Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

Е. Г. Голузина

О ВЗАИМНОМ ИЗМЕНЕНИИ ПРОИЗВОДНОЙ И ТРЕТЬЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В ОДНОМ КЛАССЕ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

§1. Обозначения и основные результаты

Пусть T – класс функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$, т.е. вещественных на диаметре $(-1, 1)$, а в остальных точках круга U $\operatorname{Im} f(z)$ и $\operatorname{Im} z$ всегда одного знака.

Для функций класса T известно [1, 2] интегральное представление:

$$f(z) \in T \Longleftrightarrow f(z) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{z}{1 - 2tz + z^2}\, d\mu(t), \quad \mu(t) \in M_1, \qquad (1)$$

где M_1 – класс функций $\mu(t)$, не убывающих на $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} d\mu(t) = 1$. Из (1) следуют точные оценки для $f(r)$ и $f'(r)$:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant f(r) \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant f'(r) \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad 0 < r < 1,$$

и точные оценки для коэффициентов c_2 и c_3:

$$-2 \leqslant c_2 \leqslant 2, \quad -1 \leqslant c_3 \leqslant 3.$$

Пусть $T(f(r))$ $(0 < r < 1)$ – класс функций $f(z) \in T$ с фиксированным значением $f(r)$, $\frac{r}{(1+r)^2} < f(r) < \frac{r}{(1-r)^2}$.

Пусть T' – класс функций $f(z) \in T$ с фиксированным значением $f'(r)$, $\frac{1-r}{(1+r)^3} < f'(r) < \frac{1+r}{(1-r)^3}$, $0 < r < 1$.

Пусть $T(c_2)$ $(|c_2| < 2)$ и $T(c_3)$ $(-1 < c_3 < 3)$ – классы функций $f(z) \in T$ с фиксированными коэффициентами c_2 и c_3 соответственно.

Ключевые слова: типично вещественная функция, оценки коэффицентов.

В [3] получены точные оценки для $f(r)$ и $f'(r)$ в классе $T(c_2)$. Точные оценки для $f(r)$ в классе $T(c_3)$ даны в [4]. Точные оценки коэффициентов c_n в классе $T(f(r))$ в случае $n \leqslant 4$ получены в [4], а в случаях $n = 5$ и $n = 6$ – в [5].

В настоящей работе найдены точные оценки для $f'(r)$ и c_3 соответственно в классах $T(c_3)$ и T'.

Положим $\rho = \rho(r) = r + \frac{1}{r}$.

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n \in T(c_3)$. *Если* $\rho \geqslant 8$, *то имеют место точные оценки*

$$f'(r) \geqslant \frac{1-r^2}{(1+r^2+r\sqrt{c_3+1})^2} \quad \textit{при} \quad -1 < c_3 < 3, \tag{2}$$

$$f'(r) \leqslant \frac{1-r^2}{(1+r^2-r\sqrt{c_3+1})^2} \quad \textit{при} \quad -1 < c_3 < 3. \tag{3}$$

Если $2 < \rho < 8$, *то имеют место точная оценка* (2) *и точные оценки*

$$f'(r) \leqslant \frac{1-r^2}{(1+r^2-r\sqrt{c_3+1})^2} \quad \textit{при} \quad -1 < c_3 \leqslant x_1, \tag{4}$$

$$f'(r) \leqslant \frac{(3-c_3)(1-r^2)}{(3-x_1)(1+r^2-r\sqrt{c_3+1})^2} + \frac{(c_3-x_1)(1+r)}{(3-x_1)(1-r)^3} \ \textit{при} \ c_3 \in (x_1, 3), \tag{5}$$

где $x_1 = \tau_1^2 - 1$ *и* $\tau_1 = \frac{1}{2}(3\rho - 4 - \sqrt{5\rho^2 - 8\rho})$.

Теорема 2. *Пусть* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \in T'$, $0 < r < 1$, $f'(r) = x$.

Если $\rho \geqslant 8$, *то имеют место точные оценки*

$$c_3 \leqslant 3,$$

$$c_3 \geqslant \frac{1}{r^2}\left(1+r^2-\sqrt{\frac{1-r^2}{x}}\right)^2 - 1 \quad \textit{при} \quad x \in \left(\frac{1-r}{(1+r)^3}, \frac{1+r}{(1-r)^3}\right). \tag{6}$$

Если $2 < \rho < 8$, то имеют место точные оценки

$$c_3 \leqslant 3 \quad \textit{при} \quad x \in \left(\frac{1-r}{(1+r)^3}, \frac{1+r}{(1-r)^3} \right), \tag{7}$$

$$c_3 \geqslant \frac{1}{r^2}\left(1 + r^2 - \sqrt{\frac{1-r^2}{x}}\right)^2 - 1 \quad \textit{при} \quad x \in \left(\frac{1-r}{(1+r)^3}, x_2 \right], \tag{8}$$

$$c_3 \geqslant 3\frac{(x_2 - x)(1-r)^3}{(1-r)^3 x_2 - 1 - r}$$
$$+ \frac{[(1-r)^3 x - 1 - r]\left[\left(1+r^2-\sqrt{\frac{1-r^2}{x_2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^2} - 1\right]}{(1-r)^3 x_2 - 1 - r} \ \textit{при}\ x \in \left(x_2, \frac{1+r}{(1-r)^3} \right], \tag{9}$$

где $x_2 = \tau_2^2$ *и* $\tau_2 = \frac{1}{2(p^2-4)}\left(\rho - 4 + \sqrt{5\rho^2 - 8\rho}\right)\sqrt{-\rho'(r)}.$

§2. Доказательства

Докажем теорему 1. Используя предствление (1), получаем для системы $\{c_3, f'(r)\}$ интегральное представление

$$c_3 = \int_{-1}^{1} (4t^2 - 1)\, d\mu(t), \quad f'(r) = \int_{-1}^{1} \frac{-\rho'(r)}{(\rho - 2t)^2}\, d\mu(t), \mu(t) \in M_1.$$

В силу теоремы 1 в [6], множество значений D_1 системы $\{c_3, f'(r)\} = \{x, y\}$ на классе T в случае $\rho \geqslant 8$ является замкнутым выпуклым множеством, ограниченным прямолинейным отрезком I с концами в точках $\left(3, \frac{-\rho'(r)}{(\rho-2)^2}\right)$ и $\left(3, \frac{-\rho'(r)}{(\rho+2)^2}\right)$ и следующими кривыми L_1 и L_2:

$$L_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_+(x) = \frac{-\rho'(r)}{(\rho + \sqrt{x+1})^2}, \quad x \in [-1, 3] \right\},$$
$$L_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_-(x) = \frac{-\rho'(r)}{(\rho - \sqrt{x+1})^2}, \quad x \in [-1, 3] \right\}.$$

Имеем

$$y'_\pm(x) = \frac{\pm\rho'(r)}{(\rho \pm \sqrt{x+1})^3}\frac{1}{\sqrt{x+1}},$$
$$y''_\pm(x) = \frac{-\rho'(r)}{(\rho \pm \sqrt{x+1})^4 2(x+1)}\left[\frac{3}{\rho \pm \sqrt{x+1}} \pm \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right].$$

Так как $y''_+(x) > 0$, а $y''_-(x) = 0$ при $x = \frac{\rho^2}{16} - 1$, кривая L_2 имеет точку перегиба при $x = x_n = \frac{\rho^2}{16} - 1$. Имеем $x_n \geqslant 3$ при $\rho \geqslant 8$.

В случае $\rho < 8$ множество D_1 есть замкнутое выпуклое множество, ограниченное двумя прямолинейными отрезками I и I_1, где I_1 имеет концы в точках $\left(x_1, \frac{-\rho'(r)}{(\rho-\sqrt{x_1+1})^2}\right)$ и $\left(3, \frac{-\rho'(r)}{(\rho-2)^2}\right)$ и кривыми L_1 и l_2, где

$$l_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_-(x),\, x \in [x_1, 3]\right\}.$$

Из вышесказанного следуют оценки (2)–(5).

В случае $\rho < 8$ для нахождения точки x_1 – точки касания прямой

$$y = y'_-(x)(x-3) + \frac{-\rho'(r)}{(\rho-2)^2}$$

с кривой $y = y_-(x)$ – имеем уравнение

$$\frac{-\rho'(r)}{((\rho - \sqrt{x+1})^2} = \frac{-\rho'(r)}{\sqrt{x+1}(\rho - \sqrt{x+1})^3}(x-3) + \frac{-\rho'(r)}{(\rho-2)^2},$$

которое запишем в виде

$$-\rho'(r)(\sqrt{x+1} - 2)^2[-t^2 + (3\rho - 4)t - (\rho - 2^2] = 0, \quad t = \sqrt{x+1}.$$

Теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2.

Множество значений D_2 системы $\{f'(r), c_3\} = \{x, y\}$ на классе T является замкнутым выпуклым множеством, которое в случае $\rho \geqslant 8$ ограничено отрезком прямой с концами в точках $\left(\frac{-\rho'(r)}{(\rho+2)^2}, 3\right)$ и $\left(\frac{-\rho'(r)}{(\rho-2)^2}, 3\right)$ и кривой L'_1, где

$$L'_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = y(x) = \left(\rho - \sqrt{\frac{-\rho'(r)}{x}}\right)^2 - 1, x \in \left[-\frac{\rho'(r)}{(\rho+2)^2}, \frac{-\rho'(r)}{(\rho-2)^2}\right]\right\}.$$

Далее имеем

$$y'(x) = \frac{\sqrt{-\rho'(r)}}{x^2}\left(\rho\sqrt{x} - \sqrt{-\rho'(r)}\right)$$

и $y'(x) = 0$ при $x = \frac{-\rho'(r)}{\rho^2}$,

$$y''(x) = \sqrt{-\rho'(r)}\,\frac{4\sqrt{-\rho'(r)} - 3\rho\sqrt{x}}{2x^3}$$

и $y''(x) = 0$ при $x'_n = \frac{-\rho'(r)}{\rho^2}\ \frac{16}{9}$. Так как $x'_n \geqslant \frac{-\rho'(r)}{(\rho-2)^2}$ при $\rho \geqslant 8$, то в случае $\rho < 8$ множество значений D_2 ограничено кривой l'_2, где

$$l'_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = y(x) = \left(\rho - \sqrt{\frac{-\rho'(r)}{x}}\right)^2 - 1,\ x \in \left[\frac{-\rho'(r)}{(\rho+2)^2}, x_2\right] \right\},$$

и отрезком прямой с концами в точках

$$\left(\left(\rho - \sqrt{\frac{-\rho'(r)}{x_2}}\right)^2 - 1, x_2\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{-\rho'(r)}{(\rho-2)^2}, 3\right).$$

Из сказанного выше следуют оценки (6)–(9).

Для нахождения точки x_2 имеем уравнение

$$\left(\rho - \sqrt{\frac{-\rho'(r)}{x}}\right)^2 - 1 = \left(\rho - \sqrt{\frac{-\rho'(r)}{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{-\rho'(r)}}{x^{3/2}}\right)\left(x - \frac{-\rho'(r)}{(\rho-2)^2}\right) + 3,$$

которое запишется в виде

$$\left(\sqrt{\frac{x}{-\rho'(r)}} - \frac{1}{\rho-2}\right)^2 \left[\frac{x}{-\rho'(r)}(\rho^2-4) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-\rho'(r)}}(4-\rho) - 1\right] = 0.$$

Теорема 2 доказана.

Оценки (2)–(9) являются точными. Знаки равенства в (2) и (3) достигаются для функций

$$f_1(z) = \frac{z}{1 + z\sqrt{c_3+1} + z^2} \in T(c_3), \quad -1 \leqslant c_3 \leqslant 3,$$

и

$$f_2(z) = \frac{z}{1 - z\sqrt{c_3+1} + z^2} \in T(c_3), \quad -1 \leqslant c_3 \leqslant 3,$$

соответственно.

Знак равенства в (4) имеет место для функции $f_2(z)$ при $-1 \leqslant c_3 \leqslant x_1$.

Знак равенства в (5) имеет место для функции

$$f_3(z) = \frac{3-c_3}{3-x_1} \cdot \frac{z}{1 - z\sqrt{x_1+1} + z^2} + \frac{x_1-c_3}{x_1-3} \cdot \frac{z}{(1-z)^2},$$
$$c_3 \in (x_1, 3), \quad f_3(z) \in T(c_3).$$

Знак равенства в (6) и (7) для оценки $c_3 \leqslant 3$ имеет место для функции

$$f_4(z) = \frac{\lambda_1 z}{(1-z)^2} + \frac{\lambda_2 z}{(1+z)^2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Знак равенства во второй оценке в (6) имеет место для функции

$$f_5(z) = \frac{z}{1 - z\Big(\rho - \sqrt{\frac{-\rho'(r)}{f'(r)}}\Big) + z^2} \in T',$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant f'(r) \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Знак равенства в (8) достигается для функции $f_5(z)$ при $\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant f'(r) \leqslant x_2$.

Знак равенства в (9) достигается для следующей функции $f_6(z) \in T'$:

$$f_6(z) = \frac{[(\rho-2)^2 f'(r) + \rho'(r)]}{(\rho-2)^2 x_2 + \rho'(r)} \cdot \frac{z}{1 - z\Big(\rho - \sqrt{\frac{-\rho'(r)}{f'(r)}}\Big) + z^2}$$
$$+ \frac{[x_2 - f'(r)](\rho-2)^2}{(\rho-2)^2 x_2 + \rho'(r)} \cdot \frac{z}{(1-z)^2} \quad \textit{при} \quad f'(r) \in \left[x_2, \frac{1+r}{(1-r)^3}\right].$$

Литература

1. M. S. Robertson, *On the coefficients of a typically-real function.* — Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 505–572.
2. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях.* — Мат. сб. **27 (69)** (1950), 201–218.
3. J. A. Jenkins, *Some problems for typically real functions.* — Canad. J. Math. **13** (1961), 427–431.
4. Е. Г. Голузина, *Некоторые точные оценки для типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 81–88.
5. Е. Г. Голузина, *Точные оценки начальных коэффициентов в одном классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 38–46.
6. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффицентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.

Goluzina E. G. On the mutual change of values of the derivative and third coefficient in a class of regular functions.

Let T be the class of functions $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ regular and typically real in the disk $|z| < 1$. Sharp estimates for the derivative $f'(r)$ $(0 < r < 1)$ in terms of the value c_3 and sharp estimates for the coefficient c_3 in terms of $f'(r)$ are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С.-Петербург, Россия
E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 2 ноября 2016 г.