Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 452, 2016 г.

В. В. Нестеров

О НОРМАЛИЗАТОРЕ КОРНЕВОЙ УНИПОТЕНТНОЙ ПОДГРУППЫ В ГРУППЕ ШЕВАЛЛЕ

Данная заметка посвящена описанию нормализатора корневой унипотентной подгруппы в группе Шевалле над произвольным полем.

Идея написания этой статьи возникла при чтении работы А. В. Степанова [5]. В ней автор ссылается на утверждение о том, что нормализатор корневой унипотентной подгруппы в группе Шевалле содержится в параболической подгруппе (лемма 4.1), как на утверждение "хорошо известное специалистам". Вне всякого сомнения, так оно и есть. Однако, найти точное утверждение и доказательство подобного рода факта внутри одной из многочисленных работ, посвященных группам Шевалле, нам не удалось.

Поэтому в данной работе для случая короткой корневой подгруппы, как для несколько более сложного случая, мы воспроизводим все детали доказательства, рассматривая в том числе и исключительные характеристики. Из наших рассуждений также очевидным образом следует аналогичное описание и для длинной корневой подгруппы.

С другой стороны, автор настоящей работы при описании орбит группы Шевалле, действующей одновременным сопряжением на парах коротких корневых унипотентных подгрупп, в [3] и [4], по сути вычислил нормализатор короткой корневой подгруппы. Однако, во-первых, этот результат не был явно сформулирован, и, во-вторых, описание нормализатора было проведено в терминах разложения Брюа, что далеко не всегда удобно и не даёт понимания структуры этой подгруппы.

Прежде всего, введем основные обозначения и кратко напомним некоторые понятия теории групп Шевалле. Все детали и ссылки могут быть найдены в книге [7] и в обзоре [2].

Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней, $G = G(\Phi, K)$ – группа Шевалле типа B_ℓ, C_ℓ, F_4 или G_2 над полем K.

Зафиксируем порядок на системе корней Φ. Через Φ^+ и Φ^- обозначим множество соответствующих положительных и отрицательных

Ключевые слова: группы Шевалле, корневые подгруппы, разложение Брюа.

корней относительно выбранного порядка, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ – множество простых корней. Пусть δ обозначает максимальный (длинный) корень и ρ – максимальный короткий корень. Положим $X_\alpha = \{x_\alpha(t) \mid t \in K\}$ – элементарная корневая унипотентная подгруппа, соответствующая корню α. Подгруппа X называется короткой корневой унипотентной, если она сопряжена с X_ρ, и длинной корневой унипотентной, если она сопряжена с X_δ.

Обозначим корни строго большие, чем ρ через $\rho_1, \dots, \rho_m$, где $m = \ell - 1$, 1, 3, 2 для $\Phi = \mathrm{B}_\ell$, C_ℓ, F_4, G_2 соответственно. Заметим, что все корни ρ_i – длинные.

В стандартной реализации (следуя Бурбаки [1]) мы имеем:

$$\mathrm{B}_\ell:\ \alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_{\ell-1} = e_{\ell-1} - e_\ell, \alpha_\ell = e_\ell,\ \rho = e_1,$$

$$\mathrm{C}_\ell:\ \alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_{\ell-1} = e_{\ell-1} - e_\ell, \alpha_\ell = 2e_\ell,\ \rho = e_1 + e_2,$$

$$\mathrm{F}_4:\ \alpha_1 = e_2 - e_3, \alpha_2 = e_3 - e_4, \alpha_3 = e_4, \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4),\ \rho = e_1,$$

$$\mathrm{G}_2:\ \alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3, \quad \rho = -e_2 + e_3.$$

И, далее, $\rho_i = e_1 + e_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, для $\Phi = \mathrm{B}_\ell$ и F_4, $\rho_1 = 2e_1$ для $\Phi = \mathrm{C}_\ell$ и $\rho_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $\rho_2 = -e_1 - e_2 + 2e_3$ для $\Phi = \mathrm{G}_2$.

Пусть $T = T(\Phi, K)$ – расщепимый максимальный тор в G, $B = B(\Phi, K)$ – стандартная борелевская подгруппа, содержащая T. Далее, $U = U(\Phi, K)$ обозначает унипотентный радикал борелевской подгруппы B, $V = V(\Phi, K)$ – унипотентный радикал противоположной борелевской подгруппы. Через $N = N(\Phi, K)$ мы обозначаем подгруппу, порожденную тором T и элементами $w_\alpha(1)$ (см. [7]), при этом факторгруппа N/T канонически изоморфна группе Вейля $W = W(\Phi)$ системы корней Φ. Прообраз каждого элемента $w \in W$ в N/T обозначается n_w.

Любой элемент u, принадлежащий унипотентному радикалу U или V, может быть представлен в виде $u = \prod x_\alpha(c_\alpha)$, где произведение можно взять в любом фиксированном порядке. Через $S(u)$ обозначим носитель элемента $u \in U$ или $u \in V$, т.е. множество корней, соответствующих ненулевым коэффициентам в разложении u по элементарным корневым элементам.

Напомним, что приведенное разложение Брюа утверждает, что любой элемент $g \in G$ может быть записан в виде $g = dun_wv$, где $u, v \in$

$U(\Phi, K)$, $d \in T$. То, что разложение приведенное, означает, что $w(\alpha) \in \Phi^-$ для любого $\alpha \in S(v)$.

Подмножество корней $S \subset \Phi$ называется замкнутым, если из того, что $\alpha, \beta \in S$ и $\alpha + \beta$ – корень, следует, что $\alpha + \beta \in S$. Для любого замкнутого множества S определим подгруппу $E(S) = E(S, K)$ как подгруппу, порожденную всеми элементарными корневыми подгруппами X_α, $\alpha \in S$. Любое замкнутое множество S является дизъюнктным объединением своей редуктивной S^r и унипотентной S^u частей, где $S^r = \{\alpha \in S | -\alpha \in S\}$, $S^u = \{\alpha \in S | -\alpha \notin S\}$. Тогда подгруппа $E(S)$ является полупрямым произведением редуктивной $E(S^r)$ и унипотентной $E(S^u)$ подгрупп. Также положим $W(S) = \langle w_\alpha \mid \alpha \in S \rangle$.

Для множества S, порожденного Π и множеством $-\Pi \setminus \{-\alpha_i\}$, через $P_i = TE(S)$ обозначается стандартная максимальная параболическая подгруппа.

Теорема 1. *Пусть* $G = G(\Phi, K)$ *– группа Шевалле над полем* K. *Предположим, что* $\operatorname{char} K \neq 2$ *в случае системы корней типа* B_ℓ, C_ℓ, F_4 *и* $\operatorname{char} K \neq 3$ *в случае* $\Phi = \mathrm{G}_2$. *Тогда нормализатор* $N(X_\rho) = N_G(X_\rho)$ *порождается следующими подгруппами:*

1) $T(\Phi, K)$,
2) $V_\rho = \langle X_\alpha \mid \alpha \in \Phi, (\alpha, \rho) = 0, \alpha + \rho \notin \Phi \rangle$,
3) $U_\rho = \langle X_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+, (\alpha, \rho) > 0, \alpha + \rho \notin \Phi \rangle$,
4) $W_\rho = \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Phi, (\alpha, \rho) = 0, \alpha + \rho \in \Phi \rangle$.

Доказательство. Из соотношений в группе Шевалле сразу следует, что все перечисленные выше подгруппы содержатся в $N(X_\rho)$. Убедимся в том, что любой элемент $g \in N(X_\rho)$ является произведением элементов этих подгрупп.

Единственные положительные корни α, для которых $\alpha + \rho \in \Phi$, – это короткие корни вида $\rho_i - \rho$. В этом случае коммутационная формула Шевалле принимает следующий вид

$$[x_\rho(t), x_\alpha(s)] = x_{\rho_i}(n_{\rho\alpha} ts), \tag{1}$$

где $n_{\rho\alpha} = \pm 2$ в случае $\Phi = \mathrm{B}_\ell$, C_ℓ или F_4 и $n_{\rho\alpha} = \pm 3$ для $\Phi = \mathrm{G}_2$.

Для элемента $g \in N(X_\rho)$ запишем приведенное разложение Брюа. Тогда

$$n_w v x_\rho(t) v^{-1} {n_w}^{-1} = u^{-1} x_\rho(t') u,$$

откуда
$$n_w x_\rho(t) \prod_i x_{\rho_i}(c_i) {n_w}^{-1} = x_\rho(t') \prod_i x_{\rho_i}(d_i) \tag{2}$$
для некоторых $c_i, d_i \in K$. Так как ρ – единственный короткий корень, присутствующий в формуле, то $w(\rho) = \rho$. Кроме того, $w(\rho_i) = \rho_j$. Следовательно, $w(\rho_i - \rho) \in \Phi^+$. Поэтому корень $\rho_i - \rho \notin S(v)$. Учитывая, что в разложении унипотентных элементов мы берём корни в фиксированном порядке, из формулы (2) следует, что и $S(u)$ не содержит корней $\rho_i - \rho$. Отсюда следует, что $S(u)$ и $S(v)$ состоят из корней α таких, что $\alpha + \rho \notin \Phi$. Так как $w(\rho) = \rho$, то [6, лемма 1.18.] $w \in W(\{\rho\}^\perp)$.

Разобъём множество $S(u) \cup S(v)$ на два подмножества: $S_0 = \{\alpha \in \Phi^+ \mid (\alpha, \rho) = 0\}$ и $S_1 = \{\alpha \in \Phi^+ \mid (\alpha, \rho) > 0\}$. Покажем, что $S(v) \subset S_0$. Пусть $\alpha \in S(v)$, тогда мы имеем $n_w x_\alpha(t) n_w^{-1} = x_{w\alpha}(t')$, где $w\alpha \in \Phi^-$. Поскольку ρ – доминантный корень, то $(\alpha, \rho) \geqslant 0$ для любого положительного корня α. С другой стороны, $(\alpha, \rho) = (w\alpha, w\rho) = (w\alpha, \rho) \leqslant 0$. Следовательно, $(\alpha, \rho) = 0$.

Теперь представим $u = u_1 u_2$, $u_1 \in U_\rho$, $u_2 \in V_\rho$ и, учитывая, что $W(\{\rho\}^\perp) S_0 = -S_0$, имеем $wv = v'w$, $v' \in V_\rho$ и $S(v') \subset \Phi^-$.

Группа $W(\{\rho\}^\perp)$ порождается элементами вида w_β, где $(\beta, \rho) = 0$ и $\beta + \rho \notin \Phi$, и элементами вида w_α, где $(\alpha, \rho) = 0$ и $\alpha + \rho \in \Phi$. Подгруппа, порожденная элементами первого типа содержится в V_ρ. Подгруппа, порожденная элементами второго типа, – абелева подгруппа W_ρ, нормализующая группы U_ρ и V_ρ. Отсюда следует разложение $w = w_1 w_2$, где $w_1 \in V_\rho$, $w_2 \in W_\rho$, что и завершает доказательство. □

Заметим, что подгруппа W_ρ порождается k элементами, где $k = \ell - 1, 1, 3, 0$ для $\Phi = \mathrm{B}_\ell$, C_ℓ, F_4 и G_2 соответственно. В случае систем корней типа B_ℓ, C_ℓ и F_4 условие $\alpha + \rho \notin \Phi$ в определении группы U_ρ излишне, так как следует из первого условия.

Следствие 1. *Пусть $G(\Phi, K)$ – группа Шевалле над полем K. При предположениях теоремы на поле верно следующее.*

1) *Нормализатор $N(X_\rho)$ содержится в стандартной максимальной параболической подгруппе P_i, где α_i – единственный простой корень, не ортогональный ρ.*

2) *$N(X_\rho)$ не содержится ни в какой другой стандартной параболической подгруппе.*

Доказательство. Из реализации систем корней видно, что существует единственный простой корень α_i, не ортогональный корню ρ, где i =1, 2, 4, 1 для $\Phi = \mathrm{B}_\ell$, C_ℓ, F_4 и G_2 соответственно. Тогда подгруппа $X_{-\alpha_i}$ не содержится в нормализаторе $N(X_\rho)$. В то же время подгруппы U_ρ, W_ρ и V_ρ являются подгруппами P_i. Следовательно, и $N(X_\rho) \leqslant P_i$.

С другой стороны, для любого простого корня $\alpha_j \neq \alpha_i$ либо подгруппы X_{α_j} и $X_{-\alpha_j}$ содержатся в V_ρ, если $\alpha_j + \rho \notin \Phi$, либо $w_{\alpha_j} \in W_\rho$, если $\alpha_j + \rho \in \Phi$. Отсюда следует второе утверждение следствия. □

Представим множество корней $\{\rho\}^\perp = \{\rho\}^\perp_0 \cup \{\rho\}^\perp_1$. Первое множество $\{\rho\}^\perp_0$ состоит из корней α, строго ортогональных ρ, т.е. $(\alpha, \rho) = 0$ и $\alpha + \rho \notin \Phi$. Второе $\{\rho\}^\perp_1$ состоит из корней α, ортогональных ρ, но таких, что $\alpha + \rho \in \Phi$.

Непосредственным следствием теоремы и следствия 1 является следующее утверждение.

Следствие 2. *При предположениях теоремы пусть P_i – стандартная максимальная параболическая подгруппа в G, где $i = 1, 2, 4, 1$ для $\Phi = \mathrm{B}_\ell$, C_ℓ, F_4 и G_2 соответственно. Представим $P_i = HE(S^u)E(S^r)$. Тогда*

1) *для групп типа B_ℓ, C_ℓ и F_4 мы имеем*

$$N(X_\rho) = HE(S^u)E(S^r \setminus \{\rho\}^\perp_1)W(\{\rho\}^\perp_1).$$

2) *для группы типа G_2:*

$$N(X_\rho) = HE(S^u \setminus \{\alpha | \angle(\alpha, \rho) = \pi/3\})E(S^r \setminus \{\rho\}^\perp_1)W(\{\rho\}^\perp_1).$$

Доказательство. Вначале заметим, что группа $W(\{\rho\}^\perp)$ нормализует группы U_ρ и V_ρ, определенные в теореме 1.

Далее, множество $\{\rho\}^\perp$ совпадает с множеством корней, порожденным корнями $\Pi \setminus \{\alpha_i\}$, совпадающим с S^r. Поэтому $V_\rho = E(S^r \setminus \{\rho\}^\perp_1)$, $W_\rho = W(\{\rho\}^\perp_1)$. Так как для систем корней типа B_ℓ, C_ℓ и F_4 из $(\alpha, \rho) > 0$ следует, что $\alpha + \rho \notin \Phi$, то в этом случае все доказано.

В случае $\Phi = \mathrm{G}_2$ существуют два коротких положительных корня α_1 и $\alpha_1 + \alpha_2$, не ортогональных ρ, каждый из которых в сумме с ρ также является корнем. Исключая их из унипотентного множества S^u, получаем описание нормализатора для G_2. □

Теорема 2. *Пусть $G = G(\Phi, K)$ – группа Шевалле над полем K. Предположим, что* $\operatorname{char} K = 2$ *в случае системы корней типа* B_ℓ, C_ℓ,

F_4 *и* $\operatorname{char} K = 3$ *в случае* $\Phi = \mathrm{G}_2$. *Тогда нормализатор* $N(X_\rho)$ *совпадает со стандартной максимальной параболической подгруппой* P_i, *где* $i = 1, 2, 4, 1$ *для* $\Phi = \mathrm{B}_\ell$, C_ℓ, F_4 *и* G_2 *соответственно.*

Доказательство. В характеристике два правая часть равенства (1) превращается в единичный элемент, поэтому все унипотентные элементы коммутируют с X_ρ. Таким образом, подгруппа U содержится в $N(X_\rho)$ и, более того, для любого $\alpha \in \{\rho\}_1^\perp$ элементарная подгруппа X_α содержится в $N(X_\rho)$. Теперь доказательство следует из следствия 2. □

В завершение приведем теорему о нормализаторе длинной корневой подгруппы.

Теорема 3. *Пусть* $G = G(\Phi, K)$ *– произвольная группа Шевалле над произвольным полем* K.

1) *Если* $\Phi \neq \mathrm{A}_\ell$, *тогда нормализатор* $N(X_\delta) = P_i$, *где* $i = 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 8$ *для* $\Phi = \mathrm{B}_\ell$, C_ℓ, D_ℓ, F_4, G_2, E_6, E_7, E_8 *соответственно.*

2) *Если* $\Phi = \mathrm{A}_\ell$, *тогда нормализатор* $N(X_\delta) = P_{1\ell}$.

Доказательство моментально следует из выше приведенных рассуждений из тех соображений, что, во-первых, корней бóльших, чем δ нет и, во-вторых, множество $\{\delta\}_1^\perp = \varnothing$.

Литература

1. Бурбаки Н., *Элементы математики. Группы и алгебры Ли*, гл. IV – VI, Мир, М., 1972.
2. Вавилов Н. А. *Подгруппы групп Шевалле содержащие максимальный тор.* — Труды Ленингр. Мат. Общества, **1** (1990), 64–109.
3. Нестеров В. В. *Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле типа* G_2. — Записки науч. сем. ПОМИ, **281** (2001), 253–273.
4. Нестеров В. В. *Порождение пар коротких корневых подгрупп в группах Шевалле.* — Алгебра и анализ, **16:6** (2004), 172–208.
5. Степанов А. В. *Новый взгляд на разложение унипотентов и нормальное строение групп Шевалле.* — Алгебра и анализ, **28:3** (2016), 161–173.
6. Steinberg R. *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **80** (1968).
7. Стейнберг Р. *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975.

Nesterov V. V. On the normalizer of a unipotent root subgroup in Chevalley group.

In the present paper we calculate the normalizer of a unipotent short and long root subgroup in Chevalley group over an arbitrary field in detail. We sure that this result is known specialists. However we could not find a reference to it.

Балтийский государственный
технический университет
"ВОЕНМЕХ" им.Д.Ф. Устинова
1-я Красноармейская, 1
190005, Санкт-Петербург
Россия
E-mail: vl.nesterov@mail.ru

Поступило 11 октября 2016 г.