Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 452, 2016 г.

С. С. Яковенко

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НА $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ С ОБЩИМ СЛОЕМ $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1)$ И ПРОСТЫМИ ПОДСКОКАМИ

Введение

В данной статье мы изучаем векторные расслоения на поверхности $\mathbf{P}^1_A$, где A – дедекиндово кольцо, особенно интересен случай $A=\mathbb{Z}$.

Опыт алгебраической геометрии по изучению векторных расслоений на комплексных проективных пространствах (см. [1]) показывает, что проблема классификации векторных расслоений на поверхностях весьма трудная. В случае же $\mathbf{P}^1_A$ известно совсем немногое, а именно: в статье [2] А. Л. Смирнова получена классификация векторных расслоений с тривиальным общим слоем и простыми подскоками над областями главных идеалов.

Следующим возможным шагом в этом направлении является классификация векторных расслоений ранга 2 на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с общим слоем $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками.

Основной результат работы представлен в теореме 2.1.17 и предложениях 2.2.4, 2.2.5. Отметим, что классификация получена в случае произвольной области главных идеалов.

В примере 2.4 вычислено количество неизморфных расслоений на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$, имеющих подскок в одной точке $p\in\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

Данная работа является частью реализации программы [2] по синтезу теории векторных расслоений на алгебраических многообразиях и теории векторных расслоений на компактифицированных арифметических кривых, представленной геометрией чисел.

§1. Предварительные сведения

Пусть A – дедекиндова область.

Как обычно (см., например, [7]), $\mathbf{P}^1_A=\operatorname{Proj}A[t_0,t_1]$, $\deg t_0=\deg t_1=1$, U_i – дополнение к нулям t_i, $U_{01}=U_0\cap U_1$, $x=t_1/t_0$, $y=t_0/t_1$, $xy=1$.

Ключевые слова: векторное расслоение, арифметическая поверхность, проективная прямая, линейное расслоение, приведение, подскок.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-21-00035).

Тогда

$$\mathcal{O}(U_0) = A[x], \quad \mathcal{O}(U_1) = A[y], \quad \mathcal{O}(U_{01}) = A[x, y].$$

1.1. Некоторые известные результаты. Приведем некоторые известные результаты, связанные с векторными расслоениями на $\mathbf{P}^1_A$.

1.1.1. Теорема (Гротендик, [1]). *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_F$, где F – поле, может быть представлено суммой линейных расслоений, причем слагаемые определены однозначно.*

Линейные расслоения на $\mathbf{P}^1_F$ также хорошо известны.

1.1.2. Теорема (Серр, [3]). *Всякое линейное расслоение на $\mathbf{P}^n_A$ изоморфно расслоению вида $p^*L \otimes \mathcal{O}(d)$, где L – линейное расслоение на $\operatorname{Spec} A$, а p – структурная проекция $\mathbf{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$.*

В частности, любое расслоение на $\mathbf{P}^1_F$ изоморфно расслоению $\mathcal{O}(d)$ для некоторого однозначно определенного $d \in \mathbb{Z}$.

Для произвольного дедекиндова A имеет место следующий результат.

1.1.3. Теорема (Hanna, [4]). *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, где A – дедекиндово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой либо линейные расслоения, либо расслоения ранга два.*

Полностью вопрос решен для евклидовых колец (см. [5]).

1.1.4. Теорема (Hanna, [4]). *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, где A – евклидово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения.*

В частности, всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения. Такая фильтрация называется линейной.

Описание явной конструкции фильтрации получено в [6].

1.2. Теорема о замене базы и её следствия ([7]). Нам потребуются некоторые следствия этой теоремы. Сформулируем необходимые результаты. Пусть $f : X \to Y$ – собственный морфизм нетеровых схем, $\mathcal{F}$ – когерентный $\mathcal{O}$-модуль, плоский над Y. Как обычно, X_y – слой f над $y \in Y$, а $\mathcal{F}_y = \mathcal{F}|_{X_y}$. Тогда функция $y \mapsto \chi(\mathcal{F}_y)$ локально постоянна на Y, а функция $y \mapsto \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$ (из Y в $\mathbb{Z}$) полунепрерывна сверху на Y. Кроме того, если Y – приведена и связна, то

(1) функция $y \mapsto \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$ постоянна на Y тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_Y$-модуль $\mathcal{E} = R^p f_* \mathcal{F}$ локально свободен (то есть является расслоением) и естественный морфизм $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$ – изоморфизм для всех $y \in Y$;

(2) если выполнены (равносильные) условия предыдущего пункта, то естественный морфизм $R^{p-1} f_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to H^{p-1}(X_y, \mathcal{F}_y)$ – изоморфизм для всех $y \in Y$.

1.3. Спектральная последовательность Бейлинсона. Некоторые методы, используемые в [1] для построения интересных векторных расслоений на $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, можно применить и в случае $\mathbf{P}^1_A$. Например, это относится к двум спектральным последовательностям Бейлинсона.

1.3.1. Теорема (Бейлинсон). *Пусть F – векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, а $p : \mathbf{P}^1_A \to \operatorname{Spec} A$ – структурная проекция. Существует спектральная последовательность с первым членом $E_1^{pq} = Rp_*^q(F(p)) \otimes \Omega^{-p}(p)$, сходящаяся к*

$$F^i = \begin{cases} F, & \text{если } i = 0; \\ 0, & \text{если } i \neq 0, \end{cases}$$

то есть $E_\infty^{pq} = 0$, если $p + q \neq 0$.

В частности, E_1-член этой последовательности расположен во втором квадранте, а его ненулевая часть расположена в нулевой и первой строках и имеет вид

$$H^1(F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{d^1} H^1(F) \otimes \mathcal{O}$$

$$H^0(F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{d^1} H^0(F) \otimes \mathcal{O}.$$

1.4. Оснащения и матрицы склейки. Пусть E – векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$,

$$r = \operatorname{rk} E.$$

Оснащением E назовем тривиализацию расслоений

$$E\big|_{U_0} = \mathcal{O}e_1 + \dots + \mathcal{O}e_r,$$

$$E\big|_{U_1} = \mathcal{O}f_1 + \dots + \mathcal{O}f_r.$$

По теореме Квиллена и Суслина ([8, 9]) все проективные A-модули свободны, поэтому каждое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$ допускает оснащение.

С оснащением связана матрица

$$\sigma \in \mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}]), \tag{1}$$

называемая ниже матрицей склейки, такая, что

$$[e_1, \dots, e_r]\sigma = [f_1, \dots, f_r] \tag{2}$$

на U_{01}. Иными словами, j-тый столбец σ представляет собой запись f_j в e-базисе.

Наоборот, с произвольной матрицей $\sigma \in \mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}])$ связано оснащенное r-расслоение $E(\sigma)$ на $\mathbf{P}^1_A$. По определению,

$$E(\sigma)\big|_{U_0} = \mathcal{O}e_1 + \dots + \mathcal{O}e_r, \quad E(\sigma)\big|_{U_1} = \mathcal{O}f_1 + \dots + \mathcal{O}f_r,$$

а на U_{01} расслоения склеиваются с помощью соотношения (2).

Таким образом, множество классов изоморфизма оснащенных векторных r-расслоений на $\mathbf{P}^1_A$ представлено как $\mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}])$, а множество классов изоморфизма (неоснащенных) векторных r-расслоений представлено как двойной фактор

$$\mathrm{Vect}_r(\mathbf{P}^1) = \mathrm{GL}_r(A[x]) \diagdown \mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}]) \diagup \mathrm{GL}_r(A[x^{-1}]). \tag{3}$$

§2. Расслоения с общим слоем $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками

Пусть A – дедекиндово кольцо. Мы собираемся изучать расслоения E ранга 2, такие, что $E_\eta \cong \mathcal{O} + \mathcal{O}(1)$ для общей точки $\eta \in \operatorname{Spec} A$ и $E_y \cong \mathcal{O} + \mathcal{O}(1)$ или $E_y \cong \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(2)$ для каждой замкнутой $y \in \operatorname{Spec} A$. Точки подскока образуют конечное множество.

2.1. Классификация.

2.1.1. Рассмотрим расслоение $F = E(1)$. Так как структура слоёв известна, можем вычислить первый лист спектральной последовательности Бейлинсона, воспользовавшись теоремой о замене базы. Ненулевыми элементами первого листа являются $E_1^{-1,0} = \mathcal{O}^3$ и $E_1^{0,0} = \mathcal{O}^5$, то есть первый лист имеет вид

$$\mathcal{O}^3(-1) \xrightarrow{d_1^{-1,0}} \mathcal{O}^5 .$$

Дальнейшие вычисления показывают, что последовательность вырождается в члене E_2, тогда по теореме Бейлинсона

$$E_\infty^{0,0} = E_2^{0,0} = \mathrm{Coker}\left(d_1^{-1,0}\right) = F. \tag{4}$$

2.1.2. Для вычислений зафиксируем $\mathcal{O}$-базисы e_1, e_2, e_3 и $f_1, \dots, f_5$ для расслоений $\mathcal{O}^3$ и $\mathcal{O}^5$. Выбор базисов фиксирует отождествление

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}^3(-2), \mathcal{O}^5(-1)) \cong M_{5,3}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1))).$$

Как мы выяснили ранее, расслоение $F = E(1)$ представляется в виде коядра отображения, действующего из $\mathcal{O}^3(-1)$ в $\mathcal{O}^5$. Подкрутив соответствующие расслоения на $\mathcal{O}(-1)$, получим представление E в виде фактора в точной последовательности

$$0 \to \mathcal{O}^3(-2) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}^5(-1) \to E \to 0, \tag{5}$$

где $\phi = t_0\phi_0 + t_1\phi_1$, а ϕ_0, $\phi_1 \in M_{5,3}(A)$. Замена базисов позволяет отождествлять расслоения, построенные по эквивалентным матрицам, где $\phi \sim \phi'$, если $\phi' = \rho\phi\sigma^{-1}$, $\rho \in \mathrm{GL}_5(A)$, $\sigma \in \mathrm{GL}_3(A)$. Будем называть такие преобразования приведением ϕ.

2.1.3. Рассмотрим морфизм $\mathcal{O}$-модулей

$$\phi : \mathcal{O}^3(-2) \to \mathcal{O}^5(-1). \tag{6}$$

Стрелку ϕ назовем невырожденной, если её коядро $E = \mathrm{Coker}(\phi)$ является расслоением ранга 2. Невырожденность стрелки равносильна её локальной расщепимости.

Докажем, что всякую невырожденную стрелку ϕ можно привести к более простому виду.

Ограничивая ϕ в точку $t_0 = 0$, из теории элементарных делителей получим $\phi \sim \phi^{(1)}$, где

$$\phi_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1_3 \\ 0_{2,3} \end{bmatrix} \in M_{5,3}(A),$$

где $1_3 \in M_{3,3}(A)$ обозначает единичную матрицу; для любых натуральных n, k $0_{n,k} \in M_{n,k}(A)$ – нулевая матрица соответствующего размера.

2.1.4. Стабилизатор $\phi_1^{(1)}$ в $\mathrm{GL}_5(A) \times \mathrm{GL}_3(A)$ состоит из пар (ρ, α^{-1}), где $\rho = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0_{2,2} & \delta \end{bmatrix}$, $\delta \in \mathrm{GL}_2(A)$, $\beta \in M_{3,2}(A)$ – произвольная матрица.

Теория элементарных делителей и произвольность обратимых матриц α и δ позволяют преобразовать ϕ в $\phi^{(1)}$, компоненты $\phi^{(1)}$ имеют вид

$$\phi_1^{(1)} = \phi_1^{(1)},\ \phi_0^{(1)} = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, \text{а } N = \begin{bmatrix} 0 & \nu\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Из невырожденности ϕ следует, что $\nu_1 \in A^*$. Действительно, если это не так, то существует такой простой элемент π, делящий ν_1, что по модулю π у матрицы $\phi^{(1)}$ имеется единственный 3-минор, который может быть ненулевым. Однако этот однородный полином степени 3 геометрически приводим, что противоречит невырожденности.

Поэтому можно считать $\nu_1 = 1$. Из этого следует, что $\mathrm{Coker}(\phi_1)$ не зависит от третьего столбца M, так как его можно подправить с помощью второй строки N. Таким образом, получили

$$\phi \sim \phi^{(2)} = t_1 \begin{bmatrix} 1_3 \\ 0_{2,3} \end{bmatrix} + t_0 \begin{bmatrix} M \\ N(\nu) \end{bmatrix},$$

$$\text{где } N(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \text{ а } \ M = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,1} & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ \varepsilon_{2,1} & \varepsilon_{2,2} & 0 \\ \varepsilon_{3,1} & \varepsilon_{3,2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь мы можем описать, как устроены слои $\mathrm{Coker}(\phi)$, используя достаточно простой вид $\phi^{(2)}$.

2.1.5. Предложение. *Если A – поле, то*

$$E \cong \begin{cases} \mathcal{O} + \mathcal{O}(1), & \text{при } \nu \neq 0; \\ \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(2), & \text{при } \nu = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Точность (5) показывает, что $\mathrm{Det}\, E \simeq \mathcal{O}_X(1)$ и $E \simeq \mathcal{O}_X(-d) + \mathcal{O}_X(d+1)$ для некоторого $d \geq 0$. Также с (5) связана длинная точная последовательность когомологий

$$0 \longrightarrow H^0(X, E) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^3(-2)) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X(-2))^3 \simeq A^3 \longrightarrow 0, \tag{8}$$

откуда $h^0(X, E) = 3$, а $d \leq 1$. Чтобы научиться отличать случай $d = 0$ от $d = 1$, рассмотрим подкрученную на $\mathcal{O}(-1)$ последовательность (5), а также связанную с ней длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(E(-1)) &\longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X^3(-3)) \\ &\xrightarrow{H^1(\phi(-1))} H^1(\mathcal{O}_X^5(-2)) \longrightarrow H^1(E(-1)) \to 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Нам нужна стрелка $H^1(\phi(-1))$. Будем вычислять сопряженную стрелку

$$H^0([\phi(-1)]^\vee \otimes K_X) : H^0(\mathcal{O}_X)^5 \to H^0(\mathcal{O}_X(1))^3,$$

где K_X – канонический класс. Для этого нужна лишь функториальность двойственности $H^1(\phi)^\vee = H^0(\phi^\vee)$. Ввиду этого искомая стрелка задана умножением на сопряженную матрицу

$$\phi^* \in M_{5,3}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1))).$$

В базисах $f_1^*, \dots, f_5^*$ и $t_0e_1, \dots, t_0e_3, t_1e_1, \dots, t_1e_3$ матрица ϕ^* выглядит так

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{1,1} & \varepsilon_{2,1} & \varepsilon_{3,1} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{1,2} & \varepsilon_{2,2} & \varepsilon_{3,2} & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Откуда имеем $H^0(X, E(-1) = A \oplus A/\nu$, $H^1(X, E(-1)) = A/\nu$, что завершает доказательство предложения. □

2.1.6. Следствие. $H^0(X, E(-1)) = A \oplus A/\nu$, $H^1(X, E(-1)) = A/\nu$.

Доказательство. Получено в ходе доказательства предыдущего предложения. □

Из предложения 2.1.5 и предположения о структуре расслоения E имеем $\nu \neq 0$.

2.1.7. Далее считаем, что кольцо A весьма специального вида, а именно A – факториальное дедекиндово кольцо, иными словами, A – область главных идеалов.

2.1.8. Займёмся дальнейшим приведением ϕ. Невырожденность ϕ равносильна невырожденности ограничений на окрестности U_0 и U_1. Рассмотрим ограничение ϕ на U_0

$$\phi\mid_{U_0} = \phi_0 + x\phi_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,1} + x & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ \varepsilon_{2,1} & \varepsilon_{2,2} + x & 0 \\ \varepsilon_{3,1} & \varepsilon_{3,2} & x \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Ограничивая ϕ в точку $x = -\varepsilon_{1,1}$, получим одно из необходимых условий невырожденности:

$$\gcd(\varepsilon_{2,1}, \varepsilon_{3,1}) = 1, \tag{11}$$

то есть существуют такие $\overline{\varepsilon_{2,1}}$, $\overline{\varepsilon_{3,1}} \in A$, что

$$\varepsilon_{2,1}\,\overline{\varepsilon_{2,1}} + \varepsilon_{3,1}\,\overline{\varepsilon_{3,1}} = 1. \tag{12}$$

Как мы увидим в следующих пунктах, это условие не является достаточным.

2.1.9. Напомним, что стабилизатор $\phi_1^{(1)}$ в $\mathrm{GL}_5(A) \times \mathrm{GL}_3(A)$ состоит из пар матриц (ρ, α^{-1}), определенных в 2.1.4. Вычислим стабилизатор $\phi_1^{(2)}$. Он состоит из пар (ρ', α'), имеющих следующий вид

$$\rho' = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \\ 0 & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \beta_{3,1} & \beta_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{1,1} & \delta_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{2,1} & \delta_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \alpha' = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ 0 & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\text{причём} \begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix} \in \widetilde{\Gamma}_0(\nu), \text{ то есть } \alpha_{3,2} \equiv 0 \pmod{\nu}. \tag{13}$$

Возьмем $\alpha_{1,2} = -\alpha_{1,1}\overline{\varepsilon_{2,1}}\,\varepsilon_{1,1}$, $\alpha_{1,3} = -\alpha_{1,1}\overline{\varepsilon_{2,1}}\,\varepsilon_{1,1}$, где $\overline{\varepsilon_{2,1}}$, $\overline{\varepsilon_{3,1}}$ из (12). Тем самым избавимся от коэффициента $\varepsilon_{1,1}$ в $\phi^{(2)}$.

Далее будем считать $\alpha_{1,1} = 1$. К тому же заметим, что произвольность матрицы $(\beta_{i,j})_{1\le i\le 3,\ 1\le j\le 2}$ позволяет считать коэффициенты $\varepsilon_{k,2}$ при $1 \le k \le 3$ определенными по модулю идеала (ν).

Из невырожденности $\phi^{(2)}$ также следует, что хотя бы один из коэффициентов $\varepsilon_{2,1}, \varepsilon_{3,1}$ взаимно прост с ν. Это обстоятельство и условие (13) сводят следующий шаг приведения к рассмотрению двух случаев.

2.1.10. Случай I: $\varepsilon_{3,1} \not\equiv 0 \pmod{\nu}$. Так как $\varepsilon_{3,1}$ взаимно прост с ν и с $\varepsilon_{2,1}$ по (11), существуют такие τ и ω, что $\varepsilon_{2,1}\,\nu\tau + \varepsilon_{3,1}\,\omega = 1$. Положим

$$\begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{3,1} & -\varepsilon_{2,1} \\ \nu\tau & \omega \end{bmatrix} \in \widetilde{\Gamma}_0(\nu). \tag{14}$$

Тогда $\phi \sim \phi^{(2)}$ приводится к виду

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2,2} & 0 \\ 1 & \varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

2.1.11. Случай II: $\varepsilon_{3,1} \equiv 0 \pmod{\nu}$. Напомним, что имеются $\overline{\varepsilon_{2,1}}, \overline{\varepsilon_{3,1}} \in A$ из условия (12). Определим

$$\begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_{2,1}} & \overline{\varepsilon_{3,1}} \\ -\varepsilon_{3,1} & \varepsilon_{2,1} \end{bmatrix} \in \widetilde{\Gamma}_0(\nu). \tag{16}$$

Тогда ϕ приводится к виду

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ 1 & \varepsilon_{2,2} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

2.1.12. Таким образом, всякая невырожденная ϕ эквивалентна стрелке вида (15) или (17). Докажем теперь необходимое и достаточное условие невырожденности ϕ.

2.1.13. Предложение. *Стрелка ϕ является невырожденной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*

(1) $\varepsilon_{2,2} = 0$ *и* $\gcd(\varepsilon_{1,2}, \nu) = 1$, *если ϕ приведена к виду* (15)*;*
(2) $\varepsilon_{2,2} = \varepsilon_{1,2} = 0$ *и* $\gcd(\nu, \varepsilon_{3,2}) = 1$, *если ϕ приведена к виду* (17).

Доказательство. Начнем со случая стрелки вида (15).

Невырожденность ϕ равносильна невырожденности ограничений ϕ на U_0 и U_1. Ограничение ϕ на U_1 имеет вид

$$\phi\big|_{U_1} = y\phi_0 + \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_{1,2}\, y & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2,2}\, y + 1 & 0 \\ y & \varepsilon_{3,2}\, y & 1 \\ 0 & \nu y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2,2}\, y + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \nu y & 0 \\ 0 & (-\varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{1,2}\, y) y^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что невырожденность ограничения на U_1 равносильна инъективности морфизма

$$A[y] \to A[y]^3 : 1 \mapsto (\varepsilon_{2,2}\, y + 1,\ \nu y,\ (-\varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{1,2}\, y) y^2)$$

и проективности его коядра. Расщепимость проекции на коядро равносильна расщепимости вложения $A[y] \to A[y]^3$, то есть унимодулярности строки

$$(\varepsilon_{2,2}\, y + 1,\ \nu y,\ (-\varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{1,2}\, y)y^2).$$

Предположим, что данная строка унимодулярна, тогда в точке $y = \nu$ она принимает вид

$$(\varepsilon_{2,2}\, \nu + 1,\ \nu^2, (-\varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{1,2}\, \nu)\nu^2),$$

и существует тройка $(a, b, c) \in A^3$, такая что

$$a(\varepsilon_{2,2}\, \nu + 1) + b\nu^2 + c(-\varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{1,2}\, \nu)\nu^2 = 1.$$

Сразу имеем $a = 1$, но из этого следует, что $\varepsilon_{2,2}$ делится на ν. Однако ранее мы отмечали, что коэффициент $\varepsilon_{2,2}$ определен по модулю ν. То есть $\varepsilon_{2,2} = 0$ является необходимым условием невырожденности ϕ.

Ограничение ϕ на U_0 имеет вид

$$\phi\big|_{U_0} = \phi_0 + x\phi_1$$
$$= \begin{bmatrix} x & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2,2} + x & 0 \\ 1 & \varepsilon_{3,2} & x \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} - \varepsilon_{3,2}\, x & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2,2} + x & 0 \\ 1 & \varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{3,2}\, \varepsilon_{2,2}\, x & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2,2} + x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Применяя рассуждение, аналогичное предыдущему, к морфизму

$$A[x] \to A[x]^3 : 1 \mapsto (\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{3,2}\, \varepsilon_{2,2}\, x, \varepsilon_{2,2} + x, \nu),$$

получим равносильность невырожденности ограничения ϕ на U_0 и унимодулярности строки

$$(\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{3,2}\, \varepsilon_{2,2}\, x, \varepsilon_{2,2} + x, \nu).$$

Воспользовавшись условием $\varepsilon_{2,2} = 0$, получим второе необходимое условие невырожденности, а именно: невырожденность стрелки рассматриваемого вида влечет унимодулярность строки $(\varepsilon_{1,2}, \nu)$.

Достаточность этих условий проверяется непосредственно.

Пусть выполнены условия $\varepsilon_{2,2} = 0$, $(\varepsilon_{1,2}, \nu) = 1 = \varepsilon_{1,2}\, \zeta + \nu\xi$.

Невырожденность сужения на U_1 очевидна. Невырожденность сужения на U_0 равносильна унимодулярности строки $(\varepsilon_{1,2}, x, \nu)$, имеем

$$(\zeta + x\zeta) \cdot \varepsilon_{1,2} - 1 \cdot x + (\xi + x\xi) \cdot \nu = 1.$$

Перейдем к рассмотрению случая стрелки вида (17).

Ограничение ϕ на U_1 имеет вид

$$\phi\big|_{U_1} = y\phi_0 + \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_{1,2}\, y & 0 \\ y & \varepsilon_{2,2}\, y + 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{3,2}\, y & 1 \\ 0 & \nu y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_{1,2}\, y & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{1,2}\, y^2 + \varepsilon_{2,2}\, y + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \nu y & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{3,2}\, y^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко получить следующие необходимые условия невырожденности: $\varepsilon_{2,2} = 0$, $\varepsilon_{1,2} = 0$, строка $(\nu, \varepsilon_{3,2})$ унимодулярна.

Докажем достаточность. Для этого нужно показать, что при данных условиях стрелка невырождена на U_0. Как и ранее, вопрос сводится к проверке унимодулярности строки $(-x^2 - \varepsilon_{2,2}\, x + \varepsilon_{1,2}, \varepsilon_{3,2}, \nu)$. Напомним, что $\varepsilon_{2,2} = \varepsilon_{1,2} = 0$, $\nu\zeta + \varepsilon_{3,2}\, \xi = 1$, поэтому

$$\phi\big|_{U_0} \text{ невырожденна } \Leftrightarrow (-x^2, \varepsilon_{3,2}, \nu) \text{ унимодулярна.}$$

Подберем нужную линейную комбинацию

$$-x^2 \cdot 1 + \varepsilon_{3,2} \cdot (\xi + x^2\xi) + \nu \cdot (\zeta + x^2\zeta) = 1,$$

это завершает доказательство предложения. □

2.1.14. Таким образом, мы получили две серии расслоений, в каждой из которых расслоения задаются определённым набором параметров. Введем для удобства новые обозначения.

2.1.15. Расслоения типа a. Пусть стрелка в последовательности (5) приводится к виду

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \zeta & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

где строка (ε, ν) унимодулярна, $\nu \neq 0$. По предложению 2.1.13 ϕ является невырожденной, то есть определяет 2-расслоение.

Будем называть расслоения, определяемые такими ϕ, расслоениями типа a.

Обозначим

$$E_a^{\nu,\varepsilon,\zeta} = \operatorname{Coker} \phi, \tag{19}$$

где символ a указывает на тип расслоения.

2.1.16. Расслоения типа b. Пусть стрелка в последовательности (5), приводится к виду

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где строка (ε, ν) унимодулярна, $\nu \neq 0$, по предложению 2.1.13 ϕ является невырожденной, то есть определяет 2-расслоение.

Будем называть расслоения, определяемые такими ϕ, расслоениями типа b. Обозначим

$$E_b^{\nu,0,\varepsilon} = \operatorname{Coker} \phi, \tag{21}$$

где символ b указывает на тип расслоения.

2.1.17. Теорема. *Пусть E – векторное 2-расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, причем его общий слой E_K на $\mathbf{P}^1_K$ изоморфен $\mathcal{O} + \mathcal{O}(1)$, а все подскоки имеют вид $\mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(2)$. Тогда E изоморфно или расслоению вида $E_a^{\nu,\varepsilon,\zeta}$, или расслоению вида $E_b^{\nu,0,\varepsilon}$, где ν и ε автоматически взаимно просты.*

Доказательство. Учитывая следствия теоремы о замене базы 1.2, знание общего слоя и вид подскоков, легко понять, что $H^1(\mathbf{P}^1, E) \simeq H^1(\mathbf{P}^1, E(-1)) \simeq 0$, $H^0(\mathbf{P}^1, E) \simeq A^3$, $H^0(\mathbf{P}^1, E(1)) \simeq A^5$. Применяя к $E(1)$ теорему Бейлинсона (см. 1.3.1) и открутку, получим представление E в виде фактора в точной последовательности

$$0 \to \mathcal{O}^3(-2) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}^5(-1) \to E \to 0, \tag{22}$$

где $\phi = t_0\phi_0 + t_1\phi_1$, а ϕ_0, $\phi_1 \in M_{5,3}(A)$. Мы показали, что всякая невырожденная стрелка ϕ приводится к виду (15) или (17), воспользовавшись предложением 2.1.13, окончательно получим в каждом из случаев.

Если расслоение имеет тип a, то

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

где строка $(\varepsilon_{1,2}, \nu)$ унимодулярна.

Если расслоение имеет тип b, ϕ приводится к виду

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

где строка $(\varepsilon_{3,2}, \nu)$ унимодулярна. □

2.2. Морфизмы между расслоениями. Пусть даны 2-расслоения F и G, имеющие общий слой $\mathcal{O} + \mathcal{O}(1)$ и простые подскоки, мы хотим изучить морфизмы между ними. Функториальность спектральной последовательности Бейлинсона сводит вычисление $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$ к перечислению коммутативных диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^3(-2) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{O}^5(-1) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & F \arrow[r] & 0 \\ \mathcal{O}^3(-2) \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{O}^5(-1) \arrow[r] & G \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

где ϕ и ψ – стрелки из определения F и G. Уравнение коммутативности имеет следующий вид:

$$\lambda\phi = \psi\theta. \tag{25}$$

Теорема 2.1.17 сводит изучение этого вопроса к рассмотрению трех случаев, которые будут подробно разобраны в следующих предложениях.

2.2.1. Предложение. *Пусть $F = F_a^{\nu,\varepsilon,\xi}$ или $F = F_b^{\nu,0,\varepsilon}$, $G = G_a^{\mu,\zeta,\chi}$ или $G = G_b^{\mu,0,\zeta}$ (см. определения в 2.1.15, 2.1.16), где $(\nu, \varepsilon) = 1$, $(\mu, \zeta) = 1$, $\nu \neq 0$, $\mu \neq 0$. Композиция функтора H^0 и канонических изоморфизмов $H^0(X, F) \simeq A^3$ и $H^0(X, G) \simeq A^3$ из (7), отождествляет $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$ с множеством матриц $\theta \in M_{3,3}(A)$ (переводя при этом композиции в произведения), для которых выполнены следующие условия целочисленности матриц*

$$\lambda_{2,2} N(\nu) = N(\mu)\theta, \quad \lambda_{2,2} \in M_{2,2}(A), \tag{26}$$

$$(M(\zeta)\theta - \theta M(\varepsilon))_{*,k} \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \in M_{3,2}(A), \ 2 \leq k \leq 3. \tag{27}$$

И выполняется условие

$$(M(\zeta)\theta - \theta M(\varepsilon))_{*,1} = 0_3. \tag{28}$$

Доказательство. Предположим, что существует пара морфизмов (θ, λ), удовлетворяющих уравнению (25). В точке $t_0 = 0$ коммутирование сводится к равенствам $\lambda_{1,1} = \theta$, $\lambda_{2,1} = 0$, где $\lambda_{2,1} \in M_{2,3}(A)$.

$$\begin{bmatrix} \theta & \lambda_{1,2} \\ 0 & \lambda_{2,2} \end{bmatrix} \phi = \psi\theta. \tag{29}$$

Запишем ϕ и ψ в виде

$$\phi = \begin{bmatrix} M(\varepsilon) \\ N(\nu) \end{bmatrix}, \ \psi = \begin{bmatrix} M(\zeta) \\ N(\mu) \end{bmatrix}, \tag{30}$$

тогда условие (29) точке $t_1 = 0$ запишется в виде двух условий

$$\theta M(\varepsilon) + \lambda_{1,2} N(\nu) = M(\zeta)\theta, \quad \lambda_{2,2} N(\nu) = N(\mu)\theta. \tag{31}$$

Условие на $\lambda_{1,2}$ и использование явного вида $N(\nu)$ приводят к следующим ограничениям

$$(M(\zeta)\theta - \theta M(\varepsilon))_{*,1} = 0_3, \quad \lambda_{1,2} = (M(\zeta)\theta - \theta M(\varepsilon))_{*,2-3} \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}. \tag{32}$$

□

Всё определяется с помощью θ, но не всякая матрица подходит – нужна целочисленность $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{2,2}$. Как увидим дальше, третье условие является ограничением на морфизмы между расслоениями разных типов.

2.2.2. Следствие. *Необходимым условием целочисленности $\lambda_{2,2}$ является $\theta_{2,1} = \theta_{3,1} = 0$.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим условие (26), учитывая вид матрицы $N(\nu)$ (см. (7)), из условия, определяющего $\lambda_{2,2}$, получим $(N(\mu)\theta)_{*,1} = 0_2$, что равносильно $\theta_{2,1} = \theta_{3,1} = 0$. □

2.2.3. Предложение. *Пусть F и G – расслоения различных типов. Тогда F и G не изоморфны.*

Доказательство. Будем считать, что F имеет тип a, а G имеет тип b, предположим, что существует $\theta \in \mathrm{GL}_3(A)$, осуществляющее изоморфизм $F \to G$, θ удовлетворяет условиям целочисленности. Запишем

условие (28) и воспользуемся необходимыми условиями из доказанного следствия 2.2.2:

$$0_3=\left(\begin{bmatrix}0 & \zeta_{1,2} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & \zeta_{3,2} & 0\end{bmatrix}\theta-\theta\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{3,2} & 0\end{bmatrix}\right)_{*,1}=\begin{bmatrix}\zeta_{1,2}\theta_{2,1}-\theta_{1,2}\\ -\theta_{2,2}\\ \theta_{1,1}-\theta_{3,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\theta_{1,2}\\ -\theta_{2,2}\\ \theta_{1,1}-\theta_{3,2}\end{bmatrix},$$

откуда $\theta_{1,2}=\theta_{2,2}=0$ и $\theta_{1,1}=\theta_{3,2}$, а θ принимает вид

$$\theta=\begin{bmatrix}\theta_{1,1} & 0 & \theta_{1,3}\\ 0 & 0 & \theta_{2,3}\\ 0 & \theta_{1,1} & \theta_{3,3}\end{bmatrix}.$$

Воспользуемся теперь условием (27) предложения 2.2.1:

$$M_{3,2}(A)\ni\left(\begin{bmatrix}0 & \zeta_{1,2} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & \zeta_{3,2} & 0\end{bmatrix}\theta-\theta\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{3,2} & 0\end{bmatrix}\right)_{*,k}\begin{bmatrix}\nu & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\theta_{1,3}\,\varepsilon_{3,2} & \zeta_{1,2}\theta_{2,3}\\ -\theta_{2,3}\,\varepsilon_{3,2} & 0\\ 0 & \theta_{1,3}-\zeta_{3,2}\theta_{2,3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}.$$

Из невырожденности G и предложения 2.1.13 знаем, что в нашем случае $(\nu,\varepsilon_{3,2})=1$, откуда $\theta_{2,3}\equiv 0 \pmod{\nu}$, но это противоречит условию $\theta\in\mathrm{GL}_3(A)$. □

Следующими двумя предложениями завершим классификацию расслоений с общим слоем $\mathcal{O}+\mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками, описав изоморфизмы расслоений одинаковых типов. Следствие 2.1.6 в этом случае устанавливает равенство идеалов, порождаемых точками, в которых происходят подскоки.

2.2.4. Предложение (Изоморфизм расслоений типа a)**.** *Пусть* $F=F_a^{\nu,\varepsilon_{1,2},\varepsilon_{3,2}}$, $G=G_a^{\mu,\zeta_{1,2},\zeta_{3,2}}$ *– расслоения типа* a, *строки* $(\varepsilon_{1,2},\nu)$, $(\zeta_{1,2},\mu)$ *унимодулярны,* $\nu\neq 0$, $\mu\neq 0$. *Расслоения* F *и* G *изоморфны тогда и только тогда, когда имеется равенство идеалов* $(\mu)=(\nu)$, *и существует глобальная единица* $\eta\in A^*$, *для которой*

$$\zeta_{1,2}\equiv\eta\,\varepsilon_{1,2} \pmod{\nu}. \tag{33}$$

Доказательство. Как было отмечено выше, $(\mu)=(\nu)$ ввиду следствия 2.1.6. Запишем условие (28), учитывая следствие 2.2.2:

$$0_3 = \left(\begin{bmatrix} 0 & \zeta_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \zeta_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \theta - \theta \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \right)_{*,1} = \begin{bmatrix} -\theta_{1,3} \\ -\theta_{2,3} \\ \theta_{1,1} - \theta_{3,3} \end{bmatrix},$$

откуда $\theta_{1,3} = \theta_{2,3} = 0$ и $\theta_{1,1} = \theta_{3,3}$, а θ принимает вид

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{1,2} & 0 \\ 0 & \theta_{2,2} & 0 \\ 0 & \theta_{3,2} & \theta_{1,1} \end{bmatrix}.$$

Вычисления показывают, что выполнение условия (27) равносильно следующим двум условиям:

: существуют такие глобальные единицы $\theta_{1,1}$, $\theta_{2,2}$, что $\zeta_{1,2}\theta_{2,2} \equiv \theta_{1,1}\,\varepsilon_{1,2} \pmod{\nu}$;

: существует $\theta_{1,2}$, что $\theta_{1,2} + \zeta_{3,2}\theta_{2,2} \equiv \theta_{1,1}\,\varepsilon_{3,2} \pmod{\nu}$.

Поэтому необходимым условием изоморфизма является существование глобальной единицы $\eta \in A^*$, такой что выполнено соотношение

$$\zeta_{1,2} = \eta\,\varepsilon_{1,2} \pmod{\nu}. \tag{34}$$

Перейдем к проверке условия (26). Из вычислений имеем $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{2,2} = \theta_{1,1}$, $\lambda_{2,1}\nu - \theta_{3,2} = 0$, $\nu(\lambda_{1,1} - \theta_{2,2}) = 0$.

Для проверки достаточности найдем $\theta = (\theta_{i,j}) \in \mathrm{GL}_3(A)$. Пусть η удовлетворяет (33). Легко проверить, что θ, определенное следующим образом, индуцирует изоморфизм $F \to G$

$$\theta = \begin{bmatrix} \eta & \zeta + \eta\,\varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}. \tag{35}$$

□

2.2.5. Предложение (Изоморфизм расслоений типа b). *Пусть $F = F_b^{\nu,0,\varepsilon_{3,2}}$, $G = G_b^{\mu,0,\zeta_{3,2}}$ – расслоения типа b, строки $(\varepsilon_{3,2},\nu)$, $(\zeta_{3,2},\mu)$ унимодулярны, $\nu \neq 0$, $\mu \neq 0$. Расслоения F и G изоморфны тогда и только тогда, когда имеется равенство идеалов $(\mu) = (\nu)$, и существует глобальная единица $\eta \in A^*$, для которой*

$$\zeta_{3,2} \equiv \eta\,\varepsilon_{3,2} \pmod{\nu}. \tag{36}$$

Доказательство. Как было отмечено выше, $(\mu) = (\nu)$ ввиду следствия 2.1.6. Запишем условие (28), учитывая следствие 2.2.2:

$$0_3 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \theta - \theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \right)_{*,1} = \begin{bmatrix} -\theta_{1,2} \\ \theta_{1,1} - \theta_{2,2} \\ -\theta_{3,2} \end{bmatrix},$$

откуда $\theta_{1,2} = \theta_{3,2} = 0$ и $\theta_{1,1} = \theta_{2,2}$.

Вычисления показывают, что выполнение условия (27) равносильно существованию таких глобальных единиц $\theta_{1,1}$ и $\theta_{3,3}$, что $\zeta_{3,2}\theta_{1,1} \equiv \theta_{3,3}\,\varepsilon_{3,2} \pmod{\nu}$; $\theta_{1,2} \equiv \theta_{2,3} \equiv 0 \pmod{\nu}$.

Поэтому необходимым условием изоморфизма является существование глобальной единицы $\eta \in A^*$, такой что выполнено соотношение

$$\zeta_{3,2} = \eta\,\varepsilon_{3,2}\ (\nu). \tag{37}$$

Перейдем к проверке условия (26), из вычислений имеем $\lambda_{2,1} = 0$, $\lambda_{2,2} = \theta_{3,3}$, $\lambda_{2,1}\nu - \theta_{2,3} = 0$, $\lambda_{1,1} = \theta_{1,1}$.

Для проверки достаточности найдем $\theta = (\theta_{i,j}) \in \mathrm{GL}_3(A)$. Пусть η удовлетворяет (36). Тогда θ, определенное следующим образом, индуцирует изоморфизм $F \to G$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}. \tag{38}$$

□

2.3. Вычисление матриц склейки.

2.3.1. (Случай $E = E_a^{\alpha,\zeta,\beta}$, где $(\alpha,\beta) = 1$, $\beta \neq 0$.) Для вычисления образа стрелки ϕ из определения E и фактора по нему зафиксируем обозначения. Как и выше, стандартный $\mathcal{O}$-базис $\mathcal{O}^3$ обозначим e_1, e_2, e_3, а стандартный $\mathcal{O}$-базис $\mathcal{O}^5$ обозначим f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.

Чтобы найти матрицу склейки для E, зафиксируем представление

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{39}$$

Тривиализуем E на U_0. В этом случае ϕ можно записать в виде

$$\phi\big|_{U_0} = t_0 \begin{bmatrix} x & \alpha & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & \zeta & x \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

На U_0 в качестве базиса образа ϕ можно взять $\phi(t_0^{-2}e_1)$, $\phi(t_0^{-2}e_2)$ и $\phi(t_0^{-2}e_3)$, то есть столбцы $t_0^{-1}\phi|_{U_0}$. Для вычисления фактора необходимо дополнить $\phi|_{U_0}$ до обратимой. Подойдет

$$\widetilde{\phi\big|_{U_0}} = t_0 \begin{bmatrix} x & \alpha & 0 & \gamma & -\zeta \\ 0 & x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \zeta & x & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det \widetilde{\phi|_{U_0}} = t_0^5.$$

Итак, $\mathcal{O}_{U_0}$-модуль $\mathcal{O}(-1)^5\big|_{U_0}$ имеет базис

$$t_0^{-1}[g_1, \dots, g_5] = t_0^{-2}[f_1, \dots, f_5]\widetilde{\phi|_{U_0}}, \tag{41}$$

причем $t_0^{-1}[\bar{g}_4, \bar{g}_5]$ – базис фактора, то есть базис $E\big|_{U_0}$.

Тривиализуем E на U_1. В этом случае ϕ можно записать в виде

$$\phi\big|_{U_1} = t_1 \begin{bmatrix} 1 & \alpha y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & \zeta y & 1 \\ 0 & \beta y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}, \text{ где } y = t_0/t_1 = x^{-1}.$$

Для вычисления фактора нужно дополнить $\phi\big|_{U_1}$ до обратимой. Например, так:

$$\widetilde{\phi\big|_{U_1}} = t_1 \begin{bmatrix} 1 & \alpha y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & \zeta y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det \widetilde{\phi|_{U_1}} = t_1^4.$$

Итак, $\mathcal{O}_{U_1}$-модуль $\mathcal{O}(-1)^5\big|_{U_1}$ имеет базис

$$t_1^{-1}[h_1, \dots, h_5] = t_1^{-2}[f_1, \dots, f_5]\widetilde{\phi|_{U_1}}, \tag{42}$$

причем $t_1^{-1}[\bar{h}_4, \bar{h}_5]$ – базис фактора, то есть базис $E\big|_{U_1}$.

Напишем матрицу перехода на U_{01}. Для этого запишем $t_1^{-1}h_4$ и $t_1^{-1}h_5$ в терминах $t_0^{-1}g_1, \dots, t_0^{-1}g_5$. Сначала обратим матрицу для выражения $t_0^{-1}g_i$ через $t_0^{-2}f_j$ (см. (41)).

С учетом (41) и (42) получаем

$$t_1^{-1}[h_1, \dots, h_5] = x^{-2}t_0^{-1}[g_1, \dots, g_5]\widetilde{\phi\big|_{U_0}}^{-1}\widetilde{\phi\big|_{U_1}}.$$

Опуская вычисления, $\mod g_1, g_2, g_3$ получаем, что

$$t_1^{-1}\begin{bmatrix} h_3 & h_4 \end{bmatrix} = x^{-2}x\begin{bmatrix} \alpha & \beta x^2 \\ \gamma x & \delta x^3 \end{bmatrix} t_0^{-1}\begin{bmatrix} g_3 & g_4 \end{bmatrix}.$$

Итак, расслоение E может быть задано с помощью матрицы склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha y & \beta x \\ \gamma & \delta x^2 \end{bmatrix}, \quad \det\sigma = x. \tag{43}$$

Иными словами, можно считать, что выбраны базисы $[e_1, e_2]$ ограничения E на U_0 и $[f_1, f_2]$ ограничения E на U_1, причем

$$[e_1, e_2]\begin{bmatrix} \alpha x^{-1} & \beta x \\ \gamma & \delta x^2 \end{bmatrix} = [f_1, f_2]$$

или

$$[e_1, e_2] = [f_1, f_2]\begin{bmatrix} \delta x & -\beta \\ -\gamma x^{-1} & \alpha x^{-2} \end{bmatrix} \text{ на } U_{01}.$$

Мы уже знаем, что E имеет тривиальный общий слой и простые подскоки в делителях β (см. 2.1.5).

2.3.2. (Случай $E = E_b^{\beta,0,\alpha}$, где $(\alpha, \beta) = 1,\ \beta \neq 0$.) Аналогичные предыдущим рассуждения показывают, что расслоение E указанного вида может быть задано с помощью матрицы склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha y & \beta \\ \gamma x & \delta x^2 \end{bmatrix}, \quad \det\sigma = x. \tag{44}$$

2.4. Пример. Теоремы 2.1.17, 2.2.3, 2.2.4 и 2.2.5 полностью классифицируют 2-расслоения с тривиальным общим слоем и простыми подскоками в случае факториального дедекиндова кольца A.

Например, для $A = \mathbb{Z}$, имеется $p-1$ различных расслоений с $\nu = p$, где p – некоторое простое нечетное число, и 2 расслоения при $\nu = 2$, они задаются матрицами склейки

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} x^{-1} & 2x \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} \text{ (типа } a) \text{ и } \sigma_2 = \begin{bmatrix} x^{-1} & 2 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} \text{ (типа } b).$$

В случае $\nu = 3$ также имеется 2 неизоморфных расслоения, определяемых матрицами склейки

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} x^{-1} & 3x \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} \text{ (типа } a) \text{ и } \sigma_2 = \begin{bmatrix} x^{-1} & 3 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} \text{ (типа } b).$$

Литература

1. К. Оконек, М. Шнайдер, Х. Шпиндлер, *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах*, Москва, Мир, 1984.
2. A. Smirnov, *On filtrations of vector bundles over* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$. — Arithmetic and Geometry, Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lect. Note Series: **420** (2015), 436-457.
3. Ж.-П. Серр, *Когерентные алгебраические пучки. Расслоенные пространства и их приложения*, Москва, изд-во Иностранной литературы, 1958.
4. Ch. C. Hanna, *Subbundles of vector bundles on the projective line.* — J. Algebra **52**, No. 2 (1978), 322-327.
5. Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра*, Москва, Мир, 1976.
6. А. Л. Смирнов, С. С. Яковенко, *Построение линейной фильтрации для расслоений ранга* 2 *на* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$. — Препринты ПОМИ (2015).
7. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Москва, Мир, 1981.
8. D. Quillen, *Projective modules over polynomial rings.* — Invent. Math. **36** (1976), 167–171.
9. А. А. Суслин, *Проективные модули над кольцами многочленов свободны.* — Докл. АН СССР **229**, No. 5 (1976), 1063-1066.

Iakovenko S. S. Vector bundles on $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ with generic fiber $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ and simple jumps.

We study vector bundles on the projective line over a Dedekind domain A. In the case where A is a PID, we get a complete classification of rank 2 vector bundles with generic fiber $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ and with special fibers isomorphic either to $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ or $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(2)$.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия,
математико-механический факультет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева
E-mail: sergey.s.yakovenko@gmail.com

Поступило 7 сентября 2016 г.