Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 452, 2016 г.

А. Л. Смирнов

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НА $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ С ПРОСТЫМИ ПОДСКОКАМИ

Введение

Данная работа относится к программе по синтезу теории векторных расслоений на алгебраических многообразиях и геометрии чисел (см. [1]). Здесь мы будем изучать векторные расслоения над арифметической поверхностью $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$.

Теорема Гротендика утверждает, что каждое векторное расслоение на проективной прямой над полем изоморфно сумме линейных расслоений (см., например, [2]). Для проективной прямой над $\mathbb{Z}$ это не так. Однако из теоремы Ханны (см. [3]) вытекает, что всякое расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения. Особенно трудно находить такую фильтрацию для расслоений ранга 2. Именно такие расслоения и рассматриваются ниже. В этом случае задача сводится к построению точной последовательности вида:

$$0 \to \mathcal{O}(d) \to E \to \mathcal{O}(e) \to 0.$$

Для каждого конкретного E желательно уметь строить такую последовательность с максимально возможным d.

В данной работе мы ограничимся случаем расслоений, тривиальных в общем слое $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}}$ и с простыми подскоками. Это означает (см. 1.1), что для каждого простого p ограничение E на проективную прямую над $\mathbf{F}_p$ изоморфно $\mathcal{O}(-d_p)\oplus\mathcal{O}(d_p)$ с $d_p \leqslant 1$. Основной результат данной работы (теорема 1.1.2) утверждает, что в расматриваемом случае всегда можно взять $d \geqslant -2$. Это неравенство точное, так как в [1] построены примеры с $d = -2$.

§1. Предварительные сведения

Как обычно (см., например, [4]),
$\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Proj}\mathbb{Z}[t_0, t_1], \quad \deg t_0 = \deg t_1 = 1,$

Ключевые слова: векторное расслоение, арифметическая поверхность, проективная прямая, фильтрация, линейное расслоение, приведение, подскок.

Работа поддержана РФФИ (грант No. 16-01-00750).

U_i – дополнение к нулям t_i, $U_{01} = U_0 \cap U_1$,
$x = t_1/t_0$, $y = t_0/t_1$, $xy = 1$.

Тогда

$$\mathcal{O}(U_0) = \mathbb{Z}[x], \quad \mathcal{O}(U_1) = \mathbb{Z}[y], \quad \mathcal{O}(U_{01}) = \mathbb{Z}[x, y].$$

1.1. Расслоения с простыми подскоками. Пусть E – векторное расслоение ранга 2 на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$.

1.1.1. Определение. *Будем говорить, что E – расслоение с тривиальным общим слоем и простыми подскоками, если*

(1) *расслоение $E \otimes \mathbb{Q}$ на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}}$ изоморфно $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$;*
(2) *$E_P \simeq \mathcal{O}^2$ или $E_P \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ для всякой замкнутой точки $P \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, где E_P – ограничение E на прообраз P при проекции $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$;*
(3) *найдется хотя бы один подскок, то есть найдется хотя бы одна точка $P \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, для которой $E_P \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$.*

Только для целей данной работы будем использовать сокращенную терминологию. А именно, вместо термина “расслоение с тривиальным общим слоем и простыми подскоками” будем использовать термин “расслоение с простыми подскоками.”

Сформулируем основной результат данной статьи.

1.1.2. Теорема. *Пусть E – векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$, $\operatorname{rk} E = 2$. Если E – расслоение с простыми подскоками, то E можно включить в точную последовательность вида*

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \to E \to \mathcal{O}(2) \to 0. \tag{1}$$

Доказательство теоремы 1.1.2 состоит из нескольких шагов и распределено по всей статье. Заключительный этап доказательства приведен в 4.3.

1.2. План доказательства основной теоремы. Доказательство теоремы 1.1.2 опирается на классификацию векторных расслоений с простыми подскоками, полученную в [1] (см. также 1.3). Однако прямой подход, основанный на классификации, приведет нас (см. 3.4) к вопросу о разрешимости в целых числах уравнения 4-й степени от 6-и переменных. Надежных средств для ответа на такие вопросы мне не известно.

Поэтому ниже используется метод, который может быть назван методом обратной задачи. А именно, для каждого расслоения, которое включено в последовательность вида (1), мы находим его место в классификации. После этого остается заполнить все места в классификации с помощью расслоений, которые заведомо можно включить в последовательность вида (1). Возникающие при этом уравнения оказываются проще.

1.3. Классификация расслоений с простыми подскоками. Начнем с конструкции некоторого запаса расслоений с простыми подскоками. Пусть

$$V(m,\alpha) = \mathrm{Coker}[\mathcal{O}(-2)^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(-1)^4], \tag{2}$$

где стрелка задана матрицей

$$\phi = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ \alpha t_0 & t_1 \\ m t_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

а $m, \alpha \in \mathbb{Z}$. Следующий результат получен в [1].

1.3.1. Теорема. *Если $m \neq 0$ и $\mathrm{GCD}(m,\alpha) = 1$, то $V(m,\alpha)$ – расслоение. Если, кроме того, $m \neq \pm 1$, то $V(m,\alpha)$ – расслоение с простыми подскоками. Подскоки находятся в точности в делителях m. Если E – векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с простыми подскоками, то E изоморфно расслоению вида $V(m,\alpha)$.*

Нам потребуется сравнивать расслоения вида $V(m,\alpha)$ друг с другом. Следующий результат получен в [1].

1.3.2. Теорема. *Пусть $E_1 = V(m_1,\alpha_1)$, $E_2 = V(m_2,\alpha_2)$, где*

$$\mathrm{GCD}(m_1,\alpha_1) = 1, \quad \mathrm{GCD}(m_2,\alpha_2) = 1, \quad m_1 \neq 0, \quad m_2 \neq 0.$$

Расслоения E_1 и E_2 изоморфны тогда и только тогда, когда идеал (m_1) равен идеалу (m_2) и существует $z \in \mathbb{Z}$, так что

$$\alpha_2/\alpha_1 \equiv \pm z^2 \pmod{m_1}.$$

§2. Вычисления в $V(m,\alpha)$

Пусть $V(m,\alpha)$ – расслоение с простыми подскоками, то есть $m,\alpha \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0, \pm 1$, $\mathrm{GCD}(m,\alpha) = 1$. Для упрощения обозначений положим

$$V(m,\alpha) = F. \tag{4}$$

2.1. Матрица склейки для F. Для проведения вычислений удобно представить F с помощью матрицы склейки. Это означает, что нужно тривиализовать ограничения F на U_0 и U_1, то есть выбрать соответствующие базисы $[e_1, e_2]$ и $[f_1, f_2]$. После этого матрица склейки $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x,y])$ определена условием:

$$[e_1, e_2]\sigma = [f_1, f_2] \text{ или } [e_1, e_2] = [f_1, f_2]\sigma^{-1} \text{ на } U_{01}.$$

Пусть ϕ_x и ϕ_y – ограничения стрелки ϕ на U_0 и U_1, соответственно.

2.1.1. Теорема. *Пусть $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, где $\beta = m$.*

Сужение F на U_0 может быть тривиализовано базисом

$$e_1 = [0, \gamma, \delta, 0]^t t_0^{-1} \pmod{\mathrm{Im}\,\phi_x}, e_2 = [1, 0, 0, 0]^t t_0^{-1} \pmod{\mathrm{Im}\,\phi_x}.$$

Сужение F на U_0 может быть тривиализовано базисом

$$f_1 = [0, 0, 1, 0]^t t_1^{-1} \pmod{\mathrm{Im}\,\phi_y}, f_2 = [0, 0, 0, 1]^t t_1^{-1} \pmod{\mathrm{Im}\,\phi_y}.$$

При выборе этих тривиализаций F задано матрицей склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha x^{-1} & \beta \\ \gamma & \delta x \end{bmatrix}.$$

Эта теорема доказывается непосредственным вычислением.

2.2. Идентификация слоев F. Мы уже знаем, что F имеет тривиальный общий слой и простые подскоки в делителях m (см. 1.3.1). Однако, нам потребуются явные отождествления с $\mathcal{O}^2$ и $\mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$ в соответствующих случаях. Пусть $[g_1, g_2]$ – стандартный глобальный базис $\mathcal{O}^2$, $[e_1, e_2]$ и $[f_1, f_2]$ – U_0- и U_1-базисы F из 2.1.1.

2.2.1. Общий слой. Зададим изоморфизм $F \otimes \mathbb{Z}[1/m] \simeq \mathcal{O}^2$ формулами

$$[g_1, g_2]\begin{bmatrix} \delta x & -m \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [e_1, e_2], \quad [f_1, f_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha m^{-1} x^{-1} & m^{-1} \end{bmatrix} = [g_1, g_2].$$

2.2.2. Специальные слои. Зададим изоморфизм

$$F \otimes \mathbb{Z}/m \simeq \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$$

формулами

$$[t_0^{-1}g_1, t_0 g_2] \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ -\gamma x & \alpha \end{bmatrix} = [e_1, e_2], \quad [f_1, f_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [t_1^{-1}g_1, t_1 g_2],$$

где в качестве базисов $\mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$ на U_0 и U_1 выбраны $[t_0^{-1}g_1, t_0 g_2]$ и $[t_1^{-1}g_1, t_1 g_2]$.

§3. $\mathcal{O}(-2)$-фильтруемость F

Пусть F то же самое, что и в §2 (см. (4)). Мы собираемся изучить вопрос о $\mathcal{O}(-2)$-фильтруемости F, то есть вопрос о возможности включить F в точную последовательность вида

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \to F \to \mathcal{O}(2) \to 0.$$

Такая фильтруемость F равносильна существованию такого глобального сечения расслоения

$$E = F(2),$$

которое нигде не обращается в ноль. Попробуем вычислить пространство таких сечений.

В качестве базиса E на U_0 возьмем $t_0^2[e_1, e_2]$, где $[e_1, e_2]$ – базис F на U_0, а в качестве базиса E на U_1 возьмем $t_1^2[f_1, f_2]$, где $[f_1, f_2]$ – базис F на U_1. Тогда

$$t_0^2[e_1, e_2] \begin{bmatrix} \alpha x & m x^2 \\ \gamma x^2 & \delta x^3 \end{bmatrix} = t_1^2[f_1, f_2] \text{ или}$$

$$t_0^2[e_1, e_2] = t_1^2[f_1, f_2] \begin{bmatrix} \delta x^{-1} & -m x^{-2} \\ -\gamma x^{-2} & \alpha x^{-3} \end{bmatrix} \text{ на } U_{01}.$$

3.1. Вычисление $H^0(\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}, E)$. Ниже вместо $H^0(\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}, E)$ и т. п. используем обозначение $H^0(E)$ и т. п.

Общее U_0-сечение $s = (s_1 e_1 + s_2 e_2)t_0^2$, где $s_i \in \mathbb{Z}[x]$, в U_1-базисе выглядит так: $s = (\delta x^{-1} s_1 - m x^{-2} s_2) t_1^2 f_1 + (-\gamma x^{-2} s_1 + \alpha x^{-3} s_2) t_1^2 f_2$. Поэтому условия глобальности s таковы:

$$\begin{cases} c_1: & \delta x^{-1} s_1 - m x^{-2} s_2 \in \mathbb{Z}[x^{-1}]; \\ c_2: & -\gamma x^{-2} s_1 + \alpha x^{-3} s_2 \in \mathbb{Z}[x^{-1}]. \end{cases}$$

Отсюда легко видеть, что $x^{-2}s_1, x^{-3}s_2 \in \mathbb{Z}[x^{-1}]$: достаточно рассмотреть линейную комбинацию $\gamma x^{-1}c_1 + \delta c_2$, где c_1 и c_2 – условия глобальности s. Поэтому $s_1 = u_0+u_1x+u_2x^2$, $s_2 = v_0+v_1x+v_2x^2+v_3x^3$. На u_i и v_j получили уравнение: $\delta u_2 = mv_3$. Поскольку m и δ взаимно просты, то общее глобальное сечение E имеет вид

$$s = (u_0 + u_1x + mwx^2)t_0^2e_1 + (v_0 + v_1x + v_2x^2 + \delta wx^3)t_0^2e_2, \qquad (5)$$

где $u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w \in \mathbb{Z}$.

3.2. Невырожденность сечения над $\mathbb{Z}[1/m]$. Поймем, когда сечение s вида (5) не имеет нулей на $\mathbf{P}^1 \otimes \mathbb{Z}[1/m]$. Для этого идентифицируем s как сечение $\mathcal{O}^2(2)$, пользуясь изоморфизмом из 2.2.1. В качестве базиса $\mathcal{O}^2(2)$ на U_0 возьмем $t_0^2[g_1, g_2]$, где $[g_1, g_2]$ – стандартный глобальный базис $\mathcal{O}^2$. Изоморфизм $E \otimes \mathbb{Z}[1/m] \simeq \mathcal{O}^2(2)$ (см. 2.2.1) на U_0 устроен так:

$$t_0^2[g_1, g_2]\begin{bmatrix} \delta x & -m \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = t_0^2[e_1, e_2].$$

Общее сечение $\mathcal{O}^2(2)$ имеет вид:

$$(a_{20}t_0^2 + a_{11}t_0t_1 + a_{02}t_1^2)g_1 + (b_{20}t_0^2 + b_{11}t_0t_1 + b_{02}t_1^2)g_2.$$

Выразим общее сечение E в этих терминах:

$$\begin{aligned} s &= (u_0 + u_1x + mwx^2)t_0^2e_1 + (v_0 + v_1x + v_2x^2 + \delta wx^3)t_0^2e_2 \\ &= (u_0 + u_1x + mwx^2)(\delta xt_0^2g_1 + t_0^2g_2) + (v_0 + v_1x + v_2x^2 + \delta wx^3)(-mt_0^2g_1) \\ &= (-mv_0 + [\delta u_0 - mv_1]x + [\delta u_1 - mv_2]x^2)t_0^2g_1 + (u_0 + u_1x + mwx^2)t_0^2g_2. \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$a_{20} = -mv_0, \quad a_{11} = \delta u_0 - mv_1, \quad a_{02} = \delta u_1 - mv_2,$$

$$b_{20} = u_0, \quad b_{11} = u_1, \quad b_{02} = mw.$$

Итак, по сечению $s \in H^0(E)$ построили сечение $\mathcal{O}^2(2)$ над $\mathbb{Z}[m^{-1}]$, то есть пару полиномов 2-й степени. Наличие у них общих нулей детектируется результантом

$$R_{22}(a_{20},a_{11},a_{02};b_{20},b_{11},b_{02}) = \det\begin{bmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{02} & 0 \\ 0 & a_{20} & a_{11} & a_{02} \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} & 0 \\ 0 & b_{20} & b_{11} & b_{02} \end{bmatrix}$$
$$= a_{20}^2 b_{02}^2 + a_{02}^2 b_{20}^2 + a_{11}^2 b_{20} b_{02} + a_{20} a_{02} b_{11}^2$$
$$- 2a_{20}a_{02}b_{20}b_{02} - a_{20}a_{11}b_{11}b_{02} - a_{11}a_{02}b_{20}b_{11}.$$

В нашем случае речь идет о форме четвертой степени

$$q(u_0,u_1,v_0,v_1,v_2,w)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & \delta u_0 & \delta u_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta u_0 & \delta u_1 \\ u_0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & u_1 & 0 \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} -v_0 & -v_1 & -v_2 & 0 \\ 0 & -v_0 & -v_1 & -v_2 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{bmatrix}\right). \qquad (6)$$

Вычисление q выглядит довольно трудоемкой задачей. Один способ – подставить выражения для a_{ij} и b_{ij} через координаты общего целочисленного сечения в результант $R_{22}(a_{20},a_{11},a_{02};b_{20},b_{11},b_{02})$. Другой способ состоит в в вычислении m-разложения

$$q = q_0 + q_1 m + q_2 m^2 + q_3 m^3 + q_4 m^4, \qquad (7)$$

где $q_0 = 0$, $q_4 = v_0^2 w^2$, а

$$q_1 = \delta^2 u_0^3 w - \delta v_0 u_1^3 + \delta v_1 u_0 u_1^2 - \delta v_2 u_0^2 u_1. \qquad (8)$$

Наборы $(u_0,u_1,v_0,v_1,v_2,w) \in \mathbb{Z}^6$, удовлетворяющие условию

$$q(u_0,u_1,v_0,v_1,v_2,w) \in \mathbb{Z}[m^{-1}]^*, \qquad (9)$$

соответствуют сечениям $s \in H^0(\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}, E)$, не имеющим нулей вне делителей m. В (9) символ $*$ обозначает переход к обратимым элементам кольца.

3.3. Невырожденность сечения над делителями m. Поймем, когда сечение s вида (5) не имеет нулей на $\mathbf{P}^1 \otimes \mathbb{Z}/\pi$, где π – простой делитель m. Для этого идентифицируем s как сечение $\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(3)$, пользуясь изоморфизмом из 2.2.2. В качестве базиса $\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(3)$ на U_0 возьмем $[t_0 g_1, t_0^3 g_2]$, где $[g_1, g_2]$ – стандартный глобальный базис $\mathcal{O}^2$. Изоморфизм $E \otimes \mathbb{Z}/\pi \simeq \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(3)$ (см. 2.2.2) на U_0 устроен так:

$$[t_0 g_1, t_0^3 g_2]\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ -\gamma x & \alpha \end{bmatrix} = t_0^2 [e_1, e_2].$$

Общее сечение $\mathcal{O}(1)+\mathcal{O}(3)$ имеет вид:

$$(a_{10}t_0+a_{01}t_1)g_1+(b_{30}t_0^3+b_{21}t_0^2t_1+\cdots+b_{03}t_1^3)g_2.$$

Выразим общее сечение E (см. (5)) в этих терминах:

$$\begin{aligned} s \pmod{\pi} &= (u_0+u_1x+mwx^2)t_0^2e_1+(v_0+v_1x+v_2x^2+\delta wx^3)t_0^2e_2\\ &=(u_0+u_1x+mwx^2)(\delta t_0g_1-\gamma xt_0^3g_2)+(v_0+v_1x+v_2x^2+\delta wx^3)(\alpha t_0^3g_2)\\ &=(\delta u_0+\delta u_1x+m\delta wx^2)t_0g_1+(\alpha v_0+[\alpha v_1-\gamma u_0]x+[\alpha v_2-\gamma u_1]x^2+wx^3)t_0^3g_2.\end{aligned}$$

Иначе говоря (приведем все по модулю π),

$$a_{10}=\delta u_0,\ a_{01}=\delta u_1,\ b_{30}=\alpha v_0,\ b_{21}=\alpha v_1-\gamma u_0,\ b_{12}=\alpha v_2-\gamma u_1,\ b_{03}=w.$$

Итак, по $s\in H^0(E)$ построили сечение $\mathcal{O}(1)+\mathcal{O}(3)$ над $\mathbb{Z}/\pi$, то есть пару полиномов: 1-й и 3-й степени. Наличие у них общих нулей детектируется результантом

$$R_{13}(a_{10},a_{01};b_{30},b_{21},b_{12},b_{03})=-b_{30}a_{01}^3+b_{21}a_{10}a_{01}^2-b_{12}a_{10}^2a_{01}+b_{03}a_{10}^3.$$

Подставляем выражения для a_{ij} и b_{ij} через координаты общего сечения и получаем

$$\begin{aligned}-\alpha v_0(\delta u_1)^3+[\alpha v_1-\gamma u_0](\delta u_0)(\delta u_1)^2-[\alpha v_2-\gamma u_1](\delta u_0)^2(\delta u_1)+w(\delta u_0)^3\\ =\delta^3[wu_0^3-\alpha u_0^2u_1v_2+\alpha u_0u_1^2v_1-\alpha u_1^3v_0].\end{aligned}$$

Получаем условие

$$wu_0^3-\alpha u_0^2u_1v_2+\alpha u_0u_1^2v_1-\alpha u_1^3v_0\neq 0 \pmod{\pi}. \qquad (10)$$

Наборы $(u_0,u_1,v_0,v_1,v_2,w)\in\mathbb{Z}^6$, удовлетворяющие этому условию, соответствуют сечениям $s\in H^0(\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}},E)$, не имеющим нулей над $\mathbb{Z}/\pi$, где π – делитель m.

3.3.1. Замечание. Ниже в 3.4 нам потребуется некоторое наблюдение. А именно, сравним условие (10) с $q_1=\delta^2u_0^3w-\delta v_0u_1^3+\delta v_1u_0u_1^2-\delta v_2u_0^2u_1$ из m-разложения (см. (8)). Видим, что α^2q_1 сравнимо с левой частью (10) по модулю π (надо учесть, что $\alpha\delta=1 \pmod{m}$).

3.4. Вывод. Фильтруемость F вида $0\to\mathcal{O}(-2)\to F\to\mathcal{O}(2)\to 0$ равносильна существованию набора $(u_0,u_1,v_0,v_1,v_2,w)\in\mathbb{Z}^6$, удовлетворяющего условиям:

$$\begin{cases} q(u_0,u_1,v_0,v_1,v_2,w)\in\mathbb{Z}[m^{-1}]^*,\\ wu_0^3-\alpha u_0^2u_1v_2+\alpha u_0u_1^2v_1-\alpha u_1^3v_0 \pmod{m}\in(\mathbb{Z}/m)^*.\end{cases} \qquad (11)$$

Отметим, что никаких локальных препятствий для разрешимости (11) нет. Чтобы увидеть это, достаточно заметить, что все вышеприведенные вычисления работают не только над базовым кольцом $\mathbb{Z}$, но и над $\mathbb{Z}_{(p)}$. А в этом случае для расслоений с простыми подскоками имеется не только $\mathcal{O}(-2)$-, но и $\mathcal{O}(-1)$-фильтруемость.

Хотя локальных препятствий для разрешимости (11) нет, но, используя некоторую глобальную информацию, а именно знание единиц $\mathbb{Z}[m^{-1}]$, можно слегка модифицировать систему (11), после чего локальные препятствия могут появится.

А именно, пусть $\pi_1, \dots, \pi_r$ – все простые делители m. Разрешимость (11) очевидно равносильна существованию неотрицательных целых $n_1, \dots, n_r$ и $\theta \in \mathbb{Z}^*$, для которых разрешима система

$$\begin{cases} q_1 m + q_2 m^2 + q_3 m^3 + q_4 m^4 = \theta \pi_1^{n_1} \cdots \pi_r^{n_r}. \\ w u_0^3 - \alpha u_0^2 u_1 v_2 + \alpha u_0 u_1^2 v_1 - \alpha u_1^3 v_0 \pmod m \in (\mathbb{Z}/m)^*. \end{cases} \tag{12}$$

В этой системе q_1, q_2, q_3, q_4 – формы 4-й степени с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ от переменных $u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w$ (см. 3.3).

Более того, из совпадения (см. замечание 3.3.1) q_1 с формой второго условия (12) очевидно, что $n_i = \operatorname{ord}_{\pi_i}(m)$ для всякого π_i, делящего m. Поэтому из второго условия следует, что система (12) равносильна существованию глобальной единицы $\theta \in \mathbb{Z}^*$, для которой разрешимо уравнение $(q/m)(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) = \theta$.

Итак: пусть расслоение F задано матрицей склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha x^{-1} & \gamma \\ \gamma & \delta x \end{bmatrix}, \text{ где } \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2 A, \gamma = m.$$

Тогда $\mathcal{O}(-2)$-фильтруемость F равносильна разрешимости в $\mathbb{Z}$ одного из уравнений:

$$(q/m)(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) = 1, \quad (q/m)(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) = -1. \tag{13}$$

§4. Метод обратной задачи

Так как известна (см. 1.1) полная классификация интересующих нас расслоений (тривиальных в общем слое и с простыми подскоками), то мы можем пойти в обратную сторону. А именно, рассмотрим расслоение W, включенное в точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{\iota} W \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}(2) \to 0, \tag{14}$$

и выясним, когда общий слой тривиален, а все подскоки простые. После этого придется вычислить классификацию для таких W и посмотреть, все ли расслоения получаются таким образом.

Предположим, что W задано матрицей склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} y^2 & ay + b + cx \\ 0 & x^2 \end{bmatrix}, \text{ где } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

При этом подразумеваемые базисы W на U_0 и U_1 обозначаются $[e_1, e_2]$ и $[f_1, f_2]$.

4.1. Слои W. Для понимания слоев достаточно считать, что мы работаем над полем и, в этой ситуации, вычислить $H^0(W(-1))$. Для этого можно, например, вычислить граничный гомоморфизм

$$\partial : \; H^0(\mathcal{O}(1)) \to H^1(\mathcal{O}(-3)) = H^0(\mathcal{O}(1))^\vee$$

в точной последовательности когомологий последовательности (14), подкрученной на $\mathcal{O}(-1)$, или вычислить $H^0(W(-1))$ с помощью матрицы склейки.

4.1.1. Предложение. *Имеются изоморфизмы*

$$W \simeq \begin{cases} \mathcal{O} + \mathcal{O}, & \textit{если } b^2 - ac \neq 0; \\ \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1), & \textit{если } b^2 - ac = 0, (a,b,c) \neq (0,0,0); \\ \mathcal{O}(-2) + \mathcal{O}(2), & \textit{если } (a,b,c) = (0,0,0). \end{cases}$$

Поэтому W имеет (тривиальный общий слой и) простые подскоки тогда и только тогда, когда

$$b^2 \neq ac \;\; \textit{и} \;\; \mathrm{GCD}(a,b,c) = 1. \tag{15}$$

Доказательство. Предложение тотчас вытекает из следующего факта, который проверяется прямым вычислением. Для произвольного поля имеется соотношение

$$h^0(W(-1)) = 2 - \mathrm{rk}_k \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Здесь $h^0(W(-1)) = \mathrm{rk}_k \, H^0(\mathbf{P}^1_k, W(-1) \otimes k)$. □

Далее предполагаем, что условие (15) выполнено.

4.2. Место W в классификации. Мы собираемся вычислить место W в классификации из 1.3.1. Эта классификация получена в [1] с помощью спектральной последовательности Бейлинсона [2]. Поэтому нужно вычислить эту последовательность для W. В рассматриваемом нами случае относительной размерности один спектральная последовательность вырождается в точную последовательность. Только ее мы и опишем.

Рассмотрим стандартную резольвенту для $\mathcal{O}_\Delta$ на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$, а именно:

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \boxtimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{i} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_\Delta \to 0, \quad i = t_1 \boxtimes t_0 - t_0 \boxtimes t_1. \tag{16}$$

где $M \boxtimes N = p^*M \otimes q^*M$, а $p, q : \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \to \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ – структурные проекции. Эта последовательность с помощью подкрутки на $W(1) \boxtimes \mathcal{O}(-1)$ индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \to W \boxtimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{j^W} W(1) \boxtimes \mathcal{O}(-1) \to p^*W \otimes \mathcal{O}_\Delta \to 0, \tag{17}$$

где $j^W = j_0^W \boxtimes t_0 + j_1 \boxtimes t_1$, $j_0^W = \mathrm{id}_W \otimes t_1$, $j_1^W = -\,\mathrm{id}_W \otimes t_0$.

Рассмотрим длинную точную последовательность высших прямых образов $R^i q_*$, связанную с (17):

$$0 \to H^0(W) \otimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{\phi} H^0(W(1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \to W \to 0. \tag{18}$$

Для явного описания ϕ надо вычислить $H^0(W)$, $H^0(W(1))$ и выбрать базисы этих групп. Пусть

$$L = \mathcal{O}(2).$$

4.2.1. Лемма. *Группа $H^0(W)$ имеет следующее описание. Стрелка π (см. (14)) индуцирует вложение $H^0\pi : H^0(W) \hookrightarrow H^0(L)$. Кроме того,*

$$\operatorname{Im} H^0\pi = \{u_0 t_0^2 + u_1 t_0 t_1 + u_2 t_1^2 | u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{Z}, a u_2 + b u_1 + c u_0 = 0\}.$$

4.2.2. Лемма. *Группа $H^0(W(1))$ имеет следующее описание. Стрелка $\pi(1)$ (см. (14)) индуцирует изоморфизм*

$$H^0(W(1)) \to H^0(L(1)) = \{v_0 t_0^3 + v_1 t_0^2 t_1 + v_2 t_0 t_1^2 + v_3 t_1^3 | v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}\}.$$

Лемма 4.2.1 и лемма 4.2.2 проверяются прямым вычислением с использованием матрицы склейки.

4.2.3. Выбор базисов в когомологиях. В $H^0(W)$ все определено набором $(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^3$, но не произвольным – см. (4.2.1). Для целей данной работы мы не будем рассматривать общую ситуацию, а ограничимся случаем, когда

$$(a,b)=1.$$

Выберем и зафиксируем разложение

$$ua+vb=1. \tag{19}$$

В качестве базиса $H^0(W)$ возьмем вектора, переходящие в

$$t_0^2-vct_0t_1-uct_1^2 \text{ и } bt_1^2-at_0t_1 \tag{20}$$

при вложении $H^0(W)\hookrightarrow H^0(\mathcal{O}(3))$ (см. 4.2.1).

В $H^0(W(1))$ выберем базис, индуцированный стандартным базисом

$$t_0^3, t_0^2t_1, t_0t_1^2, t_1^3 \in H^0(\mathcal{O}(3)), \tag{21}$$

при изоморфизме $H^0(W(1))\to H^0(\mathcal{O}(3))$ (см. 4.2.2).

4.2.4. Лемма. *В базисах* $H^0(W)$ *и* $H^0(W(1))$ *из* (20) *и* (21) *операция* ϕ *из точной последовательности* (18) *задана формулой*

$$\phi=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ -vc & -a\\ -uc & b\end{bmatrix}t_0+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ vc & a\\ uc & -b\\ 0 & 0\end{bmatrix}t_1. \tag{22}$$

Доказательство. Резольвента (16) с помощью подкрутки на $L(1)\boxtimes\mathcal{O}(-1)$ индуцирует точную последовательность

$$0\to L\boxtimes\mathcal{O}(-2)\xrightarrow{j^L}L(1)\boxtimes\mathcal{O}(-1)\to p^*L\otimes\mathcal{O}_\Delta\to 0. \tag{23}$$

Стрелка $\pi(1)$ (см. (14)) индуцирует стрелку между последовательностями (17) и (23). В частности, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^0(W)\otimes\mathcal{O}(-2) \arrow[r, "\phi=H^0(j^W)"] \arrow[d, "H^0(\pi)\otimes\mathcal{O}(-2)"'] & H^0(W(1))\otimes\mathcal{O}(-1) \arrow[d, "H^0(\pi(1))\otimes\mathcal{O}(-1)"] \\ H^0(L)\otimes\mathcal{O}(-2) \arrow[r, "\phi^L=H^0(j^L)"] & H^0(L(1))\otimes\mathcal{O}(-1) \end{tikzcd}\quad . \tag{24}$$

В стандартных базисах $H^0(L)$ и $H^0(L(1))$, то есть в базисах t_0^2, t_0t_1, t_1^2 и $t_0^3, t_0^2t_1, t_0t_1^2, t_1^3$, операция ϕ^L задана матрицей

$$\phi^L=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}t_0-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}t_1. \tag{25}$$

Отсюда легко вытекает лемма, если учесть выбор базисов в $H^0(W)$ и $H^0(W(1))$ (см. 4.2.3). Для доказательства ввиду коммутативности (24) и инъективности ее левой стрелки достаточно проверить, что

$$\psi = \psi^L \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -vc & -a \\ -uc & b \end{bmatrix},$$

где матрица ψ задана правой частью формулы (22), матрица ψ^L задана правой частью формулы (25), а (2×3)-матрица выражает базис $H^0(W)$ через базис $H^0(\mathcal{O}(2))$ (см. (20)). Это равенство проверяется прямым вычислением. $\square$

4.2.5. Предложение. *$W \simeq V(b^2 - ac, u + v^2c + abu^2v + acuv^2)$, где расслоение из правой части указано в* (2).

Доказательство. По существу доказательство представляет собой проход по доказательству теоремы 1.3.1 в [1]. Приведем лишь результат этого процесса. А именно, предложение вытекает из равенства

$$\begin{aligned} &D\Big(C\Big(B(A\phi))\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ bu^2 + cuv & 1 \end{bmatrix}\Big)\Big) \\ &\qquad = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u + v^2c + abu^2v + acuv^2 & 0 \\ b^2 - ac & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t_0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t_1, \end{aligned} \tag{26}$$

где ϕ – матрица из (22), а A, B, C и D, соответственно, следующие матрицы:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & -v & 0 \\ c & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a^2 \\ 0 & 0 & -u^2 & bv^2 + 2auv \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -bu^2 - cuv & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -av \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Равенство (26) позволяет сделать подходящие замены базисов в $H^0(W)$ и $H^0(W(1))$. $\square$

4.3. Доказательство основной теоремы. Здесь приведено доказательство теоремы 1.1.2. Пусть E – расслоение из условия теоремы 1.1.2, то есть расслоение с простыми подскоками. Будем считать, что $E \simeq F$, где, как и в (4),

$$F = V(m, \alpha), \qquad \mathrm{GCD}(m, \alpha) = 1.$$

По теореме 1.3.1 такое предположение не ограничивает общности. Более того, не ограничивая общности, будем считать, что

$$m > 1.$$

Действительно, если $|m| \leqslant 1$, то у F нет подскоков (см. 1.3.1). Кроме того, из теоремы 1.3.2 вытекает, что мы можем заменить m на $(-m)$ не меняя расслоения.

4.3.1. Редукция. Из предложения 4.2.5 и теоремы 1.3.2 сразу же вытекает, что для включения F в точную последовательность вида $0 \to \mathcal{O}(-2) \to F \to \mathcal{O}(2) \to 0$ достаточно найти такие $a, b, c, u, v \in \mathbb{Z}$, что

$$b^2 - ac = \pm m; \tag{27}$$

$$ua + vb = 1; \tag{28}$$

$$u + v^2 c + abvu^2 + acv^2 u = \pm *^2 \cdot \alpha \mod m, \tag{29}$$

где $*$ – произвольный элемент $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

4.3.2. Завершение доказательства. Завершим доказательство основной теоремы, показав разрешимость уравнений из 4.3.1. Пусть

$$m = 2^t p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n} = 2^t m_0 \quad (p_i \text{ нечетны}).$$

Начнем с выбора знака при α в (29), а точнее, с выбора $\alpha^* = \pm\alpha$. Положим

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha, & \text{если } t = 0; \\ -\alpha, & \text{если } t > 0 \text{ и } \alpha \pmod{2^t} \text{ – квадрат;} \\ \alpha, & \text{если } t > 0 \text{ и } \alpha \pmod{2^t} \text{ – неквадрат.} \end{cases} \tag{30}$$

Теперь выберем такое $a \in \mathbb{N}$, что

$$a \text{ – простое число,} \tag{31}$$

$$a = -1 \pmod 8, \tag{32}$$

и

$$\left(\frac{a}{p_i}\right) = \left(\frac{\alpha^*}{p_i}\right) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{33}$$

Такой выбор осуществим ввиду теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

Из (30) и (32) вытекает, что

$$\alpha^* = a \cdot *^2 \pmod{2^t}. \tag{34}$$

Действительно, при $t = 0$ и $t = 1$ проверять нечего, так как

$$(\mathbb{Z}/2^t\mathbb{Z})^* = 1.$$

При $t \geqslant 2$ надо проверить, что $\alpha^* = -1 \pmod{2^t}$. Это сразу видно из (30).

Из (32) и нечетности p_i вытекает , что

$$\left(\frac{p_i}{a}\right) = \zeta_i \left(\frac{a}{p_i}\right) = \zeta_i\xi_i, \text{ где } \zeta_i = \left(\frac{-1}{p_i}\right), \quad \xi_i = \left(\frac{\alpha^*}{p_i}\right),$$

Поэтому (еще раз пользуемся (32)):

$$\left(\frac{\zeta_i\xi_i p_i}{a}\right) = 1. \tag{35}$$

Отметим, что кроме теоремы Дирихле использовали и закон взаимности Гаусса.

Положим

$$\zeta = \zeta_1^{s_1} \cdots \zeta_n^{s_n}, \quad \xi = \xi_1^{s_1} \cdots \xi_n^{s_n}. \tag{36}$$

Из (35) и (36) вытекает, что

$$\left(\frac{\zeta\xi m_0}{a}\right) = 1. \tag{37}$$

Из (32) вытекает, что

$$\left(\frac{2}{a}\right) = 1. \tag{38}$$

Из (37) и (38) вытекает, что

$$\left(\frac{\zeta\xi m}{a}\right) = 1. \tag{39}$$

Выберем произвольное $b \in \mathbb{Z}$, для которого

$$\zeta\xi m = b^2 \pmod{a}. \tag{40}$$

Возможность такого выбора обеспечена условием (39). Выберем $v \in \mathbb{Z}$ так, что

$$v = 1/b \pmod{a} \text{ и } v = 0 \pmod{m}. \tag{41}$$

Положим
$$u = \frac{1-bv}{a}, \quad c = \frac{b^2-\zeta\xi m}{a}.$$
Из (40) и (41) вытекает, что $u, c \in \mathbb{Z}$.

При произведенном выборе a, b, c, u и v по построению выполнены условия (27) и (28). Покажем, что (29) тоже выполнено. Действительно, из (33) вытекает, что $\alpha^* = a \cdot *^2 \pmod{m_0}$. Отсюда, с учетом (34), получаем, что
$$\alpha^* = a \cdot *^2 \pmod{m}. \tag{42}$$

Так как $v = 0 \pmod{m}$ (см. ((41))), то
$$u + v^2c + abvu^2 + acv^2u = 1/a \pmod{m}.$$
А это, в виду (42), как раз и дает (29).

Таким образом, теорема 1.1.2 доказана.

Литература

1. A. L. Smirnov. *On filtrations of vector bundles over* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$. — Arithmetic and Geometry, Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lect. Note Series, **420** (2015), 436–457.
2. К. Оконек, М. Шнайдер, Х. Шпиндлер, *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах*, Москва, Мир, 1984.
3. Ch. C. Hanna, *Subbundles of vector bundles on the projective line.* — J. Algebra **52**, No. 2 (1978), 322-327.
4. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Москва, Мир, 1981.

Smirnov A. L. Vector bundles on $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ with simple jumps.

We consider vector bundles with rank 2 over the projective line over $\mathbb{Z}$. Assume that such a bundle E is trivial on the generic fiber, and its restriction to any special fiber is isomorphic either to $\mathcal{O}^2$ or to $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$. Under these assumptions we prove that there exists an exact sequence of the form $0 \to \mathcal{O}(-2) \to E \to \mathcal{O}(2) \to 0$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 7 сентября 2016 г.