Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 453, 2016 г.

Ю. А. Альпин, В. С. Альпина

ЛОКАЛЬНО СТРОГО ПРИМИТИВНЫЕ ПОЛУГРУППЫ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Введение

По известной теореме Фробениуса неприводимая неотрицательная матрица либо примитивна (и тогда некоторая её степень является положительной матрицей), либо она перестановочно подобна матрице вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

причём в блочно-диагональной матрице $A^r = \operatorname{diag}(A_{11}^{(r)}, A_{22}^{(r)}, \dots, A_{rr}^{(r)})$ диагональные блоки примитивны (см, например, [1, с. 60]). Число $r = r(A)$ в формуле (1) называется индексом импримитивности неприводимой матрицы A. Для примитивной матрицы индекс импримитивности равен единице.

В работе Протасова и Войнова [2] получено следующее обобщение теоремы Фробениуса: всякая неприводимая полугруппа неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов либо содержит положительную матрицу, либо посредством общего перестановочного подобия все матрицы полугруппы преобразуются к блочно-мономиальному виду (это значит, что в каждой блочной строке и каждом блочном столбце есть ровно один ненулевой блок). При этом преобразованная полугруппа содержит блочно-диагональную матрицу с положительными диагональными блоками.

В настоящей работе предлагается другое обобщение теоремы Фробениуса на случай полугрупп матриц. Из теоремы Фробениуса следует, что, начиная с некоторой, все степени примитивной матрицы A положительны. Если же матрица A импримитивна и находится в форме (1), то все достаточно большие степени A имеют лишь положительные ненулевые блоки. Известно следующее обобщение понятия

Ключевые слова: теорема Фробениуса, индекс импримитивности, строго примитивные полугруппы неотрицательных матриц.

примитивной матрицы: полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц называется строго примитивной, если все достаточно длинные произведения матриц из $\mathcal{P}$ положительны [3]. В качестве аналога импримитивной матрицы в этой работе рассматривается полугруппа, приводимая к такому блочно-мономиальному виду, что все достаточно длинные произведения матриц имеют лишь положительные ненулевые блоки. Полугруппы неотрицательных матриц с этим свойством мы называем локально строго примитивными.

Работа состоит из трёх параграфов. В §1 даётся критерий строгой примитивности. Из его доказательства следует известная [3] оценка экспонента строгой примитивности. В §2 определяется понятие вполне приводимой полугруппы неотрицательных матриц и формулируется аналог теоремы Протасова–Войнова применительно к вполне приводимым полугруппам. Этот результат используется в §3 для вывода критерия локальной строгой примитивности.

Как и в статье [4], продолжением которой является данная работа, в определениях и доказательствах используются лишь комбинаторные свойства неотрицательных матриц.

§1. Строго примитивные полугруппы

Полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц порядка n называется строго примитивной, если существует такое натуральное число $\varkappa$, что любое произведение матриц из $\mathcal{P}$, включающее не меньше, чем $\varkappa$ сомножителей, является положительной матрицей.

Определим для неотрицательной матрицы A порядка n отображение на подмножествах множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, положив, что образом множества S является множество $SA = \{j|\ (A)_{ij} > 0, i \in S\}$. В терминах этого отображения приводимая матрица A порядка $n \geqslant 2$ характеризуется тем, что $SA \subseteq S$ для некоторого собственного подмножества $S \subsetneq N$ (нулевая матрица порядка один считается приводимой). Если матрица A неприводима, то у неё нет нулевых столбцов, поэтому $NA = N$. Из этих соображений вытекает

Лемма 1. *Пусть даны неприводимая неотрицательная матрица A порядка n и непустое подмножество $S \subseteq N$. Если $SA = S$, то $S = N$.*

Теорема 1. *Полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц строго примитивна тогда и только тогда, когда она состоит из неприводимых матриц.*

Доказательство. Если полугруппа $\mathcal{P}$ содержит приводимую матрицу A, то никакая степень этой матрицы не может быть положительной. Следовательно, $\mathcal{P}$ не является строго примитивной. Теперь предположим, что все матрицы из $\mathcal{P}$ неприводимы. Пусть произвольным образом выбраны матрицы $A_1, \ldots, A_k$ из $\mathcal{P}$ и индекс $i \in N$. Рассмотрим последовательность подмножеств

$$\{i\}, \{i\}A_1, \{i\}A_1A_2, \ldots, \{i\}A_1A_2\ldots A_k. \tag{2}$$

При $p < q \leqslant k$ подмножество $\{i\}A_1\ldots A_q$ получается из подмножества $\{i\}A_1\ldots A_p$ действием неприводимой матрицы $A_{p+1}\ldots A_q$. По лемме 1 в последовательности (2) нет равных собственных подмножеств. При этом, если встретится множество N, то последующие множества тоже равны N. Непустых подмножеств N всего 2^n-1, следовательно, при $k = 2^n-2$ последнее множество в (2) есть N, т.е. i-я строка матрицы $A_1A_2\ldots A_k$ положительная. Ввиду произвольности выбора номера i все элементы этой матрицы положительны. $\square$

Экспонентом строго примитивной полугруппы $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц называется наименьшее натуральное $\varkappa$ такое, что любое произведение $\varkappa$ матриц из $\mathcal{P}$ является положительной матрицей.

Из доказательства теоремы 1 непосредственно вытекает следующая оценка, установленная в [3].

Следствие 1. *Экспонент строго примитивной полугруппы неотрицательных матриц порядка n не превышает числа 2^n-2.*

В [3] доказано, что оценка следствия 1 не может быть улучшена. Приведём более короткое доказательство этого факта. Пусть собственные подмножества $S, T \subseteq N$ таковы, что $S \neq T$, причем элементов в S не больше, чем в T. Определим множество неотрицательных матриц $[S,T]$ полагая, что $A \in [S,T]$, если $a_{ij} = 0$ лишь при $i \in S, j \notin T$. Нетрудно заметить, что а) $SA = T$, б) матрица A неразложимая, но не положительная. Пусть $A \in [S,T]$, $B \in [U,V]$. Тогда $AB \in [S,V]$ при $T \subseteq U$, в противном случае $AB > 0$. Отсюда следует, что матрицы, принадлежащие множествам типа $[S,T]$, вместе с множеством положительных матриц, образуют строго примитивную полугруппу. Докажем, что экспонент этой полугруппы равен $\varkappa = 2^n-2$. Для этого составим произведение длины $\varkappa - 1$ матриц этой полугруппы, содержащее нулевые элементы. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_{\varkappa-1}, S_\varkappa$ – последовательность всех собственных подмножеств N, в которой множества большей мощности следуют за множествами меньшей мощности. Пусть $A_k \in [S_k, S_{k+1}]$, тогда $A_1 A_2 \ldots A_k \in [S_1, S_{k+1}]$ $(k = 1, \ldots, \varkappa)$. Следовательно, эти произведения, включая матрицу $A_1 \ldots A_{\varkappa-1}$, содержат нули.

Теорема 1 эквивалентна следующему утверждению.

Следствие 2. *Полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц строго примитивна тогда и только тогда, когда она состоит из примитивных матриц.*

Действительно, если некоторая неприводимая матрица $A \in \mathcal{P}$ имеет индекс импримитивности $r \geqslant 2$, то матрица A^r приводима.

Замечание 1. В пионерской работе [3] поставлен вопрос о наименьшей мощности множества неотрицательных матриц порядка n, порождающего строго примитивную полугруппу с экспонентом, равным $2^n - 2$. Недавно [5] было получено существенное продвижение в решении этого вопроса: построено порождающее множество, содержащее всего n матриц, в то время как соответствующее множество из [3] содержит $2^n - 2$ матриц.

§2. Вполне приводимые полугруппы

Напомним, что полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц порядка n называется приводимой, если все матрицы полугруппы посредством одного перестановочного подобия преобразуются к блочно-треугольному виду

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В противном случае полугруппа $\mathcal{P}$ называется неприводимой. Известно, что полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима, если для любых $i, j \in N$ существует такая матрица $A \in \mathcal{P}$, что $(A)_{ij} > 0$.

С данным определением хорошо согласуется известное понятие неприводимой неотрицательной матрицы: матрица A неприводима, если неприводима полугруппа $\langle A \rangle$, порождённая этой матрицей. Из неприводимости матрицы A следует, что эта матрица и все матрицы полугруппы $\langle A \rangle$ не содержат нулевых строк и столбцов. Для произвольной полугруппы это не так, и для обобщения теоремы Фробениуса необходимо наложить условие отсутствия в матрицах полугруппы нулевых строк и столбцов (подробнее см. [2]).

Неотрицательную матрицу A называют вполне приводимой, если она неприводима или перестановочно подобна матрице

$$\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_\sigma), \tag{4}$$

где диагональные блоки неприводимы. Полугруппу $\mathcal{P}$ будем называть вполне приводимой, если она неприводима или все матрицы из $\mathcal{P}$ одновременной перестановкой рядов могут быть преобразованы к виду (4) причём полугруппы $\mathcal{P}_s = \{A_s\}$ (которые мы будем называть компонентами полугруппы $\mathcal{P}$) неприводимы ($s = 1, \ldots, \sigma$).

Вполне приводимые матрицы очевидным образом наследуют некоторые свойства неприводимых матриц. В частности, вполне приводимость матрицы A равносильна вполне приводимости полугруппы $\langle A \rangle$. Кроме того, вполне приводимая матрица A и все матрицы полугруппы $\langle A \rangle$ не содержат нулевых строк и столбцов. Вполне приводимые полугруппы в общем случае этим свойством не обладают. Как и в работе [2], для получения содержательного обобщения теоремы Фробениуса мы предполагаем отсутствие нулевых рядов в матрицах, т. е. рассматриваем полугруппы, лежащие в полугруппе $\mathbb{P}_n$ всевозможных неотрицательных матриц порядка n без нулевых рядов.

Свяжем с полугруппой $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ бинарное отношение достижимости на множестве индексов N, полагая, что индекс j достижим (или $\mathcal{P}$-достижим) из индекса i, если $(A)_{ij} > 0$ для некоторой матрицы $A \in \mathcal{P}$. Отношение достижимости транзитивно, но, вообще говоря, не симметрично.

Лемма 2. *Необходимым и достаточным условием вполне приводимости полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ является симметричность отношения $\mathcal{P}$-достижимости.*

Доказательство. В случае вполне приводимой полугруппы $\mathcal{P}$ индекс j достижим из индекса i лишь тогда, когда оба индекса принадлежат одной неприводимой компоненте $\mathcal{P}$. Любые два индекса, принадлежащие одной компоненте, взаимодостижимы. Следовательно, отношение достижимости симметрично.

Теперь пусть отношение достижимости симметрично. Поскольку матрицы полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ не содержат нулевых строк, из любого индекса i достижим некоторый индекс j. По свойству симметрии из j

достижим i, а согласно транзитивности из i достижим i. Таким образом, транзитивное и симметричное отношение достижимости также и рефлексивно, следовательно, является отношением эквивалентности. Если множество N представляет собой один класс достижимости, то полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима. В противном случае множество N распадается на классы достижимости. Внутри класса любой индекс достижим из любого другого, но индексы из различных классов недостижимы друг из друга. Это означает, что подходящей перестановкой рядов матрицы полугруппы преобразуются к виду (4), где каждому классу достижимости отвечает неприводимая компонента. $\square$

Индексом импримитивности полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ называется максимальное число $r(\mathcal{P})$ индексов, любые два из которых несовместимы полугруппой $\mathcal{P}$; если любые два индекса совместимы, то $r(\mathcal{P}) = 1$. Характеристика $r(\mathcal{P})$ введена в [2], наше определение отличается лишь формулировкой. В случае моногенной полугруппы $\langle A \rangle$ мы будем писать $r(A)$ вместо $r(\langle A \rangle)$ и называть число $r(A)$ индексом импримитивности матрицы A.

Пусть дано разбиение π множества N. Будем говорить, следуя [2], что матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ действуют на разбиении π как перестановки, если для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$ всякому классу S разбиения π взаимно однозначно соответствует класс $T = SA$. Легко видеть, что посредством некоторой перестановки строк и такой же перестановки столбцов все матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ можно привести к блочно-мономиальной форме, согласованной с разбиением π.

Имея в виду лемму 2, приведём теорему 4 из [4], заменив в ней условие симметричности отношения $\mathcal{P}$-достижимости на эквивалентное, но более прозрачное условие вполне приводимости полугруппы $\mathcal{P}$.

Теорема 2. *Для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ с индексом импримитивности r следующие условия эквивалентны.*

1. *Полугруппа $\mathcal{P}$ вполне приводима.*

2. *Отношение $\mathcal{P}$-совместимости на множестве N является эквивалентностью с числом классов, равным r. Если $r = 1$, то полугруппа содержит положительную матрицу. Если $r \geqslant 2$ и полугруппа находится в форме, согласованной с классами совместимости, то матрицы полугруппы имеют в каждом блочном ряду единственный ненулевой блок. Полугруппа содержит идеал $I(\mathcal{P})$, составленный из матриц, в которых все ненулевые блоки положительны.*

Замечание 2. Разбиение множества N на классы совместимости в случае неприводимой полугруппы совпадает с каноническим разбиением, определённым в [2]. Как и последнее, оно является единственным разбиением со свойствами, описанными в п. 2 теоремы 2 (см. [4]).

В заключение параграфа опишем естественный класс матриц, в котором лежат только вполне приводимые полугруппы. Рассмотрим полугруппу G_n неотрицательных матриц порядка n со следующим свойством: для любой матрицы $A \in G_n$ суммы элементов строк и столбцов равны одному числу $r(A) > 0$. Докажем, что любая подполугруппа $\mathcal{P} \subseteq G_n$ вполне приводима. Действительно, предположим, что $\mathcal{P}$ приводима и все матрицы преобразованы к форме (3). При этом, очевидно, свойство равенства строчных и столбцовых сумм сохраняется. Обозначим через n_1 порядок матрицы X в (3). Сумма элементов первых n_1 строк, а также первых n_1 столбцов, матрицы (3) равна $n_1 r(X) > 0$. Но это возможно лишь если $Z = 0$. Если полугруппа, образованная блоками X (или блоками Y) матриц из $\mathcal{P}$, приводима, то к ней можно применить аналогичные рассуждения. Продолжая так, докажем вполне приводимость полугруппы $\mathcal{P}$.

В G_n входят, в частности, полугруппы дважды стохастических матриц, т.е. неотрицательных матриц, у которых не только строчные, но и столбцовые суммы равны единице.

§3. Локально строгая примитивность

Полугруппу $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц порядка n будем называть локально строго примитивной, если она строго примитивна или существует такое разбиение множества N, что

1) матрицы из $\mathcal{P}$ действуют на этом разбиении как перестановки;

2) существует такое натуральное число $\varkappa$, что в форме, согласованной с разбиением, любое произведение матриц из $\mathcal{P}$, включающее не меньше, чем $\varkappa$ сомножителей, является матрицей, в которой все ненулевые блоки положительны.

Как следует из теоремы 2 и замечания 2, локально строго примитивная полугруппа $\mathcal{P}$ вполне приводима, причём разбиение, о котором говорится в данном выше определении, есть разбиение на классы совместимости. В множестве вполне приводимых полугрупп локально строго примитивная полугруппа $\mathcal{P}$ выделяется тем, что не только содержит идеал $I(\mathcal{P})$, но любое достаточно длинное произведение матриц принадлежит $I(\mathcal{P})$.

Сопоставим неотрицательной матрице A матрицу βA над двухэлементной булевой алгеброй такую, что $(\beta A)_{ij} = 1 \Leftrightarrow (A)_{ij} > 0$. Хорошо известно, что это отображение является гомомоморфизмом полугруппы неотрицательных матриц порядка n в конечную полугруппу булевых матриц того же порядка. Далее нам потребуется следующее утверждение [6].

Лемма 3. *Для любой конечной полугруппы существует такое натуральное число $\varkappa$, что при $k \geqslant \varkappa$ в любом произведении элементов полугруппы $x_1 x_2 \ldots x_k$ существует подпроизведение $x_s x_{s+1} \ldots x_t$, являющееся идемпотентом $(1 \leqslant s \leqslant t \leqslant k)$.*

Теорема 3. *Полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ локально строго примитивна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$ моногенная полугруппа $\langle A \rangle$ вполне приводима, причём индексы импримитивности матриц полугруппы совпадают.*

Доказательство. Докажем, что для любых матриц $A, B \in \mathcal{P}$ разбиения на классы совместимости, определяемые полугруппами $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$, совпадают. Вначале установим, что полугруппа $\langle B \rangle$ совмещает лишь те пары индексов, которые совместимы полугруппой $\langle A \rangle$. Для краткости будем писать $I(A)$ вместо $I(\langle A \rangle)$. Допустим противное: некоторые индексы j_1 и j_2, не совместимые полугруппой $\langle A \rangle$, совместимы полугруппой $\langle B \rangle$. По свойству идеала $I(A)$ – см. теорему 2 – индексы j_1 и j_2 совместимы полугруппой $\langle A \rangle$ в точности тогда, когда они совместимы матрицей из идеала. Пусть $A^p \in I(A)$, $B^q \in I(B)$. Ввиду отсутствия в матрицах полугруппы нулевых столбцов существуют индексы i_1, i_2, такие что $(A^p)_{i_1 j_1} > 0$, $(A^p)_{i_2 j_2} > 0$. Индексы i_1, i_2, как предшественники не A^p-совместимых индексов, также несовместимы матрицей A^p. Но они, очевидно, совместимы матрицей $A^p B^q$. Последняя матрица совмещает все пары индексов, совместимых матрицей A^p, т. е. полугруппой $\langle A \rangle$, и, кроме того, совмещает пару i_1, i_2, несовместимую этой полугруппой. Следовательно, $r(A^p B^q) < r(A)$, что противоречит условию теоремы. По доказанному выше $\langle B \rangle$-разбиение является подразбиением $\langle A \rangle$-разбиения. На самом деле эти разбиения совпадают, так как количество классов в них одинаково. Обозначим это количество буквой r. Итак, имеется общее для всех матриц полугруппы $\mathcal{P}$ разбиение множества N на r классов, на котором матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ действуют как перестановки. Идеал $I(\mathcal{P})$ непуст, так как он содержит идеал $I(A)$ для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$. Следовательно, по теореме 2, полугруппа $\mathcal{P}$ вполне приводима, причем $r(\mathcal{P}) = r$. Первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение, коротко говоря, состоит в том, что всякое достаточно длинное произведение $A_1A_2 \dots A_k$ матриц из $\mathcal{P}$ принадлежит $I(\mathcal{P})$. Воспользуемся леммой 3. Пусть число $\varkappa$ таково, что любое произведение булевых матриц $\beta A_1 \beta A_2 \dots \beta A_k$, $k \geqslant \varkappa$, содержит идемпотент. Пусть таковым будет подпроизведение $\beta A_s \dots \beta A_t$. Тогда матрица $A_s \dots A_t$ блочно-диагональная, её диагональные блоки положительны, следовательно, $A_s \dots A_t \in I(\mathcal{P})$. Но если так, то и $A_1A_2 \dots A_k \in I(\mathcal{P})$. □

Заметим, что следствие 2 является частным случаем теоремы 3. Это следует из того, что вполне приводимая неотрицательная матрица с индексом импримитивности единица есть примитивная матрица.

Литература

1. H. Mink, *Nonnegative Matrices.* — Wiley, New York etc., 1988.
2. V. Yu. Protasov, A. S. Voynov, *Sets of nonnegative matrices without positive products.* — Linear Algebra Appl. **437** (2012), 749–765.
3. J. E. Cohen, P. H. Sellers, *Sets of nonnegative matrices with positive inhomogeneous products.* — Linear Algebra Appl. **47** (1982), 185–192.
4. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Комбинаторные свойства целых полугрупп неотрицательных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 13–31.
5. Y. Wu, Y. Zhu, *Lifespan in a strongly primitive Boolean linear dynamical system.* — Electron. J. Combin. **22**, No. 4 (2015), #P4.36.
6. T. E. Hall, M. V. Sapir, *Idempotents, regular elements and sequences from finite semigroups.* — Discrete Math. **161** (1996), 151–160.

Al'pin Yu. A., Al'pina V. S. Locally strongly primitive semigroups of nonnegative matrices.

The class of locally strongly primitive semigroups of nonnegative matrices is introduced. It is shown that, by a certain permutation similarity, all the matrices of a semigroup of the class considered can be brought to block monomial form; moreover, any matrix product of sufficient length has positive nonzero blocks only. This shows that the following known property of an imprimitive nonnegative matrix in Frobenius form is inherited. If such a matrix is raised to a sufficiently high power, then all its nonzero blocks are positive. A combinatorial criterion of the locally strong primitivity of a semigroup of nonnegative matrices is found.

Казанский федеральный университет
Кремлевская ул., 8, 420008 Казань, Россия
E-mail: Yuri.Alpin@kpfu.ru

Казанский национальный исследовательский
технологический университет
ул. К. Маркса, 68, 420015 Казань, Россия

Поступило 10 октября 2016 г.