Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 452, 2016 г.

А. И. Мадунц

ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ ДЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП ЛЮБИНА–ТЕЙТА

§1. Относительные формальные группы Любина–Тейта и их эндоморфизмы

Относительные формальные группы Любина–Тейта впервые введены де Шали в работе [3]. Далее в [6] была выдвинута идея переноса на эти группы явной формулы С. В. Востокова для символа Гильберта (см. [9]). Аналогичная задача уже решена для обобщенных формальных групп Любина–Тейта (см. [14]).

В настоящей работе изучаются различные свойства относительных формальных групп Любина–Тейта, в частности, арифметика связанного с ними формального модуля, и явным образом вычисляется символ Гильберта для данных групп.

Введем основные обозначения.

Пусть k – локальное поле (конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$), $\mathcal{O}_k$– его кольцо целых, v_k – нормирование, π_0 – произвольный униформизирующий элемент, $\wp_k$ – максимальный идеал. Под $\overline{k}$ будем подразумевать поле вычетов k (конечное поле характеристики p с числом элементов $q = p^{f_0}$), под $\widetilde{k}$ – пополнение максимального неразветвленного расширения k, а под Ω – пополнение алгебраического замыкания k.

Фиксируем K – неразветвленное расширение k конечной степени d. Тогда $\mathcal{O}_K$ будет его кольцом целых, v_K – нормированием, π – произвольным униформизирующим элементом, а $\wp_K$ – максимальным идеалом. Поле вычетов $\overline{K}$ содержит $q^d = p^{f_0 d}$ элементов. Автоморфизм Фробениуса расширения K/k обозначим Δ.

Как обычно, $R[[X_1,\dots,X_n]]$ будет множеством степенных рядов от n переменных с коэффициентами из некоторого R, а $R[[X_1,\dots,X_n]]^o$ – множеством рядов без свободного члена.

Для $a(X_1,\dots,X_n), b(X_1,\dots,X_n) \in R[[X_1,\dots,X_n]]$ будем писать

$$a(X) \equiv b(X) \bmod \deg n,$$

Ключевые слова: локальные поля, относительные формальные группы Любина–Тейта, формальные модули, символ Гильберта.

если все члены степеней, меньших n, у данных рядов совпадают, а для степенных рядов

$$a(X_1,\dots,X_n), b(X_1,\dots,X_n)\in\mathcal{O}_K[[X_1,\dots,X_n]]$$

под $a(X)\equiv b(X) \bmod \wp_K^s$ подразумеваем, что

$$a(X_1,\dots,X_n)-b(X_1,\dots,X_n)\in\wp_K^s[[X_1,\dots,X_n]].$$

Теперь для каждого элемента $\xi\in k$ со свойством $v_k(\xi)=d$ составим множество

$$\mathcal{F}_\xi=\{f(X)\in\mathcal{O}_K[[X]]: f(X)\equiv X^q \bmod \wp_K, f(X)\equiv \pi X \bmod \deg 2,\\ N_{K/k}(\pi)=\xi\}.$$

Будем, когда это существенно, ряд из $\mathcal{F}_\xi$, для которого

$$f(X)\equiv\pi X \bmod \deg 2,$$

обозначать $f_\pi(X)$.

Кроме того, для любых π_1,π_2 таких, что $N_{K/k}(\pi_1)=N_{K/k}(\pi_2)=\xi$, введем множество

$$\mathcal{O}_{\pi_1,\pi_2}=\{\alpha\in\mathcal{O}_K:\alpha^{\Delta-1}=\pi_1/\pi_2\}.$$

Легко доказывается следующий аналог классической леммы Любина–Тейта (см. [2]).

1.1. Лемма. *Для любых $f_{\pi_1}(X), g_{\pi_2}(X)\in\mathcal{F}_\xi$ и $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathcal{O}_{\pi_1,\pi_2}$ существует единственный ряд от n переменных*

$$F(X_1,\dots,X_n)\in\mathcal{O}_K[[X_1,\dots,X_n]]$$

такой, что $F(X_1,\dots,X_n)\equiv\alpha_1X_1+\dots+\alpha_nX_n \bmod \deg 2$ и

$$f_{\pi_1}(F(X_1,\dots,X_n))=F^\Delta(g_{\pi_2}(X_1),\dots,g_{\pi_2}(X_n)).$$

1.1.1. Следствие. *Для любого $f(X)\in\mathcal{F}_\xi$ существует единственная формальная группа $F_f(X,Y)$ над $\mathcal{O}_K$, для которой $f(X)\in\mathrm{Hom}(F,F^\Delta)$ (то есть, $f\circ F_f=F_f^\Delta\circ f$).*

1.2. Определение. Формальную группу F_f, полученную таким образом, называют относительной формальной группой Любина–Тейта.

1.2.1. Замечание. Заметим, что если $f\in\mathcal{F}_\xi$, то $f^\Delta\in\mathcal{F}_\xi$ и $F_f^\Delta=F_{f^\Delta}$.

1.2.2. Следствие. *Для любых* $f_{\pi_1}(X), g_{\pi_2}(X) \in \mathcal{F}_\xi$ *и каждого* $\alpha \in \mathcal{O}_{\pi_1,\pi_2}$ *существует единственный ряд* $[\alpha]_{f,g}(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ *такой, что*

$$[\alpha]_{f,g}(X) \equiv \alpha X \bmod \deg 2$$

и

$$[\alpha]^{\Delta}_{f,g} \circ g = f \circ [\alpha]_{f,g}.$$

При этом $[\alpha]_{f,g}(X) \in \mathrm{Hom}(F_g, F_f)$.

Для соответствующих $[\alpha]_{f,g}, [\beta]_{g,h}$ *верно* $[\alpha]_{f,g} \circ [\beta]_{g,h} = [\alpha\beta]_{f,h}$, *а для* $[\alpha]_{f,g}, [\beta]_{f,g}$ *имеем*

$$[\alpha]_{f,g} +_F [\beta]_{f,g} = [\alpha+\beta]_{f,g},$$

где под $([\alpha]_{f,g} +_F [\beta]_{f,g})(X)$ *подразумевается* $F_f([\alpha]_{f,g}(X), [\beta]_{f,g}(X))$.

Таким образом, отображение $\alpha \to [\alpha]_{f,g}$ *является вложением* $\mathcal{O}_{\pi_1,\pi_2}$ *в кольцо* $\mathrm{Hom}(F_g, F_f)$.

В случае $\pi_1 = \pi_2$ *имеем* $\mathcal{O}_{\pi_1,\pi_2} = \mathcal{O}_k$. *В частности, множество эндоморфизмов относительной формальной группы Любина–Тейта* F_f *с операциями*

$$[\alpha] \cdot_F [\beta] = [\alpha] \circ [\beta]$$

и

$$[\alpha] +_F [\beta] = F_f([\alpha], [\beta])$$

изоморфно $\mathcal{O}_k$.

1.2.3. Замечание. Пусть $f_{\pi_1}(X), g_{\pi_2}(X) \in \mathcal{F}_\xi$. Поскольку

$$N_{K/k}(\pi_1/\pi_2) = 1,$$

по теореме Гильберта-90 существует $\alpha \in K^*$ такой, что $\alpha^{\Delta-1} = \pi_1/\pi_2$. Таким образом, F_f и F_g изоморфны над $\mathcal{O}_K$ (при $\pi_1 = \pi_2$ строго изоморфны). Если же $f(X), g(X)$ взяты из разных семейств, соответствующие формальные группы изоморфны над $\mathcal{O}_{\widetilde{k}}$.

§2. Логарифм относительной формальной группы Любина–Тейта

Сформулируем функциональную лемму из работы Хазевинкеля [1], выбрав параметры в ней удобным для нас образом.

2.1. Лемма. (1) *Для любого ряда* $g(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]^o$ *существует единственный ряд* $\lambda_g(X) \in K[[X]]$ *такой, что* $\lambda_g(X) = g(X) + \frac{1}{\pi}\lambda_g^{\Delta}(X^q)$, *причем*

$$F(X,Y) = \lambda_g^{-1}(\lambda_g(X) + \lambda_g(Y)) \in \mathcal{O}_K[[X,Y]];$$

(2) *для любых* $\lambda_{g_1}(X), \lambda_{g_2}(X)$ *таких, что*

$$\lambda_{g_1}(X) = g_1(X) + \frac{1}{\pi}\lambda_{g_1}^{\Delta}(X^q), \lambda_{g_2}(X) = g_2(X) + \frac{1}{\pi}\lambda_{g_2}^{\Delta}(X^q),$$

имеем $\lambda_{g_1}^{-1}(\lambda_{g_2}(X)) \in \mathcal{O}_K[[X]]$*;*

(3) *для любых* $g_1(X), h(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]^o$ *существует единственный ряд* $g_2(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]^o$ *такой, что* $\lambda_{g_1}(h(X)) = \lambda_{g_2}(X)$*;*

(4) *для любых* $\alpha(X), \beta(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$ *имеем*

$$\alpha(X) \equiv \beta(X) \bmod \pi^n \Leftrightarrow \lambda(\alpha(X)) \equiv \lambda(\beta(X)) \bmod \pi^n;$$

(5) *пусть*

$$\begin{aligned}
&\lambda_{g_1}(X) = g_1(X) + \frac{1}{\pi_1}\lambda_{g_1}^{\Delta}(X^q), \lambda_{g_2}(X) \quad = g_2(X) + \frac{1}{\pi_2}\lambda_{g_2}^{\Delta}(X^q),\\
&F_1(X,Y) = \lambda_{g_1}^{-1}(\lambda_{g_1}(X) + \lambda_{g_1}(Y)),\\
&F_2(X,Y) = \lambda_{g_2}^{-1}(\lambda_{g_2}(X) + \lambda_{g_2}(Y)).
\end{aligned}$$

Тогда F_1 *строго изоморфна* $F_2 \Leftrightarrow \pi_1 = \pi_2$. □

Выберем $g(X) \equiv X \bmod \deg 2$. В этом случае $F(X,Y)$ – формальная группа, а $\lambda(X)$ является ее логарифмом.

2.2. Предложение. *Относительные формальные группы Любина–Тейта находятся во взаимно-однозначном соответствии с формальными группами, полученными применением леммы* 2.1.

Доказательство. Для произвольного

$$g(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]^o, g(X) \equiv X \bmod \deg 2$$

построим по лемме 2.1 ряд $f(X) = (\lambda^{\Delta})^{-1}(\pi\lambda(X))$. Легко видеть, что $f \circ F = F^{\Delta} \circ f$.

По свойству логарифма

$$\lambda(X) = g(X) + \frac{1}{\pi}\lambda^{\Delta}(X^q), \lambda^{\Delta}(X) = g^{\Delta}(X) + \frac{1}{\pi^{\Delta}}\lambda^{\Delta^2}(X^q).$$

Введем $g_1(X) = \pi g(X), \lambda_1(X) = \pi\lambda(X)$. Очевидно, что

$$\lambda_1(X) = g_1(X) + \frac{1}{\pi^{\Delta}}\lambda_1^{\Delta}(X).$$

По утверждению (2) леммы 2.1 из этого следует, что

$$f(X) = (\lambda^{\Delta})^{-1}(\lambda_1(X)) \in \mathcal{O}_K[[X]].$$

Так как $\lambda(X) \equiv X \bmod \deg 2, \lambda^{-1}(X) \equiv X \bmod \deg 2$, имеем

$$f(X) \equiv \pi X \bmod \deg 2.$$

Кроме того, по части (4) леммы 2.1 условие

$$f(X) \equiv X^q \bmod \wp_K$$

равносильно условию

$$\lambda^\Delta(f(X)) = \pi\lambda(X) \equiv \lambda^\Delta(X^q) \bmod \wp_K,$$

которое выполнено по свойствам логарифма.

Таким образом, $f(X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(F, F^\Delta)$ и $f(X) \in \mathcal{F}_\xi$ при $\xi = N_{K/k}(\pi)$. По единственности в лемме 1.1 формальная группа $F(X,Y)$ совпадает с $F_f(X,Y)$, построенной в предыдущем пункте.

Теперь выберем любое $h_\pi(X) \in \mathcal{F}_\xi$. По следствию леммы 1.1 существует

$$[1]_{f,h} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(F_{h_\pi}, F_{f_\pi}).$$

Но $\lambda_f^{-1}(\lambda_h(X)) \equiv X \bmod \deg 2$, причем согласно части (2) леммы 2.1 имеем $\lambda_f^{-1}(\lambda_h) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(F_h, F_f)$. Значит, $\lambda_h = \lambda([1]_{f,h})$, что по части (3) леммы 2.1 дает $\lambda_h = \lambda_{g_1}$.

2.2.1. Замечание. Аналогичным образом проверяется, что при $\alpha \in \mathcal{O}_k$ верно $[\alpha]_f(X) = \lambda^{-1}(\alpha\lambda(X))$.

Введем удобное обозначение: для элемента $a \in \mathcal{O}_{\widetilde{k}}$ пусть

$$a^{(i)} = a^{1+\Delta+\cdots+\Delta^{i-1}}.$$

Логарифм не является эндоморфизмом формальных групп, поскольку его коэффициенты не обязательно целые. Однако верно следующее утверждение.

2.3. Предложение. *Пусть*

$$g(X) = X + \sum_{i>1} b_i X^i, \lambda(X) = X + \sum_{i>1} c_i X^i.$$

Тогда если $q \nmid i$, *то* $c_i = b_i$, *а если*

$$q^m \mid i, q^{m+1} \nmid i,$$

то

$$c_i = b_i + \frac{1}{\pi} b_{i/q}^{\Delta} + \frac{1}{\pi^{(2)}} b_{i/q^2}^{\Delta^2} \cdots + \frac{1}{\pi^{(m)}} b_{i/q^m}^{\Delta^m}.$$

Доказательство производится непосредственным вычислением с помощью формулы

$$\lambda(X) = g(X) + \frac{1}{\pi}\lambda^{\Delta}(X^q).$$

В частности, получаем $v_K(c_i) \geqslant -\log_q i$.

2.3.1. Замечание. Ряд, обратный к $\lambda(X)$ в смысле суперпозиции, обозначим $\exp_F X$ и будем называть формальной экспонентой. Таким образом,

$$\exp_F(\alpha x) = [\alpha]\exp_F x$$

и

$$\exp_F(x+y) = \exp_F x +_F \exp_F y.$$

Пусть $\exp_F X = \sum\limits_{i\geqslant 1} a_i X^i$. Используя формулу $\exp_F(\pi x) = [\pi]\exp_F x$, несложной индукцией можно показать, что

$$v_K(a_i) \geqslant -\frac{i-1}{q-1}.$$

2.4. Определение. В случае $g(X) = X$ имеем $\lambda_a(X) = \sum\limits_{i\geqslant 0} \frac{X^{q^i}}{\pi^{(i)}}$. Этот логарифм назовем логарифмом Артина–Хассе.

Как мы видим, существует $f_a(X) \in \mathcal{F}_\xi$ такое, что соответствующая относительная формальная группа Любина–Тейта $F_{f_a}(X,Y)$ имеет логарифм Артина–Хассе.

§3. Модуль ядра изогении

Пусть L – произвольное расширение K, содержащееся в Ω (пополнении алгебраического замыкания поля k), а $\wp_L$ – его максимальный идеал. Для фиксированной относительной формальной группы Любина–Тейта $F_f(X,Y)$ введем операцию формального сложения элементов из $\wp_L$:

$$x +_F y = F_f(x,y)$$

и умножения элемента $x \in \wp_L$ на элемент $\alpha \in \mathcal{O}_k$:

$$\alpha \cdot_F x = [\alpha]_f(x)$$

(здесь $[\alpha]_f(X) \in End_{\mathcal{O}_k} F$).

Пусть $\mathcal{M}_L$ – множество $\wp_L$ с данными операциями. Его называют группой точек (со структурой $\mathcal{O}_k$-модуля).

Здесь и далее для ряда
$$h(x) = \sum_m b_m X^m \in \mathcal{O}_{\widetilde{k}}[[X]]$$
пусть $h^{(i)}(X) = h^{\Delta^{i-1}} \circ \dots \circ h^{\Delta} \circ h$.

Если $f(x) \in \mathcal{F}_\xi$, то $f^{(n)} \in \mathrm{Hom}(F_f, F_f^{\Delta^n})$. Будем называть гомоморфизм данного вида выделенным. Легко видеть, что в случае $v(\xi) = d$ имеем
$$f^{(d)} = [\xi]_f \in End(F_f).$$
Кроме того, $(f^{(i)})^{\Delta^j} \circ f^{(j)} = f^{(i+j)}$ и $f^{(i)}(X) \equiv \pi^{(i)} X \bmod \deg 2$. Таким образом,
$$f^{(n)} = [\pi^{(n)}]_{f^{\Delta^n}, f} = \big[\frac{\pi^{(n)}}{\pi_0^n}\big]_{f^{\Delta^n}, f} \circ [\pi_0^n]_f,$$
и потому корни выделенного гомоморфизма $f^{(n)}$ и изогении $[\pi_0^n]$ совпадают.

Обозначим
$$\begin{aligned}\Lambda_{f,n} &= \{x \in \mathcal{M}_L : [\alpha]_f(x) = 0 \ \forall\ \alpha \in \wp_k^n\}\\ &= \{x \in \mathcal{M}_L : \pi_0^n \cdot_F x = 0\} = \mathrm{Ker}\, f^{(n)}.\end{aligned}$$

Легко видеть, что это подмодуль $\mathcal{M}_L$ и $\Lambda_{f,1} \subset \dots \subset \Lambda_{f,n}$. Более того, поскольку по следствию 1.2.2 для любых $f(X), g(X) \in \mathcal{F}_\xi$ существует строгий изоморфизм
$$[\alpha]_{f,g}(X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(F_g, F_f)$$
такой, что $[\alpha]_{f,g}(g(X)) = f([\alpha]_{f,g}(X))$, поле $K(\Lambda_{f,n}) = K_{\xi,n}$ не зависит от выбора $f(X) \in \mathcal{F}_\xi$.

Далее L будет расширением K, лежащим в Ω и содержащим все корни изогении $[\pi_0^n](X)$ (они же корни $f^{(n)}(X)$). Выберем $f(X) = \pi X + X^q$. Пусть ζ_1 – корень многочлена Эйзенштейна $\Phi_1(X) = \pi + X^{q-1}$. Аналогично случаям классической и обобщенной групп Любина–Тейта (см. [2] и [14]) имеем
$$\Phi_s(X) = \frac{f^{(s)}(X)}{f^{(s-1)}(X)} = \pi^{\Delta^{s-1}} + (f^{(s-1)}(X))^{q-1}.$$
Этот многочлен степени $q^{s-1}(q-1)$ неприводим над K как многочлен Эйзенштейна, а его корни – первообразные корни $f^{(s)}(X)$. Обозначим

некоторый такой корень ζ_s. В итоге получаем башню расширений Галуа

$$K \subset K_{\xi,1} = K(\zeta_1) \subset K_{\xi,2} = K_{\xi,1}(\zeta_2) \subset \cdots \subset K_{\xi,n} = K_{\xi,n-1}(\zeta_n),$$

из которых первое является куммеровским слаборазветвленным степени $q-1$, а все последующие – вполне разветвленными степени q. Кроме того,

$$\Lambda_{f,n} \cong \mathcal{O}_k/\pi_0^n\mathcal{O}_k$$

(доказательство аналогично приведенному в [2]).

§4. Изоморфизмы степенных рядов

Пусть T – неразветвленное расширение поля K, $\mathcal{O}_T$ – его кольцо целых, Δ – автоморфизм Фробениуса T/K. Введем автоморфизм δ множества степенных рядов без свободного члена $\mathcal{O}_T[[X]]^o$, действующий по формуле: для $a(X) = \sum\limits_{i\geqslant 1} a_i X^i$ пусть

$$a^\delta(X) = \sum_{i\geqslant 1} a_i^\Delta X^{qi}.$$

Заметим, что $a^\Delta(X) = \sum\limits_{i\geqslant 1} a_i^\Delta X^i$.

По основному соотношению для логарифма из леммы 2.1 и предложению 2.2 для любой относительной формальной группы Любина–Тейта $F(X,Y)$ имеем

$$l_F(X) = \left(1 - \frac{\delta}{\pi}\right)(\lambda(X)) \in \mathcal{O}_K[[X]]^o.$$

Случай $g(X) = X$ дает логарифм Артина–Хассе $\lambda_a(X)$ и

$$l_F(X) = \lambda_a^{-1}(\lambda(X)) = [1]_{f_a,f}.$$

Отображение, обратное к l_F в смысле суперпозиции, обозначим E_F (см. [9]). Легко видеть, что

$$E_F(X) = \lambda^{-1}\left(\sum_{\mathrm{i}\geqslant 0} \frac{\delta^i(X)}{\pi^i}\right)$$

и коэффициенты данного ряда целые. Кроме того,

$$E_F(X) \equiv X \bmod \deg 2, l_F(X) \equiv X \bmod \deg 2.$$

Действие l_f и E_F легко продолжить на $\mathcal{O}_T[[X]]^o$, то есть, для любого $\varphi(X) \in \mathcal{O}_T[[X]]^o$ имеем

$$l_F(\varphi) = \left(1 - \frac{\delta}{\pi}\right)(\lambda(\varphi)), E_F(\varphi) = \lambda^{-1}\left(\sum_{\mathbf{i}\geqslant 0} \frac{\delta^i(\varphi)}{\pi^i}\right).$$

Пусть $\mathcal{H}_F^0$ – $\mathcal{O}_k$-модуль рядов без свободного члена над $\mathcal{O}_T$ со следующими операциями:

$$\varphi +_F \psi = F(\varphi, \psi), \alpha \cdot_F \varphi = [\alpha](\varphi), \alpha \in \mathcal{O}_k.$$

Аналогично [4], получаем, что

$$E_F(\varphi + \psi) = E_F(\varphi) +_F E_F(\psi), E_F(\alpha\varphi) = \alpha \cdot_F E_F(\varphi)$$

и

$$l_F(\varphi +_F \psi) = l_F(\varphi) + l_F(\psi), l_F(\alpha \cdot_F \varphi) = \alpha l_F(\varphi).$$

Таким образом, функции E_F и l_F осуществляют взаимно обратные изоморфизмы между аддитивным $\mathcal{O}_k$-модулем $\mathcal{O}_T[[X]]^o$ и $\mathcal{O}_k$-модулем $\mathcal{H}_F^0$. В работе [4] также доказано, что для ряда φ порядка r (то есть, $\varphi(X) = \sum\limits_{i\geqslant r} a_i X^i$) из кольца $\mathcal{O}_T[[X]]^o$ верно

$$E_F(\varphi) \equiv \varphi \bmod \deg(r+1), l_F(\varphi) \equiv \varphi \bmod \deg(r+1),$$

из чего следует, что для ряда φ порядка r при всех $\alpha \in \mathcal{O}_{\widetilde{k}}$ имеем $E_F(\alpha l_F(\varphi))|_{X=\pi} \equiv \alpha\varphi(\pi) \bmod \pi^{r+1}$.

§5. Примарные элементы

Здесь и в дальнейшем L будет конечным расширением K, содержащим все корни изогении $[\pi_0^n](X)$, а ζ_n – одним из ее первообразных корней.

Пусть v_L – нормирование L, а π_L – униформизующая L. Обозначим e_L индекс ветвления, а f_L – степень инерции L/K. Тогда

$$e_n = \frac{e_L}{q^{n-1}(q-1)} \in \mathbb{Z}, e_1 = \frac{e_L}{q-1} \in \mathbb{Z}.$$

Разложим ζ_n в степенной ряд по простому элементу π_L с коэффициентами из кольца $\mathcal{O}_T$, где T – подполе инерции L/K. Тогда

$$\zeta_n = \sum_{i\geqslant 0} c_i \pi_L^{i+e_n}.$$

Введем ряды $z(X) = \sum\limits_{i \geqslant 0} c_i X^{i+e_n}$ и $s_k(X) = [\pi_0^k](z(X))$, причем $s_n(X)$ будем обозначать $s(X)$.

Непосредственным вычислением проверяется, что для ряда

$$\frac{1}{s(X)} = \widetilde{s}(X)$$

верно $\widetilde{s}(X) = \sum\limits_{i \geqslant -q^n e_n} d_i X^i$, причем производная $\frac{d\widetilde{s}(X)}{dX} \equiv 0 \bmod \pi^n$.

Элемент группы точек $x \in \mathcal{M}_L$ называют π_0^n-примарным, если расширение поля K, полученное делением x на изогению $[\pi_0^n]$, неразветвлено. Примарные элементы используются при задании обобщенного символа Гильберта, сопоставляющего каждой упорядоченной паре

$$\alpha \in L^*, \beta \in \mathcal{M}_L$$

элемент ядра изогении $\Lambda_{f,n}$ по формуле:

$$(\alpha, \beta)_F = \rho^{\sigma_\alpha} -_F \rho,$$

где $\beta = [\pi_0^n](\rho)$, а σ_α – изоморфизм из группы Галуа $\mathrm{Gal}(L/K)$, соответствующий α в силу локальной теории полей классов (см. [10]).

Для $a \in \mathcal{O}_T$ выберем $A \in \mathcal{O}_{\widetilde{T}}$ такой, что $A^\Delta - A = a$ (здесь $\widetilde{T}$ – пополнение максимального неразветвленного расширения T, а Δ – продолжение автоморфизма Фробениуса T/k на $\widetilde{T}$). Подобно случаю классических формальных групп Любина–Тейта (см. [4]), введем $H(a) = E_F(\pi^n A^\delta l_F(z(X)))\big|_{X=\pi_L}$ и $\omega(a) = E_F(as(X))|_{X=\pi_L}$.

5.1. Теорема. *Элементы $H(a), \omega(a)$ являются корректно определенными π_0^n-примарными, причем*

$$(\pi_L, H(a))_F = (\pi_L, \omega(a))_F = [\mathrm{tr}_{T/k}\, a](\zeta_n).$$

Доказательство. В работах [11] и [12] для классических формальных групп Любина–Тейта доказано, что $H(a)$ и $\omega(a)$ корректно определены (то есть, используемые ряды при подстановке элемента π_L сходятся). Корректность определения соответствующих элементов в случае относительных формальных групп Любина–Тейта получается аналогично.

Пусть $\widetilde{\Delta} = \Delta^{df_L}$ – автоморфизм Фробениуса $\widetilde{k}/T$ (он как раз дает σ_{π_L}, причем $\rho = E_F(A^\Delta l_F(z(X)))\big|_{X=\pi_L}$).

Поскольку

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_{T/k} a &= a + a^{\Delta} + \cdots + a^{\Delta^{df_L - 1}} \\ &= A^{\Delta} - A + A^{\Delta^2} - A^{\Delta} + \cdots + A^{\Delta^{df_L}} \\ &- A^{\Delta^{df_L-1}} = A^{\widetilde{\Delta}} - A,\end{aligned}$$

имеем $A^{\Delta\widetilde{\Delta}} = A^{\Delta} + \operatorname{tr}_{T/k} a$, и потому

$$\begin{aligned}E_F(A^{\Delta} l_F(z(X)))^{\widetilde{\Delta}} &= E_F(A^{\Delta} l_F(z(X))) +_F E_F((\operatorname{tr}_{T/k} a) l_F(z(X))) \\ &= (\operatorname{tr}_{T/k} a) l_F(z(X) E_F(A^{\Delta} l_F(z(X))) \\ &+_F [\operatorname{tr}_{T/k} a](z(X))).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}H(a)^{\widetilde{\Delta}} &= H(a) +_F [\pi_0^n \operatorname{tr}_{T/k} a](z(\pi_L)) \\ &= H(a) +_F [\operatorname{tr}_{T/k} a]([\pi_0^n] z(\pi_L)) = H(a),\end{aligned}$$

что дает примарность, и $\rho^{\widetilde{\Delta}} = \rho +_F [\operatorname{tr}_{T/k} a](\zeta_n)$, из чего получаем формулу $(\pi_L, H(a))_F = [\operatorname{tr}_{T/k} a](\zeta_n)$.

Преобразовав соответствующим образом результат из [11] и [12], связывающий $H(a)$ и $\omega(a)$, имеем

$$H(a) = \omega(a) +_F [\pi_0^n] \Bigg(\sum_{F_{i=2}}^{+\infty} \sum_{F_{j=0}}^{+\infty} \exp_F \frac{a^{\Delta^i} c_j s^{j\Delta^i}(\pi_L)}{\pi_0^{n+i}} \Bigg),$$

где $\lambda(X) = \sum\limits_{j\geqslant 1} c_j X^j$. Следовательно, $H(a)$ и $\omega(a)$ отличаются на элемент, делящийся на изогению $[\pi_0^n]$ в группе точек. Это дает как примарность $\omega(a)$, так и формулу $(\pi_L, \omega(a))_F = [\operatorname{tr}_{T/k} a](\zeta_n)$.

§6. Образующие Шафаревича

Дальнейшей задачей является обобщение на случай относительных формальных групп Любина–Тейта понятия базиса Шафаревича (см. [15]). Обозначим $\mathcal{R}$ множество представителей Тейхмюллера в L.

6.1. Лемма. *Пусть для каждого $\theta \in \mathcal{R}$ и для натуральных i с условием*

$$1 \leqslant i < qe_1, \quad q \nmid i; \quad i = qe_1$$

выбран элемент $\varepsilon_i(\theta)$ из группы точек $\mathcal{M}_L$ такой, что

$$\varepsilon_i(\theta) \equiv \theta_i \pi_L^i \bmod \pi_L^{i+1}.$$

Тогда любой элемент β из группы точек можно представить в виде

$$\beta = \sum_{F_{i,r}} [\pi_0^r]((\varepsilon_i(\theta_{i,r})),$$

где r пробегает все целые неотрицательные числа.

Доказательство. Несложной индукцией можно доказать (см. случай классической формальной группы Любина–Тейта в [4]), что всякий элемент β из группы точек представим в виде

$$\beta = \sum_{F_{i=1}}^{\infty} \varepsilon_i(\theta_i),$$

где

$$\varepsilon_i(\theta_i) \in \mathcal{M}_L, \quad \varepsilon_i(\theta_i) \equiv \theta_i \pi_L^i \bmod \pi_L^{i+1}, \quad \theta_i \in \mathcal{R}.$$

Из соотношения $[\pi_0]^\Delta \circ f = f \circ [\pi_0]$ непосредственным вычислением можно вывести, что для $[\pi_0](X) = \sum\limits_{m>0} a_m X^m$ имеем

$$a_m \in \wp_K, \quad 1 \leqslant m \leqslant q-1,$$

а a_q обратим в $\mathcal{O}_K$. Поэтому для $\alpha \in \mathcal{M}_L, v_L(\alpha) = i$ верны соотношения

$$\begin{aligned}
&[\pi_0](\alpha) \equiv u\alpha^q \bmod \pi_L^{qi+1}, \quad i < e_1,\\
&[\pi_0](\alpha) \equiv \pi\alpha \bmod \pi_L^{i+e_L+1}, \quad i > e_1,\\
&[\pi_0](\alpha) \equiv \pi\alpha + \alpha^q \bmod \pi_L^{qe_L+1}, \quad i = e_1,
\end{aligned}$$

где u – некоторый обратимый элемент.

Пусть γ – первый коэффициент в разложении π_0 по π_L. Тогда

$$[\pi_0]\varepsilon_{i-e}(\gamma^{-1}\theta_i) \equiv \pi_L^{e_L}\gamma\gamma^{-1}\theta_i\pi_L^{i-e_L} \equiv \theta_i \pi_L^i \bmod \pi_L^{i+1}.$$

После замены в разложении из леммы 6.1 элементов $\varepsilon_i(\theta_i), i > qe_1$ на $[\pi_0]\varepsilon_{i-e_L}(\gamma^{-1}\theta_i)$ остаются значения i между 1 и qe_1.

Затем элементы $\varepsilon_i(\theta_i), i = qj, 1 \leqslant i < qe_1$ заменяем на $[\pi_0]\varepsilon_j(\theta_i^{\frac{1}{q}})$, избавляясь от индексов, кратных q.

В итоге

$$\beta = \sum_{F_{i,r}} [\pi_0^r]((\varepsilon_i(\theta_{i,r})),$$

где индекс i принимает значения между 1 и qe_1, не делящиеся на q, а также значение $i = qe_1$, индекс r пробегает целые неотрицательные числа.

6.1.1. Следствие. *Всякий элемент β из группы точек $\mathcal{M}_L$ можно представить в виде*

$$\beta = H(b) +_F E_F(w_\beta)|_{X=\pi_L},$$

где $w_\beta(X) = \sum\limits_i b_i X^i$, причем $b, b_i \in \mathcal{O}_T$, а индекс i пробегает значения между 1 и qe_1, взаимно простые с q. При этом след элементов b, b_i определен однозначно по модулю π_0^n.

Доказательство. Поскольку

$$E_F(\theta_i \pi_L^i) \in \mathcal{M}_L, E_F(\theta_i \pi_L^i) \equiv \theta_i \pi_L^i \bmod \pi_L^{i+1}$$

и

$$H(\theta) \in \mathcal{M}_L, H(\theta) \equiv \theta_0 \pi_L^{qe_1} \bmod \pi_L^{qe_1+1},$$

где θ_0 – некоторый элемент из $\mathcal{R}$, применяя лемму 6.1 к системе

$$H(\theta), E_F(\theta_i \pi_L^i), 1 \leqslant i < qe_1, \quad q \nmid i,$$

получим

$$\beta = \sum_{F_r}([\pi_0^r]H(\theta_r) +_F \sum_{F_i}[\pi_0^r]E_F(\theta_{i,r}\pi_L^i)) = H(b) +_F \sum_{F_i} E_F(b_i \pi_L^i).$$

6.1.2. Замечание. Учитывая, что примарный элемент $\omega(b)$ отличается от $H(b)$ на элемент, делящийся на изогению $[\pi_0^n]$, можно в каноническом разложении заменить $H(b)$ на $\omega(b)$.

Основываясь на идее, использованной в [8] для классических формальных групп Любина–Тейта, построим еще одну систему образующих, которая потребуется в дальнейшем для вычисления обобщенного символа Гильберта.

Выберем из $\mathcal{F}_\xi$ гомоморфизмы следующего вида:

$$f_0(X) = \pi X + X^q, f_{m,\eta}(X) = \pi X + X^q + \pi\eta X^{p^m},$$

где $\eta \in \mathcal{R}, 1 \leqslant m < f_0, q = p^{f_0}$. Логарифмы соответствующих относительных формальных групп Любина–Тейта обозначим $\lambda_0(X)$ и $\lambda_{m,\eta}(X)$.

Тогда ряды

$$\varepsilon_0(X) = \lambda^{-1}(\lambda_0(X)), \varepsilon_{m,\eta}(X) = \lambda^{-1}(\lambda_{m,\eta}(X)),$$

задающие изоморфизмы из F_0 и $F_{\rho,\eta}$ в F, имеют целые коэффициенты.

6.2. Теорема. *Элементы*

$$\varepsilon_0(\theta\pi_L^i), \varepsilon_{m,\eta}(\theta\pi_L^i),$$

где $\theta, \eta \in \mathcal{R}, 1 \leqslant m < f_0$, *а индекс* i *пробегает все натуральные взаимно простые с* p *значения, меньшие* qe_1, *дают вместе с примарным элементом* $\omega(b)$ *полную систему образующих группы точек.*

Доказательство. Утверждение достаточно проверить для группы F_0. Поскольку

$$\lambda_{m,\eta}^{\Delta} \circ f_{m,\eta} = \pi\lambda_{m,\eta},$$

непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\varepsilon_{m,\eta}(X) \equiv X + uX^{p^m} \bmod \deg(p^m+1), u \equiv \eta \bmod \pi.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_{m,\eta}(X) -_F \varepsilon_0(X) \equiv aX^{p^m} \bmod \deg(p^m+1)$$

и

$$\varepsilon_{m,\eta}(\theta\pi_L^i) -_F \varepsilon_0(\theta\pi_L^i) \equiv \eta\theta^{p^m}\pi_L^{ip^m} \bmod \pi_L^{ip^m+1}.$$

Для доказательство теоремы теперь достаточно применить лемму 6.1.

§7. Универсальный символ $\langle\, ,\, \rangle_F$

Пусть k – локальное поле, $\mathcal{U}$ – полная топологическая абелева группа с хаусдорфовой топологией. Символом на поле k будем называть непрерывное билинейное спаривание

$$c : k^* \times k^* \to \mathcal{U},$$

удовлетворяющее соотношению

$$c(x, 1-x) = 0$$

для любого $x \neq 1$ (см. [8]).

Символ $c : k^* \times k^* \to \mathcal{U}$ называется универсальным, если для любого символа $\widetilde{c} : k^* \times k^* \to \widetilde{\mathcal{U}}$ существует непрерывный гомоморфизм

$$f : \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{U}}$$

такой, что $f \circ c = \widetilde{c}$.

Построим спаривание $\langle\, ,\, \rangle_F$ между мультипликативной группой L^* и группой точек $\mathcal{M}_L$ со значениями в группе корней изогении $[\pi_0^n]$.

Пусть первый аргумент спаривания имеет вид $\alpha = \pi_L^k \theta\varepsilon$, где

$$\theta \in \mathcal{R}, \varepsilon \in U_1,$$

причем $\varepsilon = 1 + a_1\pi_L + a_2\pi_L^2 + \ldots, a_i \in \mathcal{R}$, а U_1 – множество главных единиц. Обозначим

$$\varepsilon(X) = 1 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots, A(X) = X^a \theta\varepsilon(X).$$

Пусть второй аргумент $\beta \in \mathcal{M}_L$ имеет вид $\beta = b_1\pi_L + b_2\pi_L^2 + \ldots$. Обозначим $\beta(X)$ ряд $b_1 X + b_2 X^2 + \ldots$.

Введем функцию

$$l_m(X) = \left(1 - \frac{\delta}{q}\right) \log\varepsilon(X),$$

где $\log(1+X) = \sum\limits_{k\geqslant 1} (-1)^{k-1}\frac{X^k}{k}$. Она определена для любого степенного ряда $\varepsilon(X)$ с коэффициентами из кольца целых абсолютного подполя инерции поля L, который начинается с 1. Введем также функцию

$$l_F(X) = \left(1 - \frac{\delta}{\pi}\right) \lambda(\beta(X)),$$

определенную для любого степенного ряда $\beta(X)$ без свободного члена с коэффициентами из кольца целых поля инерции расширения L/K.

Формула для спаривания такова:

$$< \alpha, \beta >_F = [\mathrm{tr}_{T/k}\, \gamma_{\alpha,\beta}](\zeta),$$

где $\gamma_{\alpha,\beta} = \mathrm{res}\, \Phi_{\alpha,\beta}(X)/s(X)$, а ряд $\Phi_{\alpha,\beta}$ задается в виде

$$\Phi_{\alpha,\beta}(X) = \frac{l_F(\beta)}{A}\frac{dA}{dX} - l_m(\varepsilon)\frac{d}{dX}\big(\frac{\delta}{\pi}\lambda(\beta)\big)$$

(ζ и $s(X)$ те же, что в п. 5).

Таким образом, $\Phi_{\alpha,\beta}(X) \in \mathcal{O}_T\{\{X\}\}$, где

$$\mathcal{O}_T\{\{X\}\} = \left\{\sum_{\mathrm{i}\in\mathbb{Z}} d_i X^i, d_i \in \mathcal{O}_T, \lim_{i\to-\infty} d_i = 0\right\}.$$

Аналогично случаю классических формальных групп Любина–Тейта (см. [4]) доказывается, что для любого нечетного простого p данное спаривание билинейно, инвариантно относительно выбора простого элемента π_L и не зависит от способа разложения элементов в ряды по π_L. Более того, оно является универсальным символом для относительной формальной группы Любина–Тейта при всех $p \neq 2$.

§8. Явная форма обобщенного символа Гильберта

И, наконец, докажем явную формулу обобщенного символа Гильберта для относительных формальных групп Любина–Тейта.

8.1. Теорема. *При всех нечетных простых p для любых $\alpha \in L^*, \beta \in \mathcal{M}_F$ имеет место формула*

$$(\alpha, \beta)_F = [\operatorname{tr}_{T/k} \gamma](\zeta),$$

где

$$\gamma = \operatorname{res}_X \left(\frac{l_F(\beta)}{A} \frac{dA}{dX} - l_m(\varepsilon) \frac{d}{dX} (\frac{\delta}{\pi} \lambda(\beta)) \right) / s(X)$$

(*обозначения здесь совпадают с введенными в пункте 7*).

Доказательство. Проверим, что для образующих базиса из теоремы 6.2 верны формулы

$$(\pi_L, \varepsilon_0(\theta \pi_L^i))_F = 0, \quad (\pi_L, \varepsilon_{m,\eta}(\theta \pi_L^i))_F = 0.$$

Известно, что $(\alpha, \beta)_F = 0$ тогда и только тогда, когда элемент α является нормой в расширении L, полученном делением β на изогению $[\pi_0^n]$. Поскольку $[\pi_0^n]_{m,\eta}$ является унитарным многочленом, для символа Гильберта формальной группы $F_{m,\eta}$ имеет место равенство $(\alpha, \alpha)_{F_{m,\eta}} = 0$ при $\alpha \in \wp_L$. Тогда

$$\varepsilon_{m,\eta}((\alpha, \alpha)_{F_{m,\eta}}) = (\alpha, \varepsilon_{m,\eta}(\alpha))_{F_0} = 0,$$

что и дает нужный результат.

Кроме того, аналогично [8] можно доказать, что

$$\langle \pi_L, \varepsilon_0(\theta \pi_L^i) \rangle_F = 0, \quad \langle \pi_L, \varepsilon_{m,\eta}(\theta \pi_L^i) \rangle_F = 0.$$

Поскольку спаривание $\langle\, , \rangle_F$ не зависит от разложения элементов группы точек в степенные ряды по простому элементу π_L, разложим β по базису из 6.2. Только что доказанные формулы и равенство

$$(\pi_L, \omega(a))_F = \langle \pi_L, \omega(a) \rangle_F = [\operatorname{tr}_{T/k} a](\zeta)$$

дают формулу

$$(\pi_L, \beta)_F = \langle \pi_L, \beta \rangle_F$$

для всех $\beta \in \mathcal{M}_F$.

Теперь проверим, что

$$(\varepsilon, \beta)_F = \langle \varepsilon, \beta \rangle_F,$$

где $\beta \in \mathcal{M}_F$, а первый аргумент является главной единицей. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon,\beta\rangle_{\pi_L} &= \langle\pi_L\varepsilon,\beta\rangle_{\pi_L} -_F \langle\pi_L,\beta\rangle_{\pi_L}\\ &= \langle\pi_L\varepsilon,\beta\rangle_{\pi_L\varepsilon} -_F \langle\pi_L,\beta\rangle_{\pi_L}\\ &= (\pi_L\varepsilon,\beta)_F -_F (\pi_L,\beta)_F = (\varepsilon,\beta)_F,\end{aligned}$$

где индекс в спаривании $\langle\,,\,\rangle$ указывает, при помощи какого элемента оно построено.

И, наконец, для общего случая по свойствам спариваний имеем

$$\begin{aligned}\langle\alpha,\beta\rangle_F &= [k]\langle\pi_L,\beta\rangle_F +_F \langle\varepsilon,\beta\rangle_F\\ &= [k](\pi_L,\beta)_F +_F (\varepsilon,\beta)_F = (\alpha,\beta)_F,\end{aligned}$$

что и доказывает теорему.

8.1.1. Замечание. В частности, из полученного равенства следует, что обобщенный символ Гильберта является универсальным на группе точек относительной формальной группы Любина–Тейта.

Случай $p=2$ для классической формальной группы Любина–Тейта подробно разобран в работах [5] и [7]. Применив результат к относительной формальной группе Любина–Тейта, получаем следующее утверждение.

8.2. Теорема. *Если $p=2$ и K разветвлено над $\mathbb{Q}_p$ (то есть, индекс ветвления не единица), явная формула для обобщенного символа Гильберта имеет тот же вид, что и при нечетном p.*

Если же $p=2$ и K неразветвлено над $\mathbb{Q}_p$, то имеет место формула

$$(\alpha,\beta)_F = [\operatorname{tr}\gamma](\xi),$$

где

$$\gamma = \operatorname{res}_X\left(\frac{l_F(\beta)}{A}\frac{dA}{dX} - l_m(\varepsilon)\frac{d}{dX}\frac{\delta}{\pi}\lambda(\beta)\right)/s(X) + \frac{2}{\pi}\frac{d}{dX}\frac{\delta}{q}\Phi^{(1)}_{\alpha,\beta}(X)$$

и

$$\Phi^{(1)}_{\alpha,\beta}(X) = al_F(\beta) + \frac{1+\delta+\delta^2+\dots}{A^{-1}(\alpha A)}\frac{d\lambda(X)}{dx}.$$

Литература

1. M. Hazewinkel, *Formal groups and applications.* N-Y., Academic press, (1978).
2. J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields.* — Ann. Math. (2), **81**, No. 2 (1985), 380–387.
3. E. de Shalite, *Relative Lubin–Tate groups.* — Proc. Amer. Math. Soc., **95**, No. 1 (1985), 1–4.
4. С. В. Востоков, *Норменное спаривание в формальных модулях.* — Изв. АН СССР, сер. мат., **45**, No. 5 (1981), 985–1014.
5. С. В. Востоков, *Символ Гильберта для формальных групп Любина–Тейта.* I. — Зап. научн. сем. ЛОМИ, **114** (1982), 77-95.
6. С. В. Востоков, О. В. Демченко, *Явная форма спаривания Гильберта для относительных формальных групп Любина–Тейта.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **227** (1995), 41–44.
7. С. В. Востоков, И. Б. Фесенко, *Символ Гильберта для формальных групп Любина–Тейта.* II. — Зап. научн. сем. ЛОМИ, **132** (1983), 85–96.
8. С. В. Востоков, *Символы на формальных группах.* — Изв. АН СССР, сер. мат., **45**, No. 5 (1981), 9–23.
9. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* — Изв. АН СССР, сер. мат., **42**, No. 6 (1978), 1288–1321.
10. К. Ивасава, *Локальная теория полей классов.* Мир, М. (1983).
11. А. И. Мадунц, *О сходимости рядов над локальными полями.* — Труды С.-П. мат. общ., **3** (1994), 283–320.
12. А. И. Мадунц, *Сходимость последовательностей и рядов в многомерных полных полях.* Автореферат дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, С.-П. (1995), 1–14.
13. А. И. Мадунц, *Формальные группы Любина–Тейта над кольцом целых многомерного локального поля.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **281** (2001), 221–226.
14. А. И. Мадунц, Р. П. Востокова, *Формальные модули для обобщенных групп Любина–Тейта.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **435** (2015), 95–112.
15. И. Р. Шафаревич, *Общий закон взаимности.* — Матем. сб., **26(68)**, No. 1 (1950), 113–146.

Madunts A. I. Formal modules for relative Lubin-Tate formal groups.

We study relative Lubin–Tate formal groups: their structure, the ring of endomorphisms and the group of points. We consider the primary elements and derive an explicit formula for the generalized Hilbert symbol.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: madunts@mail.ru

Поступило 20 июля 2016 г.