\geqslant 3$. Если $\dim\mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 4$, то длина $\mathcal{S}$ равна 1. Если $\dim\mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 3$, то, поскольку $\mathcal{S}$ – порождающая система и $\mathcal{L}_1(\mathcal{S})\neq\mathbb{H}$, справедливо неравенство $\dim\mathcal{L}_2(\mathcal{S})\geqslant 4$. Действительно, в противном случае имеем $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$ и для всех $t\in\mathbb{N}$ справедливо $\mathcal{L}_t(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$. Это можно доказать индукцией по t: база $t = 2$ следует из предположения $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$, а переход – из того, что слово длины t по ассоциативности можно представить как произведение слов длины 1 и $t-1$, то есть, если $\mathcal{L}_{t-1}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$, как элемент $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$. Таким образом, $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\neq\mathbb{H}$ и $\mathcal{S}$ – не порождающая, что противоречит ее выбору. Значит, длина $\mathcal{S}$ в этом случае равна 2.

Отсюда следует, что длина $\mathbb{H}$ не больше 2. С другой стороны, существуют порождающие системы длины 2 – например $\{i, j\}$. Значит, длина алгебры $\mathbb{H}$ в точности равняется 2. □

Определение 3.4. Пусть $a, b\in\mathbb{R}$ – два ненулевых элемента $\mathbb{R}$. *Обобщенной алгеброй кватернионов* $(a, b/\mathbb{R})$ называется четырехмерная алгебра с базисом 1, i, j, k, умножение в котором происходит по следующим правилам:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	a	k	aj
j	j	$-k$	b	$-bi$
k	k	$-aj$	bi	$-ab$

Замечание 3.5. Алгебра $(a, b/\mathbb{R})$ некоммутативна и необязательно ассоциативна. Подробное изложение ее свойств можно найти, например, в работе [7].

Теорема 3.6. *Длина алгебры* $(a, b/\mathbb{R})$ *равна* 2.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ – произвольная порождающая система $(a, b/\mathbb{R})$. Доказательство совпадает со случаем обычных кватернионов до утверждения $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 3$. Опять же, если $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 4$, то длина $\mathcal{S}$ равна 1. Покажем, что $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) \geqslant 4$. Если это неверно и $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 3$, то $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$. Докажем теперь индукцией по t, что $\mathcal{L}_t(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$. Воспользуемся полной индукцией. Для $t = 1, 2$ утверждение либо очевидно, либо следует из предположения. Допустим, что мы доказали утверждение для всех q, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant q < t$. Докажем его для t. Заметим, что слово длины t является произведением слов меньшей длины, то есть, по предположению индукции, элементов $\mathcal{L}_1(\mathcal{S})$, а значит само принадлежит $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$. Значит и $\mathcal{L}_t(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$. Таким образом, $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \neq (a, b/\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}$ – не порождающая, что противоречит ее выбору. Значит, длина $\mathcal{S}$ в этом случае равна 2.

Отсюда следует, что длина $(a, b/\mathbb{R})$ не больше 2. С другой стороны, существуют порождающие системы длины 2 – например $\{i, j\}$. Значит, длина алгебры $(a, b/\mathbb{R})$ равняется в точности 2. □

§4. Длина алгебры октонионов

Определение 4.1. *Алгебра октонионов* или *алгебра Кэли*, обозначаемая $\mathbb{O}$, – это восьмимерная неассоциативная алгебра над полем действительных чисел без делителей нуля, в которой умножение базисных элементов выполняется в соответствии со следующей таблицей:

	1	i	j	k	l	il	jl	kl
1	1	i	j	k	l	il	jl	kl
i	i	-1	k	$-j$	il	$-l$	$-kl$	jl
j	j	$-k$	-1	i	jl	kl	$-l$	$-il$
k	k	j	$-i$	-1	kl	$-jl$	il	$-l$
l	l	$-il$	$-jl$	$-kl$	-1	i	j	k
il	il	l	$-kl$	jl	$-i$	-1	$-k$	j
jl	jl	kl	l	$-il$	$-j$	k	-1	$-i$
kl	kl	$-jl$	il	l	$-k$	$-j$	i	-1

Октонионы были открыты другом Гамильтона по колледжу Джоном Грейвсом в том же 1843 году и спустя 2 года переоткрыты Артуром Кэли.

Изучению кватернионов, октонионов и их свойств посвящено множество работ. В частности, подробное изложение этой темы содержат монографии [6, 8].

Определение 4.2. Для элемента $z = a_0 + a_1 i + a_2 j + \ldots + a_7 kl \in \mathbb{O}$, где $a_s \in \mathbb{R}\ \forall s \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, определим его *действительную часть* как a_0 (обозначение: $\operatorname{Re} z = a_0$), и его *мнимую часть* как $a_1 i + a_2 j + \ldots + a_7 kl$ (обозначение: $\operatorname{Im} z = a_1 i + a_2 j + \ldots + a_7 kl$).

Лемма 4.3. *Если* $z_1, z_2 \in \mathbb{O}$ *и* $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 = 0$, *то* $z_1 z_2 + z_2 z_1 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $z_1 = a_1 i + a_2 j + \ldots + a_7 kl$, $z_2 = b_1 i + b_2 j + \ldots + b_7 kl$, где $a_s, b_s \in \mathbb{R}$ для всех $s \in \{0, 1, \ldots, 7\}$. Заметим, что если t и v – различные базисные элементы, не равные 1, то из определения умножения $tv + vt = 0$. Поэтому, если мы раскроем в $z_1 z_2 + z_2 z_1$ скобки по дистрибутивности и сгруппируем отдельно $a_1 b_1 i^2 + a_2 b_2 j^2 + \ldots + a_7 b_7 (kl)^2$ и сумму остальных слагаемых, разбивающуюся на пары типа $(a_p t)(b_q v) + (b_q v)(a_p t) = a_p b_q (tv + vt) = 0$, где t и v – различные базисные элементы, a_p – коэффициент при t в z_1, b_q – коэффициент при v в z_2, то первая часть в сумме даст $-a_1 b_1 - a_2 b_2 - \ldots - a_7 b_7 \in \mathbb{R}$, а вторая – 0, поэтому и $z_1 z_2 + z_2 z_1 \in \mathbb{R}$. □

Замечание 4.4. Алгебра октонионов по умножению не является ассоциативной, хотя и является *альтернативной*, а именно, для всех $a_1, a_2 \in \mathbb{O}, (a_1 a_1) a_2 = a_1 (a_1 a_2)$ и $(a_1 a_2) a_2 = a_1 (a_2 a_2)$.

Замечание 4.5. Непосредственная проверка показывает, что в алгебре октонионов нет делителей нуля, и любой ненулевой элемент обратим. Для $z = a_0 + a_1 i + a_2 j + \ldots + a_7 kl$, где $a_s \in \mathbb{R}$ для всех $s \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ и не все a_i равны 0, обратным элементом является

$$\begin{aligned} z^{-1} &= (a_0 - a_1 i - a_2 j - \ldots - a_7 kl)/(a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_7^2) \\ &= (\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z)/(a_0^2 + \ldots + a_7^2). \end{aligned}$$

Известно, что двупорожденная подалгебра альтернативной алгебры ассоциативна. Проверим в явном виде это утверждение для умножения на обратные элементы в алгебре октонионов.

Лемма 4.6. *В алгебре $\mathbb{O}$ для любых элементов a, b таких, что $a \neq 0$, верно, что $a^{-1}(ab) = b = (ba)a^{-1}$.*

Доказательство. Докажем, что $a^{-1}(ab) = b$. Утверждение $b = (ba)a^{-1}$ можно показать аналогично.

Пусть $\operatorname{Re} a = x, \operatorname{Im} a = y$, а сумма квадратов коэффициентов в разложении a равна $1/d$, где $d \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Тогда, по замечанию 4.5, $a^{-1} = d(x - y)$,

$$\begin{aligned} a^{-1}(ab) &= d(x-y)((x+y)b) \\ &= d(x-y)(xb+yb) = d(x(xb) + x(yb) - y(xb) - y(yb)). \end{aligned}$$

Заметим, что $x \in \mathbb{R}$, а из альтернативности $y(yb) = (yy)b$ следует, что

$$\begin{aligned} d(x(xb) + x(yb) - y(xb) - y(yb)) &= d((x^2 b + xyb - xyb - (yy)b) \\ &= d(x^2 - y^2)b = (d(x-y)(x+y))b = (a^{-1}a)b = b, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 4.7. *Если для элементов $a, b \in \mathbb{O}$ верно, что $ab = 1$, то $b = a^{-1}$. Таким образом, существует единственный обратный к произвольному ненулевому числу алгебры октонионов.*

Доказательство. Из утверждения леммы получаем, что $a^{-1} = a^{-1}(ab) = b$. □

Лемма 4.8. *Пусть $\mathcal{A} = \mathbb{O}$ – алгебра октонионов, $\mathcal{S}$ – система порождающих алгебры $\mathcal{A}$. Тогда для любых $x, y \in \mathcal{S} \setminus \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $xy = a_0 + a_1 x + a_2 y$, где $a_i \in \mathbb{R}$, элемент y может быть удален при очищении.*

Доказательство. Так как

$$(x - a_2)y = a_0 + a_1 x,$$

то выполняется

$$(x - a_2)^{-1}((x - a_2)y) = (x - a_2)^{-1}(a_0 + a_1 x). \tag{4.1}$$

В силу замечания 4.5, существует $(x - a_2)^{-1} = c(-a_2 + d - x)$ для некоторых $c, d \in \mathbb{R}$. Тогда справа в формуле (4.1), очевидно, стоит элемент из $\mathbb{R}[x]$ – множества многочленов от x с вещественными коэффициентами. Слева в формуле стоит y по лемме 4.6.

Значит, $y \in \mathbb{R}[x]$. □

Лемма 4.9. *Пусть $\mathcal{S}$ – система порождающих алгебры октонионов $\mathbb{O}$. Тогда $|\mathcal{S}| \geqslant 3$.*

Доказательство. Алгебра $\mathbb{O}$ не является ни коммутативной, ни ассоциативной. Исходя из этого, $\mathcal{S}$ не может состоять из одного элемента, так как тогда $\mathcal{S}$ порождало бы коммутативную алгебру, и $\mathcal{S}$ не может состоять из двух элементов, так как, вследствие альтернативности, $\mathcal{S}$ порождало бы ассоциативную алгебру. Значит, действительно, $|\mathcal{S}| \geqslant 3$. □

Теорема 4.10. *Длина алгебры $\mathbb{O}$ равна* 3.

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольную систему порождающих алгебры октонионов $\mathcal{S}$.

2. Применим последовательно лемму 2.6 и следствие 2.5, сначала сделав все элементы из $\mathcal{S}$ линейно независимыми по модулю подалгебры действительных чисел, в частности, удалив все действительные числа, а затем вычитая из каждого элемента его действительную часть. Обозначим полученную систему через $\mathcal{S}_0$. Тогда $\mathcal{S}_0$ является порождающей системой и $l(\mathcal{S}_0) = l(\mathcal{S})$. По лемме 4.9 имеем $|\mathcal{S}_0| \geqslant 3$.

3. Перенумеруем в произвольном порядке все элементы системы $\mathcal{S}_0$ и зададим связанный лексикографический порядок на парах элементов множества $\mathcal{S}_0$. Рассмотрим по порядку каждую пару элементов $\mathcal{S}_0$ и проведем процедуру очищения для всех неочищенных пар, пропуская те пары, один из элементов которых был удален ранее. Полученное множество обозначим $\mathcal{S}_1$. Тогда $\mathcal{S}_1$ является порождающей системой и $l(\mathcal{S}_1) \geqslant l(\mathcal{S})$.

4. Произведем процедуру аналогичную п. 3 для упорядоченных наборов троек элементов $\mathcal{S}_1$. Полученное множество обозначим $\mathcal{S}_2$. Тогда $\mathcal{S}_2$ является порождающей системой и $l(\mathcal{S}_2) \geqslant l(\mathcal{S}_1) \geqslant l(\mathcal{S})$.

5. $|\mathcal{S}_2| \geqslant 3$ по лемме 4.9, все элементы множества $\mathcal{S}_2$ линейно независимы по модулю подалгебры $\mathbb{R}$, их действительные части равны нулю. Рассмотрим произвольные три элемента множества $\mathcal{S}_2$. Обозначим их e_1, e_2, e_3.

6. Заметим, что при $s \neq t$ произведение $e_s e_t$ не может являться линейной комбинацией $\{1, e_1,\ e_2,\ e_3\}$, последнее противоречило бы очищенности пары $\{e_s,\ e_t\}$ или тройки $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$. Действительно, если $e_s e_t = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, где $a_u \in \mathbb{R}$, $u = 0, 1, 2, 3$, то обозначим $\{v\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{s, t\}$. Тогда возникают следующие случаи:

а) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, т.е. $e_s e_t$ – действительное число, что невозможно, так как в этом случае $e_s = c_1 (e_t)^{-1} = c_2(-e_t)$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, т.е. e_1 и e_2 линейно зависимы – противоречие с п. 2.

б) $a_v \neq 0$ – противоречие с п. 4, так как тогда

$$e_v = \frac{-a_0}{a_v} + \frac{-a_t}{a_v} e_t + \frac{-a_s}{a_v} e_s + \frac{1}{a_v} e_t e_s,$$

то есть e_v должен был быть удален при очищении тройки $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$.

в) $a_v = 0$, а хотя бы одно из чисел a_s или a_t отлично от 0 – противоречие с п. 3. Дейтвительно, без ограничения общности, $a_t \neq 0$. Тогда по лемме 4.8 элемент e_t удален при очищении пары $\{e_s, e_t\}$.

7. Покажем, что $1, e_1, e_2, e_3, e_1 e_2, e_2 e_3$ и $e_3 e_1$ – линейно независимая система. Пусть существует нетривиальная линейная комбинация этих элементов, равная нулю. Заметим, что хотя бы при одном из последних трех элементов стоит ненулевой коэффициент – иначе линейно зависимы были бы $1, e_1, e_2, e_3$, что противоречит п. 2. Без потери общности можно считать, что коэффициент при $e_1 e_2$ отличен от 0. Если это так, то существуют такие $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{31}, \alpha_{23} \in \mathbb{R}$, что

$$e_1 e_2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_{31} e_3 e_1 + \alpha_{23} e_2 e_3. \qquad (4.2)$$

Заметим, что так как $\operatorname{Re} e_1 = \operatorname{Re} e_3 = 0$, то по лемме 4.3 $e_3 e_1 = (-e_1 e_3) + c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Тогда равенство (4.2) можно переписать в виде $e_1 e_2 = b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_1 e_3 + b_5 e_2 e_3$, где $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, 5$, а именно, $b_0 = \alpha_0 + c$, $b_i = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, $b_4 = -\alpha_{31}$, $b_5 = \alpha_{23}$. Отсюда мы получаем $e_1(-b_1 + e_2 - b_4 e_3) = b_0 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_5 e_2 e_3$. Заметим, что $(-b_1 + e_2 - b_4 e_3)^{-1} = d(-b_1 - e_2 + b_4 e_3)$, где $d \in \mathbb{R}$. Таким образом, e_1 представляется в виде многочлена от e_2 и e_3 с действительными коэффициентами, что противоречит очищению множества $\{e_1, e_2, e_3\}$, проведенному в п. 5.

8. Покажем, что $(e_1e_2)e_3$ не выражается как линейная комбинация 1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_2e_3 и e_3e_1. Пусть это не верно, то есть существуют такие $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{12}, \alpha_{31}, \alpha_{23} \in \mathbb{R}$, что

$$(e_1e_2)e_3 = \alpha_0 + \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 + a_{12}e_1e_2 + \alpha_{31}e_3e_1 + \alpha_{23}e_2e_3. \quad (4.3)$$

Аналогично п. 7, так как $\operatorname{Re} e_1 = \operatorname{Re} e_3 = 0$, то по лемме 4.3 имеем $e_3e_1 = (-e_1e_3) + c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Тогда равенство (4.3) можно записать как

$$(e_1e_2)e_3 = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_1e_2 + b_5e_1e_3 + b_6e_2e_3,$$

где $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, 6$, а именно, $b_0 = \alpha_0 + c$, $b_i = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, $b_4 = \alpha_{12}$ $b_5 = -\alpha_{31}$, $b_6 = \alpha_{23}$. Отсюда $(e_1e_2)(e_3 - b_4) = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_5e_1e_3 + b_6e_2e_3$. Обратным к $e_3 - b_4$ является $d(-b_4 - e_3)$, где $d \in \mathbb{R}$. Тогда, домножив на этот обратный слева, мы получим, используя лемму 4.6 и альтернативность, что

$$\begin{aligned}
e_1e_2 &= ((e_1e_2)e_3)(d(-b_4 - e_3)) \\
&= (b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_5e_1e_3 + b_6e_2e_3)d(-b_4 - e_3) \\
&= -d((b_0b_4 + b_3e_3^2) + (b_4b_1e_1 + b_5(e_1e_3)e_3) \\
&\quad + (b_4b_2e_2 + b_6(e_2e_3)e_3) + (b_1 + b_4b_5)e_1e_3 + (b_2 + b_6b_4)e_2e_3 \\
&= -d((b_0b_4 + b_3e_3^2) + (b_4b_1e_1 + b_5e_1e_3^2) + (b_4b_2e_2 + b_6e_2e_3^2) \\
&\quad + (b_1 + b_4b_5)e_1e_3 + (b_2 + b_6b_4)e_2e_3.
\end{aligned}$$

Так как $\operatorname{Re} e_3 = 0$, то $e_3^2 \in \mathbb{R}$, и таким образом мы получаем, что (e_1e_2) – линейная комбинация 1, e_1, e_2, e_3, e_2e_3 и e_1e_3, что противоречит п. 7. Значит, система 1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1 и $(e_1e_2)e_3$ является линейно независимой.

9. Из п. 8 мы получаем, что $\dim(\mathcal{L}_3(\mathcal{S}_2)) = 8$, то есть $l(\mathcal{S}_2) \leqslant 3$, а значит и $l(\mathcal{S}) \leqslant l(\mathcal{S}_2) \leqslant 3$.

10. Следовательно, длина алгебры октонионов не превосходит 3. Примером системы, у которой длина равна 3, может являться $\{i, j, l\}$: $k = ij$, $il = il$, $jl = jl$, $kl = (ij)l$.

Таким образом, длина алгебры октонионов равняется 3. □

Авторы благодарны О. В. Марковой за ценные обсуждения.

Литература

1. A. E. Guterman, O. V. Markova, *Commutative matrix subalgebras and length function.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 1790–1805.
2. A. Hurwitz, *Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln.* — Goett. Nachr.: 309–316, 1898.
3. О. В. Маркова, *Функция длины и матричные алгебры.* — Фунд. прикл. мат. **17**, No. 6 (2012), 65–173.
4. C. J. Pappacena, *An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra.* — J. Algebra **197** (1997), 535–545.
5. A. Paz, *An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables.* — Linear Multilinear Algebra **15** (1984), 161–170.
6. T. A. Springer, F. D. Veldkamp, *Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2000.
7. А. А. Туганбаев, *Обобщенные алгебры кватернионов.* — Мат. заметки **53**, No. 5 (1993), 120–128.
8. J. P. Ward, *Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications*, Kluwer Academic, Boston, 1997.

Guterman A. E., Kudryavtsev D. K. The lengths of the quaternion and octotion algebras.

The classical Gurvitz theorem claims that there are exactly four normed algebras with division: the real numbers ($\mathbb{R}$), complex numbers ($\mathbb{C}$), quaternions ($\mathbb{H}$), and octonions ($\mathbb{O}$). The length of $\mathbb{R}$ as an algebra over itself is zero; the length of $\mathbb{C}$ as an $\mathbb{R}$-algebra equals one. The purpose of the present paper is to prove that the lengths of the $\mathbb{R}$-algebras of quaternions and octonions equal two and three, respectively.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Московский центр непрерывного
математического образования,
Москва, Россия

E-mail: `alexander.guterman@gmail.com`

E-mail: `kdk97@rambler.ru`

Поступило 14 ноября 2016 г.