Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 452, 2016 г.

А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский

ПОЛУЦЕПНЫЕ ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НАД ПОЛЯМИ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ЭЛЕМЕНТОВ

§1. Введение

Пусть G – конечная группа, и пусть F – поле характеристики p, делящей порядок G. В серии работ [1–5, 15] изучалась следующая проблема: описать пары (F, G), такие, что групповое кольцо FG является полуцепным. В частности, в [4] была сформулирована глобальная гипотеза о строении таких пар (см. точную формулировку ниже). Основным компонентом этой гипотезы является описание простых конечных групп с полуцепными групповыми кольцами.

Групповые кольца знакопеременных групп были рассмотрены в [3], а простых спорадических групп и групп Судзуки – в [4]. Например, для простых спорадических групп полуцепность группового кольца FG имеет место, если и только если $G = J_1$ и $p = 3$, либо $G = M_{11}$ и $p = 5$. Далее, проективные специальные линейные группы с полуцепными групповыми кольцами были описаны в [15], а неклассические простые конечные группы лиева типа – в [5].

В настоящей работе мы дадим полный ответ на вопрос о полуцепности в случае, когда G – простая конечная классическая (симплектическая, унитарная или ортогональная) группа над полем нечетной характеристики. В этом случае возникает только один принципиально новый класс групп с полуцепными групповыми кольцами. А именно, мы докажем, что любая классическая простая конечная группа с полуцепным групповым кольцом либо изоморфна проективной специальной линейной группе $\mathrm{PSL}_2(q)$, причем $p \mid q-1$ в большинстве случаев; либо $G = \mathrm{PSU}_3(q^2)$, причем p нечетно и делит $q-1$.

К сожалению, используемый в настоящей работе подход не позволяет включить групповые кольца классических групп, определяемых

Ключевые слова: полуцепное кольцо, групповое кольцо, классические группы.
Авторы благодарны А. Е. Залесскому за полезные замечания, способствовавшие улучшению статьи.
Первый автор поддержан грантом БРФФИ (проект No. Ф15РМ-025) .

над полями с четным числом элементов. Это единственный класс простых конечных групп, для которых вопрос о полуцепности групповых колец пока остается нерешенным.

§2. Основные сведения

Напомним, что модуль M называется **цепным**, если его решетка подмодулей является цепью; и **полуцепным**, если он раскладывается в прямую сумму цепных модулей. Скажем, что кольцо R **полуцепное**, если правый регулярный модуль R_R полуцепной, и то же верно для левого модуля ${}_RR$. Итак, R – полуцепное кольцо, если и только если имеет место разложение единицы $1 = e_1 + \cdots + e_n$ в сумму попарно ортогональных идемпотентов, таких, что все модули e_iR и Re_i являются цепными. Например, любое классически полупростое кольцо полуцепно. Еще один пример полуцепного кольца доставляет локализация $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Пусть G – конечная группа, и пусть F – поле характеристики p. Нас будет интересовать вопрос о том, когда групповое кольцо FG полуцепное. Если p не делит порядок G, то FG – классически полупростое кольцо. Исключая этот "тривиальный" случай, в этой работе мы будем предполагать, что p **делит порядок** G.

Известно несколько ограничений на группу, которые вытекают из полуцепности ее группового кольца. Например, из результата Хигмана [12] следует цикличность (любой) силовской p-подгруппы P группы G.

Из работы Айзенбуда и Гриффита [7] (см. также [1]) вытекает, что полуцепность кольца FG зависит только от характеристики поля F. Например, чтобы упростить вычисления, можно считать F конечным полем, или "достаточно большим" (скажем, алгебраически замкнутым) полем. В последнем случае полуцепность кольца FG эквивалентна тому, что P циклическая, и каждый p-модулярный неприводимый характер группы G может быть поднят до обыкновенного характера единственным образом.

Если G – p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой P, то из результата Мориты [17] (доказанного для алгебраически замкнутого поля) вытекает полуцепность кольца FG. Если G не p-разрешима, но P циклическая, то, как известно, G имеет композиционный ряд $\{e\} \subset O_{p'} \subset K \subset G$. Здесь $O_{p'}$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G, чей порядок взаимно прост с p; K – наименьшая нормальная подгруппа группы G, собственно содержащая $O_{p'}$ (что влечет $P \subseteq K$); и $H = G/K$ – неабелева простая конечная группа.

В работе [4] нами была выдвинута гипотеза, что для не-p-разрешимых групп с циклической силовской p-подгруппой кольцо FG полуцепное, если и только если то же верно для кольца FH. Более того (см. факт 2.4), доказывая эту гипотезу, можно считать, что $G = K$. В частности, это предположение было проверено для групп порядка $\leqslant 2000$ (неопубликовано). Итак, перечисление всех простых конечных групп с полуцепным групповым кольцом является важным шагом в доказательстве этой гипотезы.

Заметим (см. [8, лемма 4.4.12]), что $O_{p'}$ является аннулятором главного блока B_0 группы G, поэтому искомый список простых групп даст описание всех конечных групп, чьи главные блоки полуцепные.

Ниже нам потребуется список групп $\mathrm{SL}_n(q)$ и $\mathrm{PSL}_n(q)$ с полуцепными групповыми кольцами.

Факт 2.1. [15] *Пусть G – одна из групп $\mathrm{PSL}_n(q)$ или $\mathrm{SL}_n(q)$, $n \geqslant 2$. Пусть F – поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда кольцо FG полуцепное, если и только если выполняется одно из следующих условий:*

1) *$n = 2$, $p > 2$ и p делит $q - 1$;*
2) *$n = 2$, $p = q = 2$ или $p = q = 3$;*
3) *$n = 2, 3$, $p = 3$ и $q \equiv 2, 5 \pmod 9$.*

Заметим, что все проективные специальные группы в этом списке, кроме $\mathrm{PSL}_2(2)$ и $\mathrm{PSL}_2(3)$, являются простыми.

Если $p = 2$, то групповое кольцо FG полуцепное, если и только если группа G является 2-нильпотентной (см. [2]). Поэтому, как правило, мы будем предполагать, что p **нечетно**. Следующий простой факт также весьма полезен.

Факт 2.2. [18, предложение 5.1] *Пусть G – простая конечная неабелева группа лиева типа, определяемая над полем Галуа из q элементов и не изоморфная группе $\mathrm{PSL}_2(q)$. Если p делит q, то силовская p-подгруппа группы G не циклическая.*

Итак, в большинстве случаев можно предполагать, что p **не делит** q. Через d будем обозначать порядок q по модулю p. От параметра d зависит описание силовских p-подгрупп конечных классических групп [19, 20]. В таблице 1 представлены порядки силовских p-подгрупп для случая, когда $p > 2$ и p не делит q. При этом $|H|_p$ обозначает порядок силовской p-подгруппы группы H, а $\lfloor k/l \rfloor$ – целая часть дроби k/l.

Еще один полезный критерий полуцепности использует деревья Брауэра. А именно (см. [8, следствие 7.2.22]) кольцо FG полуцепное, если и только если силовская p-подгруппа P циклическая и дерево Брауэра любого p-блока группы G является звездой, чья исключительная вершина (если существует) находится в центре звезды.

Нам понадобится следующий результат Фонга и Сринивасан.

Факт 2.3. [10] *Пусть G – одна из классических групп* $\mathrm{GU}_n(q^2)$, $\mathrm{SO}_{2n+1}(q)$, $\mathrm{CSp}_{2n}(q)$ *или* $\mathrm{CSO}^{\pm}_{2n}(q)$ *для нечетного q. Пусть F – поле нечетной характеристики p, не делящей q. Тогда дерево Брауэра*

Таблица 1. Порядки силовских подгрупп классических групп [19, с. 540]

Группа	Условие на d	Порядок силовской p-подгруппы	Силовский тип
$\mathrm{Sp}_{2m}(q)$	d четно	$\lvert\mathrm{GL}_{2m}(q)\rvert_p$	A
	d нечетно	$\lvert\mathrm{GL}_{m}(q)\rvert_p$	B
$\mathrm{GO}_{2m+1}(q)$	d четно	$\lvert\mathrm{GL}_{2m}(q)\rvert_p$	A
	d нечетно	$\lvert\mathrm{GL}_{m}(q)\rvert_p$	B
$\mathrm{GO}^{+}_{2m}(q)$	d нечетно	$\lvert\mathrm{GL}_{m}(q)\rvert_p$	B
	d четно и $\lfloor d/2m \rfloor$ нечетно	$\lvert\mathrm{GL}_{2m-2}(q)\rvert_p$	A
	в остальных случаях	$\lvert\mathrm{GL}_{2m}(q)\rvert_p$	A
$\mathrm{GO}^{-}_{2m}(q)$	d нечетно	$\lvert\mathrm{GL}_{m-1}(q)\rvert_p$	B
	d четно и $\lfloor d/2m \rfloor$ четно	$\lvert\mathrm{GL}_{2m-2}(q)\rvert_p$	A
	в остальных случаях	$\lvert\mathrm{GL}_{2m}(q)\rvert_p$	A
$\mathrm{GU}_n(q^2)$	$d \equiv 2 \pmod 4$	$\lvert\mathrm{GL}_{n}(q^2)\rvert_p$	B
	в остальных случаях	$\lvert\mathrm{GL}_{\lfloor n/2 \rfloor}(q)\rvert_p$	A

любого p-блока группы G с циклической дефектной подгруппой является отрезком.

Мы покажем, что в большинстве случаев главный блок B_0 группы G содержит по крайней мере $e \geqslant 3$ ребер, откуда будет следовать, что этот блок не является полуцепным кольцом. Здесь $e = e_G$ – индекс централизатора $C_G(P)$ в нормализаторе $N_G(P)$, т.е. нам необходимо оценить нетривиальное действие нормализатора сопряжением на P. Заметим, что если H – подгруппа G, содержащая P, то индекс e_H, вычисленный в H, не превосходит e_G.

Поскольку большинство рассматриваемых здесь групп являются подгруппами полной линейной группы, то индекс e можно оценить, вычисляя соответствующий индекс в линейной группе, где он зависит только от d. Например, группа $G = \mathrm{GL}_d(q)$ содержит копию мультипликативной группы поля $\mathbb{F}^*_{q^d}$, – так называемый **цикл Зингера**. Тогда силовская p-подгруппа P группы G может выбрана как подгруппа этого цикла. Централизатор P в G совпадает со всем циклом, а нормализатор порожден над централизатором элементом y, который действует сопряжением на порождающем α группы P как $\alpha^y = \alpha^d$, следовательно $e = d$.

Заметим также, что силовская p-подгруппа группы $\mathrm{GL}_m(q)$ циклическая и нетривиальная, если и только если $m/2 < d \leqslant m$.

Если кольцо FG полуцепное, то d не может быть слишком малым по отношению к размеру матриц, иначе P не циклическая; и не может быть очень большим, поскольку это влечет $e \geqslant 3$. Эта существенно ограничивает размеры матриц, для которых групповые кольца соответствующих групп могут быть полуцепными; и оставшиеся случаи “маленьких” групп анализируются прямым счетом.

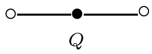
Нашей основной целью являются групповые кольца конечных простых классических групп. Однако при использовании факта 2.3 приходится рассматривать непростые классические группы (например, их конформные варианты). Кроме того, централизаторы и нормализаторы силовских подгрупп проще вычислять для конкретной группы из классического ряда, выбор которой может быть отличен от факта 2.3. Для перехода между различными представителями в одном классическом ряду, мы будем использовать следующий результат Фейта.

Факт 2.4. [8, теорема 6.2.7] *Пусть F – поле характеристики p. Пусть H – нормальная подгруппа группы G, содержащая силовскую*

p-подгруппу P. Тогда кольцо FG – полуцепное, если и только если то же верно для кольца FH.

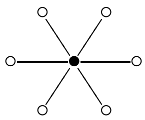
Нам также потребуется локальный вариант этого факта. Напомним (см. [8, с. 196]), что блок B группы G **накрывает** блок B' ее нормальной подгруппы H, если найдутся характеры $\chi \in B$ и $\chi' \in B'$ такие, что χ' является компонентой сужения χ на H. Например, главный блок G всегда накрывает главный блок H.

Пусть (τ, Q) – дерево Брауэра блока B с исключительной вершиной Q. Тогда дерево τ^n получается из τ раскручиванием вокруг Q, которое создает n ветвей (исходное дерево считается одной ветвью). Например, если τ – отрезок



,

то τ^3 – звезда следующего вида:


.

Следуя Фейту [9, с. 43], скажем, что деревья Брауэра блоков B_1 и B_2 **подобны**, если найдется такое дерево (τ, Q), что $\tau(B_1) = \tau^m$ и $\tau(B_2) = \tau^n$ для натуральных чисел m и n.

Лемма 2.1. *Пусть F – поле характеристики p, и пусть G – группа с циклической силовской p-подгруппой P. Пусть H – нормальная подгруппа группы G, чей индекс взаимно прост с p. Предположим, что дерево Брауэра главного блока группы G является отрезком. Тогда и дерево Брауэра главного блока группы H является отрезком.*

Доказательство. Пусть $\tau_0(G)$ – дерево Брауэра главного блока группы G, следовательно, $\tau_0(G)$ – отрезок с e_G ребрами. Поскольку H содержит P, из [9, лемма 4.2] вытекает, что $\tau_0(G)$ подобно дереву Брауэра $\tau_0(H)$ главного блока H, следовательно $\tau_0(G) = \tau^m$ и $\tau_0(H) = \tau^n$ для некоторого дерева τ.

Если e_G нечетно, то τ совпадает с $\tau_0(G)$. Поскольку $e_H \leqslant e_G$, следовательно $\tau_0(H) = \tau$ также является отрезком. Предположим, что $e_G = 2k$ четно. Тогда появляется дополнительная возможность, когда

τ – интервал с k ребрами и исключительной вершиной на конце. Из $e_H \leqslant e_G$ заключаем, что либо $\tau_0(H) = \tau$, либо $\tau_0(H) = \tau_0(G)$, что и дает требуемое. $\square$

Базовые сведения о классических конечных группах можно найти в [14] и [21]. Для полноты изложения мы приведем необходимые определения.

§3. Симплектические группы

Пусть V – векторное пространство конечной размерности n над полем Галуа $\mathbb{F}_q$ с нечетным числом элементов. Билинейная форма $f : V \times V \to V$ называется **кососимметричной**, если равенство $f(u,v) = -f(v,u)$ выполняется для всех $u, v \in V$.

Пусть f – кососимметричная невырожденная форма на V. Такая форма единственна с точностью до выбора базиса пространства V. Кроме того, $n = 2m$ – четное число. Если f задана матрицей W, то $W = -W^t$, где t означает транспонирование.

Симплектическая группа $\mathrm{Sp}_n(q)$ состоит из обратимых матриц A порядка n, которые сохраняют форму f, т.е. $AWA^t = W$. Эта группа имеет следующий порядок:

$$|\,\mathrm{Sp}_n(q)| = q^{m^2} \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^4 - 1) \cdot \ldots \cdot (q^n - 1)\,.$$

Например, можно взять $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда правило $A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{smallmatrix}\right)$ задает вложение $\mathrm{GL}_m(q)$ в $\mathrm{Sp}_{2m}(q)$.

Конформная симплектическая группа $\mathrm{CSp}_n(q)$ состоит из обратимых матриц, которые сохраняют f с точностью до мультипликативного скаляра. Тогда $\mathrm{Sp}_n(q)$ – нормальная подгруппа в $\mathrm{CSp}_n(q)$ индекса $q-1$. Скалярные матрицы $\mathrm{diag}(a, ..., a)$, $a \in \mathbb{F}_q^*$ образуют центр группы $\mathrm{CSp}_n(q)$ порядка $q-1$. Поскольку q нечетно, то пересечение этой подгруппы с $\mathrm{Sp}_n(q)$ совпадает с ее центром $Z = \{\pm I_n\}$.

Фактор-группа $\mathrm{Sp}_n(q)/Z$ называется **проективной симплектической группой** и обозначается $\mathrm{PSp}_n(q)$. Если $n \geqslant 4$, то эта группа проста ($\mathrm{Sp}_4(2)$ исключена из рассмотрения, поскольку q нечетно).

Если $n = 2$, то группа $\mathrm{Sp}_2(q)$ изоморфна группе $\mathrm{SL}_2(q)$, и $\mathrm{PSp}_2(q) \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ [14, с. 43]. Вопрос о полуцепности групповых колец этих групп решается фактом 2.1.

Следующая теорема показывает, что в оставшихся случаях полуцепные кольца не встречаются.

Теорема 3.1. *Пусть G – одна из групп $\mathrm{CSp}_{2m}(q)$, $\mathrm{Sp}_{2m}(q)$, или $\mathrm{PSp}_{2m}(q)$, где $m \geqslant 2$ и q нечетно. Пусть F – поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда кольцо FG не полуцепное.*

Доказательство. Предположим, что силовская p-подгруппа P группы G циклическая (и не единичная). Как было отмечено выше, для $p = 2$ кольцо FG полуцепное, если и только если группа G является 2-нильпотентной. Легко проверить, что ни одна из групп в условии теоремы не 2-нильпотентна. Итак, мы можем предположить, что p **нечетно**. Более того, используя факт 2.2, заключаем, что p **не делит** q.

Пусть d – порядок q по модулю p. Рассмотрим сначала случай, когда $d = 1$, т.е. p делит $q - 1$. Поскольку $m \geqslant 2$, то каждая силовская p-подгруппа группы $\mathrm{GL}_m(q)$ не циклическая. Приведенное выше диагональное вложение показывает, что то же верно для $\mathrm{Sp}_n(q)$, следовательно, для $\mathrm{CSp}_n(q)$ и $\mathrm{PSp}_n(q)$, – противоречие.

Итак, можно считать, что $d \geqslant 2$. Напомним, что аннулятор главного блока любой группы G равен $O_{p'}$. Поскольку p нечетно, то главный блок группы $\mathrm{Sp}_n(q)$ совпадает с главным блоком группы $\mathrm{PSp}_n(q)$. Далее, поскольку p не делит $q - 1$, то главный блок группы $\mathrm{CSp}_n(q)$ аннулируется нормальной подгруппой C_{q-1} скалярных матриц.

Заметим, что фактор-группа $\mathrm{CSp}_n(q)/C_{q-1}$ содержит $\mathrm{Sp}_n(q)/Z = \mathrm{PSp}_n(q)$ как нормальную подгруппу индекса 2. Из факта 2.3 вытекает, что дерево Брауэра главного блока группы $\mathrm{CSp}_n(q)$ является интервалом с e' ребрами. Тогда лемма 2.1 влечет, что дерево Брауэра главного блока групп $\mathrm{Sp}_n(q)$ и $\mathrm{PSp}_n(q)$ – интервал с $e \leqslant e'$ ребрами.

Мы докажем, что индекс $e = |N(P)/C(P)|$, вычисленный в $\mathrm{Sp}_n(q)$, больше 2, откуда вытекает, что групповые кольца групп $\mathrm{Sp}_n(q)$ и $\mathrm{PSp}_n(q)$ не полуцепные. Тогда неравенство $e' \geqslant e > 2$ влечет, что то же верно и для $\mathrm{CSp}_n(q)$.

Порядок и строение P зависят от четности d – см. таблицу 1.

Случай A: d **четно**. В этом случае P может быть выбрана как силовская p-подгруппа объемлющей группы $\mathrm{GL}_n(q)$. Поскольку P – циклическая группа, то получаем, что $m < d \leqslant 2m$. Из $m \geqslant 2$ вытекает $d > 2$, следовательно, $d \geqslant 4$.

При подходящем выборе матрицы W группа $\mathrm{Sp}_d(q) \times \mathrm{Sp}_{n-d}(q)$ вкладывается в $\mathrm{Sp}_n(q)$ как блочная диагональ, следовательно, P может быть выбрана в левом верхнем углу $\mathrm{GL}_d(q)$. Итак, достаточно доказать, что индекс $e_d = |N(P)/C(P)|$, вычисленный в $\mathrm{Sp}_d(q)$, не меньше d.

Пусть α – порождающий силовской p-подгруппы P_d группы $\mathrm{Sp}_d(q)$. Из [19, лемма 4.6] вытекает, что фактор $N(P)/C(P)$ порожден элементом y, действующим на α сопряжением как $\alpha^y = \alpha^d$. Поскольку это действие имеет порядок d, то получаем $e_d \geqslant d \geqslant 4$, что и требовалось.

Случай B: d **нечетно**. Из таблицы 1 заключаем, что в этом случае порядок P такой же, как у силовской p-подгруппы P' группы $\mathrm{GL}_m(q)$, следовательно P является образом P', вложенной в $\mathrm{Sp}_n(q)$ диагонально. Поскольку P' – циклическая, то $m/2 < d \leqslant m$. Так как $d \geqslant 2$ нечетно, то $d \geqslant 3$, поэтому достаточно показать, что $e \geqslant d$.

Как и ранее, можно считать, что $m = d$. Рассмотрим снова элемент $y' \in \mathrm{GL}_d(q)$, действие которого сопряжением на P' задает автоморфизм порядка d. Диагональный образ этого элемента лежит в нормализаторе P и задает автоморфизм порядка d этой подгруппы. □

§4. Унитарные группы

Пусть $^{-}$ – инволюция $\overline{a} = a^q$ поля Галуа $\mathbb{F}_{q^2}$, и пусть V – n-мерное векторное пространство над этим полем. Билинейная форма $f : V \times V \to V$ называется **эрмитовой**, если равенство $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$ выполняется для всех $u, v \in V$. Если f задана матрицей W, то $W = \overline{W}^t$.

Пусть f – невырожденная эрмитова форма на V. Такая форма единственна с точностью до сопряжения обратимой матрицей. **(Общая) унитарная группа** $\mathrm{GU}_n(q^2)$ состоит из матриц $A \in \mathrm{GL}_n(q^2)$ сохраняющих f. В частности, если $W = I_n$, то $\mathrm{GU}_n(q^2)$ состоит из матриц A таких, что $A \cdot \overline{A}^t = I_n$. Порядок этой группы следующий:

$$|\,\mathrm{GU}_n(q^2)| = q^{n(n-1)/2} \cdot (q+1) \cdot (q^2-1) \cdot \dots \cdot (q^n - (-1)^n)\,.$$

Унитарные матрицы с определителем 1 образуют нормальную подгруппу в $\mathrm{GU}_n(q^2)$ индекса $q+1$, которая называется **специальной унитарной группой**, и обозначается $\mathrm{SU}_n(q^2)$. Центр Z этой группы состоит из скалярных матриц и имеет порядок $(n, q+1)$. Фактор-группа $\mathrm{PSU}_n(q^2) = \mathrm{SU}_n(q^2)/Z$ называется **проективной унитарной группой**. Если $n \geqslant 3$, то последняя группа проста (кроме $\mathrm{PSU}_3(4)$, для которой q четно).

Заметим (см. [14, с. 43]), что $\mathrm{SU}_2(q^2) \cong \mathrm{SL}_2(q)$ и $\mathrm{PSU}_2(q^2) \cong \mathrm{PSL}_2(q)$, следовательно, вопрос о полуцепности групповых колец этих групп решает факт 2.1. Итак, можно предположить, что $n \geqslant 3$. В этом случае имеются простые группы с полуцепными групповыми кольцами, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть G – одна из групп $\mathrm{GU}_n(q^2)$, $\mathrm{SU}_n(q^2)$, или $\mathrm{PSU}_n(q^2)$, где $n \geqslant 3$ и q нечетно. Пусть F – поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если $n = 3$ и p – нечетное число, делящее $q - 1$.*

Доказательство. Сначала сделаем общие замечания, которые позволяют переходить между разными унитарными группами.

Если p не делит $q+1$, то индекс группы $\mathrm{SU}_n(q^2)$ в $\mathrm{GU}_n(q^2)$ взаимно прост с p. Из факта 2.4 вытекает, что групповые кольца этих групп полуцепные (или нет) одновременно.

Заметим, что скалярная матрица $\mathrm{diag}(a,\dots,a)$, $a \in \mathbb{F}_{q^2}^*$ принадлежит $\mathrm{GU}_n(q^2)$, если и только если $a^{q+1} = 1$, следовательно, такие матрицы образуют нормальную циклическую подгруппу C_{q+1} порядка $q+1$. Фактор-группа $\mathrm{GU}_n(q^2)/C_{q+1}$ содержит $\mathrm{PSU}_n(q^2)$ как нормальную подгруппу индекса $(n, q+1)$, следовательно, групповые кольца этих групп являются полуцепными одновременно. Далее, главный блок группы $\mathrm{SU}_n(q^2)$ аннулируется центром Z, следовательно, совпадает с главным блоком группы $\mathrm{PSU}_n(q^2)$.

Достаточность. Если $G = \mathrm{SU}_3(q^2)$, и p делит $q-1$, то из [11, теорема 4.1] вытекает, что кольцо FG полуцепное. Согласно замечаниям выше, то же верно для группового кольца группы $\mathrm{GU}_3(q^2)$. Поскольку $\mathrm{PSU}_3(q^2)$ является фактор-группой группы $\mathrm{SU}_3(q^2)$, то ее групповое кольцо также полуцепное.

Необходимость. Предположим, что кольцо FG полуцепное, в частности, P – циклическая группа.

Если $p = 2$ или $p \mid q$, то (как и выше) нетрудно установить, что кольцо FG не полуцепное. Кроме того, если p делит $q-1$ и $n > 3$, то группа P не циклическая, поскольку имеет место вложение $\mathrm{SU}_2(q^2) \times \mathrm{SU}_2(q^2)$ в $\mathrm{SU}_4(q^2)$. Аналогично, P не циклическая, если $n > 2$ и p делит $q+1$ (см. [11]).

Итак, можно предположить, что p – **четное число, не делящее** q **и** $q \pm 1$. Следовательно, если d – порядок q по модулю p, то $d > 2$. Кроме того, $d \leqslant 2n$, поскольку P не единична.

По замечаниям выше достаточно доказать, что главный блок B_0 группы $G = \mathrm{GU}_n(q^2)$ не полуцепной. По факту 2.3 дерево Брауэра этого блока является интервалом с e ребрами, поэтому достаточно показать, что $e > 2$. Рассмотрим все возможные случаи для P из таблицы 1.

Случай B: $d \equiv 2 \pmod 4$. В частности, из $d > 2$ следует $d \geqslant 6$.

В этом случае P может быть выбрана как силовская p-подгруппа объемлющей группы $\mathrm{GL}_n(q^2)$. Заметим, что порядок f числа q^2 по модулю p равен $d/2$. Поскольку P циклическая, то $n/2 < f \leqslant n$, следовательно, $n < d \leqslant 2n$. Например, это так для $G = \mathrm{GU}_3(3)$ и $p = 7 \mid 3^3+1$, т.е. $d = 6$ и $f = 3$.

Используя диагональное включение $\mathrm{GU}_f(q^2)\times\mathrm{GU}_{n-f}(q^2)$ в $\mathrm{GU}_n(q^2)$, выберем силовскую p-подгруппу P в левом верхнем углу $\mathrm{GL}_f(q^2)$. Чтобы установить, что $e \geqslant 3$, достаточно проверить это неравенство для индекса $e_f = |N(P)/C(P)|$ в группе $\mathrm{GL}_f(q^2)$.

Пусть α – порождающий группы P. Согласно [19, леммы 4.6, 5.5], найдется элемент $y \in \mathrm{GL}_f(q^2)$, который действует сопряжением как $\alpha^y = \alpha^q$, следовательно $e_f \geqslant f$. Но тогда $d \geqslant 6$ влечет $f \geqslant 3$, откуда $e_f \geqslant 3$, что и требовалось.

Случай A: $d \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$. Пусть $n = 2m+\varepsilon$, где $\varepsilon = 0, 1$. Из таблицы 1 видно, что порядок P равен порядку силовской p-подгруппы P' группы $\mathrm{GL}_m(q^2)$. Предположим сначала, что $\varepsilon = 0$. Выбирая $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{smallmatrix}\right)$, получим вложение группы $\mathrm{GL}_m(q^2)$ в $\mathrm{GU}_n(q^2)$, которое отображает матрицу A в $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A}^{-t} \end{pmatrix}$. Аналогичное вложение имеет место и для $\varepsilon = 1$, – просто добавим к W дополнительную единицу в правом нижнем углу.

Напомним, что d – порядок q по модулю p, и f – порядок q^2 по тому же модулю. Рассмотрим сначала случай, когда d **нечетно**, следовательно, $f = d > 2$.

Поскольку группа P' циклическая и не единичная, мы заключаем, что $m/2 < f \leqslant m$. Как выше, чтобы оценить e, достаточно вычислить централизатор и нормализатор этой подгруппы в $G = \mathrm{GU}_{2d}(q^2)$. Выберем элемент из $\mathrm{GL}_d(q^2)$, который действует сопряжением на P' как автоморфизм порядка f. Размножая этот элемент по диагонали, выводим $e \geqslant d > 2$, что и требовалось.

Итак, осталось рассмотреть случай, когда d **делится на 4**, в частности $d \geqslant 4$. Тогда $d = 2f$ влечет $f \geqslant 2$. Если $d > 4$, то используем диагональное вложение, чтобы доказать, что $e \geqslant f > 2$.

Итак, мы можем предположить, что $d = 4$ и $f = 2$, т.е. $G = \mathrm{GU}_4(q^2)$ и $p \mid q^2+1$. Из [6, с. 465] (см. также [13, предложение 6]) вытекает, что главный блок B_0 группы G является отрезком с 4 ребрами, что и дает требуемое. А именно характеры в B_0 соответствуют разбиениям (4), $(3,1)$, $(2,2)$, $(2,1^2)$, (1^4) и связаны в следующее дерево:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & q^3(q^2-q+1) & & (q-1)(q+1)^3(q^2-q+1) & & q^6 & & q(q^2-q+1)\\ \circ & \text{———} & \circ & \text{———} & \bullet & \text{———} & \circ & \text{———} & \circ \\ (4) & & (2,1^2) & & (2^2) & & (1^4) & & (3,1)\end{array}$$

Здесь степени характеров легко вычисляются, используя формулы [6, с. 465]. Эти степени сравнимы с $1, -1, -4, -1, 1$ по модулю p. Из [8, теорема 7.2.16] вытекает, что характер (2^2) исключительный. $\square$

§5. Ортогональные группы. Нечетная размерность

Пусть $n = 2m+1$, $m \geqslant 1$, и пусть V – n-мерное векторное пространство над полем Галуа с **нечетным** числом элементов q. **Общая ортогональная группа** $\mathrm{GO}_n(q)$ состоит из обратимых матриц порядка n, которые сохраняют скалярное произведение, заданное некоторой матрицей W. Например, для $W = I_n$ имеем $A \in \mathrm{GO}_n(q)$, если и только если $A \cdot A^t = I_n$. Другой возможностью является $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_m & 0 \\ I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, что дает вложение $\mathrm{GL}_m(q) \to \mathrm{GO}_n(q)$, $A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Группа $\mathrm{GO}_n(q)$ содержит **специальную ортогональную группу** $\mathrm{SO}_n(q)$, состоящую из матриц с определителем 1, как нормальную подгруппу индекса 2. Далее, коммутант этой группы имеет индекс 2 в $\mathrm{SO}_n(q)$, и обозначается $\Omega_n(q)$. Последняя группа имеет следующий порядок:

$$|\Omega_n(q)| = \frac{1}{2} \cdot q^{m^2} \cdot (q^2-1) \cdot (q^4-1) \cdot \ldots \cdot (q^{2m}-1)\,.$$

Если $m \geqslant 2$, то группа $\Omega_n(q)$ проста (группу $\Omega_5(2) \cong S_6$ не рассматриваем). Согласно [14, с. 43], имеют место следующие изоморфизмы: $\Omega_3(q) \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ и $\Omega_5(q) \cong \mathrm{PSp}_4(q)$, поэтому вопрос о полуцепности групповых колец этих групп проясняется фактом 2.1 и теоремой 3.1. Например, групповое кольцо группы $\Omega_5(q)$ (а также $\mathrm{GO}_5(q)$ и $\mathrm{SO}_5(q)$) не является полуцепным.

Итак, исследуя полуцепность групповых колец введенных выше ортогональных групп, можно считать, что $m > 2$, т.е. $n > 5$.

Теорема 5.1. *Пусть G – одна из групп $\Omega_{2m+1}(q), \mathrm{SO}_{2m+1}(q)$, или $\mathrm{GO}_{2m+1}(q)$, где $m \geqslant 3$ и q нечетно. Пусть F – поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда групповое кольцо FG не полуцепное.*

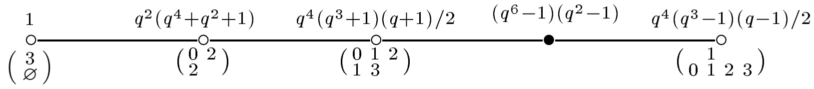
Доказательство. Как обычно, нетрудно исключить возможность $p = 2$, а также случай, когда p делит q. Итак, можно предполагать, что p – **нечетное число, не делящее** q. Мы также предполагаем, что силовская p-подгруппа P циклическая и не единичная. Поскольку все индексы включений рассматриваемых групп равны 2, используя факт 2.4, достаточно доказать, что главный блок B_0 группы $\mathrm{SO}_n(q)$ не полуцепной.

По факту 2.3 дерево Брауэра блока B_0 является отрезком с e' ребрами, где e' – индекс централизатора подгруппы P в ее нормализаторе, вычисленный в $\mathrm{SO}_n(q)$. Итак, достаточно доказать, что $e' > 2$. Далее, поскольку индекс $\mathrm{SO}_n(q)$ в $\mathrm{GO}_n(q)$ равен 2, то достаточно проверить, что соответствующий индекс e, вычисленный в $G = \mathrm{GO}_n(q)$, больше 4.

Пусть d – порядок q по модулю p, следовательно, $1 \leqslant d \leqslant 2m$, поскольку P не единичная. Согласно таблице 1, имеются следующие возможности для P.

Случай A: d четно. Тогда P может быть выбрана как подгруппа объемлющей группы $\mathrm{GL}_{2m}(q)$. Поскольку P циклическая, то получаем $m < d \leqslant 2m$, следовательно, $d > 3$. Используя [19, лемма 4.5], выводим, что $e \geqslant d$. Итак, если $m \geqslant 4$, то неравенство $d \geqslant 6$ влечет $e \geqslant 6$, что и требовалось.

Осталось рассмотреть случай $m = 3$ и $n = 7$, т.е. $G = \mathrm{GO}_7(q)$ и $d = 4$, т.е. p делит q^2+1. Рассуждая как выше, мы получаем $e \geqslant 4$, чего однако не достаточно. Нетрудно показать, что этот индекс равен 4 и в группе $\mathrm{SO}_7(q)$, что даст нужный результат. А именно используя [6, с. 466–467], нетрудно построить дерево Брауэра главного блока этой группы:



Здесь порядок q^2 по модулю p равен 2. Поэтому характеры определяются парой символов ранга 3 с 2-сердцевиной $\binom{\varnothing}{1}$. Например, последняя пара получается из пары $\left(\begin{smallmatrix} & 1 & & \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ следующими операциями на “счетах”:

$$\left(\begin{smallmatrix} & 1 & & \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} \varnothing \\ 1 \end{smallmatrix}\right) .$$

При первом действии мы перебрасывает двойку наверх, заменив ее нулем, а при втором – удаляем 0 и 1 в обоих символах пары и уменьшаем оставшийся символ 3 на 2.

Степени характеров сравнимы с $1, -1, 1, 4, 1$ по модулю p, поэтому (см. [8, теорема 7.2.16]) второй справа характер является исключительным. К сожалению, мы не смогли определить символ этого характера.

Случай B: d **нечетно**. В этом случае (см. таблицу 1) порядок P совпадает с порядком силовской p-подгруппы P' в группе $\mathrm{GL}_m(q)$, следовательно, P является образом P' при диагональном вложении, упомянутом выше.

Поскольку P циклическая, мы заключаем, что $m/2 < d \leqslant m$, следовательно, $d \geqslant 3$. Вычисляя нормализатор P' в $\mathrm{GL}_d(q)$, выводим неравенство $e \geqslant d$. Если $d > 3$, то получаем желаемое, например, это выполняется при $m \geqslant 6$.

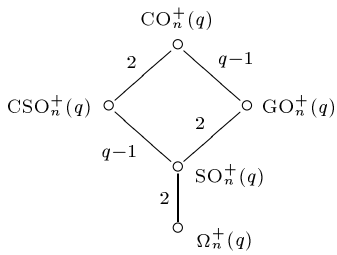
В оставшихся случаях $m = 3, 4, 5$ и $d = 3$ нетрудно явно вычислить деревья Брауэра главного блока. Рассмотрим только случай $m = 3$, т.е. $G = \mathrm{GO}_7(q)$ и $d = 3$, следовательно, $p \mid q^2 + q + 1$, где применим менее прямые рассуждения. А именно из [6, часть 13.8] вытекает, что число e ребер дерева Брауэра главного блока B_0 зависит только от d. Вычисляя в MAGMA для $q = 3$ и $p = 13$, получаем $|C_G(P)| = 52$ и $|N_G(P)| = 312$, следовательно, $e = 6$, что и требовалось. □

§6. Ортогональные группы в четной размерности. Случай +

Пусть $n = 2m$ четно, причем $m \geqslant 1$. Поскольку q нечетно, то **общая ортогональная группа типа** $+$, в обозначениях $\mathrm{GO}_n^+(q)$, может быть определена как группа состоящая из обратимых матриц порядка n, сохраняющих симметричную билинейную форму $\left(\begin{smallmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{smallmatrix}\right)$. **Конформная ортогональная группа** $\mathrm{CO}_n^+(q)$ состоит из обратимых матриц, сохраняющих эту форму с точностью до мультипликативной константы. **Специальная ортогональная группа** $\mathrm{SO}_n^+(q)$ –

подгруппа в $\mathrm{GO}_n^+(q)$, элементы которой имеют единичный определитель.

Согласно [16, с. 13], **конформная специальная ортогональная группа** состоит из матриц $A \in \mathrm{CO}_n^+(q)$ таких, что для мультипликативной константы $\lambda = \lambda(A)$ выполняется равенство $\lambda^m = \det A$. В частности, $\mathrm{CSO}_n^+(q)$ – нормальная подгруппа группы $\mathrm{CO}_n^+(q)$, содержащая $\mathrm{SO}_n^+(q)$. Таким образом, мы имеем следующую цепочку включений нормальных подгрупп группы $\mathrm{CO}_n^+(q)$:



Далее, центр Z группы $\Omega_n^+(q)$ состоит из скалярных матриц и имеет порядок $(4, q^m - 1)/2$, следовательно, равен 1 либо 2. Фактор-группа $\Omega^+(q)/Z$ называется **проективной ортогональной группой** и обозначается $\mathrm{P}\Omega_n^+(q)$. Ее порядок равен

$$|\,\mathrm{P}\Omega_n^+(q)| = \frac{1}{(4,q^m-1)} \cdot q^{m(m-1)/2} \cdot (q^m-1) \cdot \prod_{i=1}^{m-1} (q^{2i}-1)\,.$$

Если $m \geqslant 3$, то все группы $\mathrm{P}\Omega_{2m}^+(q)$ просты.

Заметим (см. [14, с. 43]), что группа $\Omega_2^+(q)$ изоморфна диэдральной группе $D_{2(q-1)}$ порядка $2(q-1)$. Поскольку эта группа разрешима, то нетрудно доказать, что ее групповое кольцо полуцепное, если и только если $p > 2$ и p делит $q - 1$.

Далее, группа $\Omega_4^+(q)$ изоморфна центральному расширению $2.(\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q))$, следовательно, $\mathrm{P}\Omega_4^+(q) \cong 2.(\mathrm{PSL}_2(q) \times \mathrm{PSL}_2(q))$. Полуцепность групповых колец этих групп редуцируется к случаю $\mathrm{SL}_2(q)$ и $\mathrm{PSL}_2(q)$, следовательно, извлекается из факта 2.1.

Наконец, группа $\mathrm{P}\Omega_6^+(q)$ изоморфна $\mathrm{PSL}_4(q)$, следовательно, ее групповое кольцо не полуцепное (по тому же факту). Оставшиеся случаи включены в следующую теорему.

Теорема 6.1. *Пусть G – одна из групп $\mathrm{P\Omega}_{2m}^+(q)$, $\Omega_{2m}^+(q)$, $\mathrm{SO}_{2m}^+(q)$, $\mathrm{GO}_{2m}^+(q)$, $\mathrm{CSO}_{2m}^+(q)$ или $\mathrm{CO}_{2m}^+(q)$, где $m \geqslant 4$ и q нечетно. Пусть F – поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда групповое кольцо FG не полуцепное.*

Доказательство. Как обычно, можно исключить случаи, когда $p = 2$, а также когда p делит q или $q-1$. Итак, мы можем предполагать, что $d \geqslant 2$ и P циклическая и нетривиальная. Последнее влечет неравенство $d \leqslant 2m-2$. По факту 2.4 полуцепность групповых колец для всех групп из условия теоремы эквивалентна.

По факту 2.3 дерево Брауэра главного блока группы $\mathrm{CSO}_n^+(q)$ является отрезком. Кроме того, этот блок совпадает с главным блоком группы $\mathrm{CO}_n^+(q)$. Следовательно, по лемме 2.1 то же верно для главного блока группы $G = \mathrm{GO}_n^+(q)$. Поэтому достаточно показать, что индекс e, вычисленный в этой группе, больше 2. Из таблицы 1 имеем следующие возможности для P.

Случай A: d нечетно. Тогда P может быть выбрана в $\mathrm{GL}_m(q)$. Так как группа P нетривиальная и циклическая, то $m/2 < d \leqslant m$, следовательно, $m \geqslant 4$ влечет $d > 2$. Используя диагональное вложение $A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{smallmatrix}\right)$ из $\mathrm{GL}_m(q)$ в $\mathrm{GO}_n^+(q)$, получаем $e \geqslant d > 2$, что и требовалось.

Случай B: d четно. Неравенство $d \leqslant 2m-2$ влечет, что целая часть дроби $d/2m$ равна нулю, следовательно, P может быть выбрана как подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(q)$. Из цикличности и нетривиальности P вытекает $m < d$. Используя [19, лемма 4.6], получаем $e \geqslant d$. Тогда $d > 4$ влечет $e > 4$, что и требовалось. $\square$

§7. Ортогональные группы в четной размерности. Случай –

Чтобы определить $\mathrm{GO}_n^-(q)$, можно использовать симметрическую билинейную форму с матрицей $W = \begin{pmatrix} 0 & I_{m-1} & 0 & 0 \\ I_{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$, где $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ не является квадратом. Определения остальных групп в этом ряду аналогичны предыдущему параграфу. Кроме того, индексы нормальных подгрупп группы $\mathrm{CO}_n^-(q)$ такие же, как для группы $\mathrm{CO}_n^+(q)$.

Центр Z группы $\Omega_n^-(q)$ состоит из $(4, q^m+1)/2$ элементов. Порядок группы $\mathrm{P\Omega}_n^-(q) = \Omega_n^-(q)/Z$ равен

$$|\,\mathrm{P}\Omega_n^-(q)| = \frac{1}{(4,q^m+1)} \cdot q^{m(m-1)/2} \cdot (q^m+1) \cdot \prod_{i=1}^{m-1} (q^{2i}-1)\,.$$

Согласно [14, с. 43], группа $\Omega_2^-(q)$ изоморфна диэдральной группе $D_{2(q+1)}$, причем групповое кольцо этой группы полуцепное, если и только если $p > 2$ и p делит $q+1$.

Кроме того, группа $\mathrm{P}\Omega_4^-(q)$ изоморфна $\mathrm{PSL}_2(q^2)$, и этот случай покрывается фактом 2.1. Более того, поскольку q^2 не равен $2, 3$, и не может давать остаток 2 или 5 при делении на 9, то полуцепность для $\mathrm{P}\Omega_4^-(q)$ возникает, только если $p > 2$ делит q^2-1.

Наконец, групповое кольцо группы $\mathrm{P}\Omega_6^-(q) \cong \mathrm{PSU}_4(q)$ не полуцепное по теореме 4.1.

Оставшиеся случаи включены в следующую теорему.

Теорема 7.1. *Пусть G – одна из групп $\mathrm{P}\Omega_{2m}^-(q)$, $\Omega_{2m}^-(q)$, $\mathrm{SO}_{2m}^-(q)$, $\mathrm{GO}_{2m}^-(q)$, $\mathrm{CSO}_{2m}^-(q)$ или $\mathrm{CO}_{2m}^-(q)$, где $m \geqslant 4$ и q нечетно. Пусть F – поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда групповое кольцо FG не полуцепное.*

Доказательство. Как обычно, можно предполагать, что $p > 2$, p не делит q и $q-1$, и что подгруппа P циклическая и не единичная.

По факту 2.3 дерево Брауэра главного блока группы $\mathrm{CSO}_n^-(q)$ является отрезком, и по лемме 2.1 то же верно для группы $\mathrm{GO}_n^-(q)$. Итак, достаточно проверить, что индекс e, вычисленный в последней группе, больше 2.

Пусть d – порядок q по модулю p. Из условий на P получаем $2 \leqslant d \leqslant 2m$. Рассмотрим различные возможности для P из таблицы 1.

Случай B: d нечетно. Тогда P может быть выбрана как подгруппа в $\mathrm{GL}_{m-1}(q)$. Поскольку P циклическая, то $(m-1)/2 < d$ влечет $d \geqslant 3$. Применяя [19, лемма 4.6], получим $e \geqslant d \geqslant 3$, что и требовалось.

Случай A: d четно. Этот случай распадается на два подслучая.

Если целая часть дроби $d/2m$ нечетна, то из $d \leqslant 2m$ вытекает равенство $d = 2m$. Из таблицы 1 видно, что P может быть выбрана как подгруппа группы $\mathrm{GL}_{2m}(q)$. Поскольку P циклическая, то $m < d$ влечет $d \geqslant 5$. Используя [19, лемма 4.6], заключаем, что $e \geqslant d \geqslant 5$, что и требовалось.

Иначе целая часть дроби $d/2m$ равна нулю, следовательно, P может быть выбрана как подгруппа в $\mathrm{GL}_{n-2}(q)$. Поскольку P циклическая, то $m-1<d$ влечет $d\geqslant 4$. Применяя [19, лемма 4.6], получаем $e\geqslant d\geqslant 4$. □

Литература

1. Ю. В. Волков, А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепность группового кольца конечной группы зависит только от характеристики поля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 57–66.
2. А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепные групповые кольца конечных групп. p-нильпотентность.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **413** (2013), 134–152.
3. А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепность групповых колец знакопеременных и симметрических групп.* — Вестник БГУ, сер. матем.-информ. **2** (2014), 61–64.
4. А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепные групповые кольца конечных групп. Спорадические простые группы и группы Судзуки.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **435** (2015), 73–94.
5. А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепные групповые кольца простых конечных групп лиева типа.* — Фундам. прикл. матем. (в печати)
6. R. W. Carter, *Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters*, John Wiley and Sons, 1985.
7. D. Eisenbud, P. Griffith, *Serial rings.* — J. Algebra **17** (1971), 389–400.
8. W. Feit, *The Representation Theory of Finite Groups*, North-Holland Mathematical Library, Vol. **25**, 1982.
9. W. Feit, *Possible Brauer trees.* — Illinois J. Math. **28** (1984), 43–56.
10. P. Fong, B. Srinivasan, *Brauer trees in classical groups.* — J. Algebra **131** (1990), 179–225.
11. M. Geck, *Irreducible Brauer characters of the 3-dimensional unitary group in nondefining characteristic.* — Comm. Algebra **18(2)** (1990), 563–584.
12. D.G. Higman, *Indecomposable representations at characteristic p.* — Duke Math. J. **21** (1954), 377–381.
13. G. Hiss, G. Malle, *Low-dimensional representations of special unitary groups.* — J. Algebra **236** (2001), 745–767.
14. P. Kleidman, M. Liebeck, *The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups*, London Math. Soc. Lect. Note Series, Vol. **129**, 1990.
15. A. Kukharev, G. Puninski, *Serial group rings of finite groups. General linear and close groups.* — Algebra Discrete Math. **20(1)** (2015), 259–269.
16. M. Livesey, *On Rouquier blocks for finite classical groups at linear primes.* — `ArXiv, 1210.2225v1`.
17. K. Morita, *On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals.* — Sci. Repts. Tokyo Daigaku **4** (1951), 177–194.
18. M. Sawabe, A. Watanabe, *On the principal blocks of finite groups with abelian Sylow p-subgroups.* — J. Algebra **237** (2001), 719–734.
19. M. Stather, *Constructive Sylow theorems for the classical groups.* — J. Algebra **316** (2007), 536–559.
20. A. J. Weir, *Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fileds of characteristic prime to p.* — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 529–533.

21. R.A. Wilson, *The Finite Simple Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **251**, Springer, 2009.

Kukharev A. V., Puninski G. E. Serial group rings of classical groups defined over fields with odd number of elements.

We will make a list of simple finite classical groups defined over fields of odd characteristic, whose group rings over a given field are serial.

Математический факультет
Витебского государственного университета
им. П. М. Машерова,
Московский пр-т 33,
Витебск 210038, Беларусь
E-mail: kukharev.av@mail.ru

Поступило 17 октября 2016 г.

Механико–математический факультет
Белорусского государственного университета,
пр-т Независимости 4,
Минск 220030, Беларусь
E-mail: punins@mail.ru