Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 452, 2016 г.

Д. Д. Киселев, И. А. Чубаров

ОБ УЛЬТРАРАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МИНИМАЛЬНЫХ НЕПОЛУПРЯМЫХ p-РАСШИРЕНИЙ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ЯДРОМ ДЛЯ $p > 2$

§1. Введение

1.1. Задача погружения, связанная с точной последовательностью конечных групп,

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} F = \mathrm{Gal}(K/k) \longrightarrow 1,$$

состоит в том, чтобы построить k-алгебру Галуа L с группой G, содержащую поле K, таким образом, чтобы эпиморфизм ограничения автоморфизмов L на K совпадал бы с φ. В работах [1, 2] было введено понятие *ультраразрешимой задачи погружения.* Именно, задача погружения $(K/k,\, G,\, \varphi)$ ультраразрешима, если она разрешима, причем все ее решения являются полями. Хорошо известно простейшее достаточное условие ультраразрешимости, состоящее в том, что ядро разрешимой задачи погружения лежит в группе Фраттини накрывающей группы (см. [3, гл. 1, §6, следствие 5]). В [1, 2] построены бесконечные серии примеров ультраразрешимых задач погружения, свободных от условия на группу Фраттини. В связи с [1, 2] А. В. Яковлевым была поставлена проблема *теоретико-групповой ультраразрешимости* (см. [4, проблема 1]): найти необходимые и достаточные условия, при которых для данного группового расширения с абелевым ядром существует реализация факторгруппы в виде группы Галуа числовых полей, такая, что соответствующая задача погружения ультраразрешима.

В настоящей работе мы продолжаем исследования по проблеме А. В. Яковлева ультраразрешимости групповых расширений. Напомним, что в [4, теорема 1] данная проблема была решена для случая произвольных p-расширений нечетного порядка с циклическим ядром и абелевой факторгруппой. Теорема 1 настоящей работы дополняет

Ключевые слова: ультраразрешимость, задача погружения, минимальные расширения.

результат [4, теорема 1]: именно, мы устанавливаем, что любое минимальное неполупрямое (см. п. 1.2) p-расширение с циклическим ядром при $p > 2$ ультраразрешимо, если факторгруппа имеет две образующие.

1.2. Все рассматриваемые группы, если специально не оговорено противное, являются конечными. Символ p всюду в работе обозначает нечетное простое число. Символом $d(F)$ будем обозначать минимальное число образующих p-группы F. Если x, y – элементы некоторой группы, то $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$; символ x^y обозначает $y^{-1}xy$. Пусть A – циклическая p-группа порядка p^n, а F – некоторая p-группа. Группу A можно наделить структурой F-модуля, задав гомоморфизм $\gamma\colon F \to \operatorname{Aut} A$. Пусть группа $\operatorname{Im}\gamma$ нетривиальна; в этом случае она является циклической с порождающим элементом $\gamma(f)$, который без ограничения общности действует на порождающий элемент a группы A следующим образом: $a^{\gamma(f)} = a^{1+p^i}$. В этом случае любой элемент группы $H^2(F, A)$ задает групповое расширение, которое мы будем называть *расширением типа* i.

Рассмотрим групповое расширение

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\ \varphi\ } F \longrightarrow 1. \qquad (1)$$

Пусть в (1) фиксирована собственная подгруппа $F_1 < F$, а G_1 – ее полный прообраз в G относительно эпиморфизма φ. Расширение F_1 до G_1 с помощью $A = \ker\varphi$, полученное таким образом, называется сопутствующим расширением второго рода. Пусть теперь в расширении (1) фиксирована собственная подгруппа A_1 ядра A, нормальная в G. В таком случае эпиморфизм φ индуцирует эпиморфизм $\widehat{\varphi}\colon G/A_1 \to F$ с ядром A/A_1. Полученное расширение называется сопутствующим расширением первого рода. В дальнейшем под сопутствующим расширением мы будем понимать как сопутствующие расширения первого и второго родов, так и расширения, получающиеся как композиция: сначала переход к сопутствующему расширению второго рода, а потом переход от полученного расширения к сопутствующему расширению первого рода.

Расширение (1) будем называть *минимальным*, если (1) не является полупрямым, а все сопутствующие расширения полупрямые.

§2. Случай $d(F)=2$

2.1. Рассмотрим центральное минимальное p-расширение (1) с циклическим ядром A и факторгруппой F, у которой $d(F)=2$. Согласно [5, лемма] расширение (1) получается подъемом с расширения элементарной абелевой группы $F_0=\langle b_0, c_0\rangle$ ранга 2 до G_0 с помощью $A=\langle a\rangle$, где группа G_0 может быть задана копредставлением

$$G_0=\langle a,\, b,\, c \mid a^{p^n}=1,\, b^p=c^p=1,\ a^b=a^c=a,\, [b,\, c]=a^{p^{n-1}}\rangle. \qquad (2)$$

Зададим эпиморфизм $\varphi_0\colon G_0\to F_0$ следующим образом: $\varphi_0(a)=1$, $\varphi_0(b)=b_0$, а $\varphi_0(c)=c_0$.

Лемма 1. *Существует расширение Галуа локальных полей K_0/k с группой F_0, такое, что задача $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ ультраразрешима.*

Доказательство. Пусть k – локальное поле, содержащее $\varepsilon_{p^{n-1}}$, но не содержащее ε_{p^n}. Мы вправе считать $n\geqslant 2$, так как иначе A лежит в $\Phi(G)$, а тогда результат следует из [3, гл. 1, §6, следствие 5]. Определим расширение Галуа K_0/k с группой F_0 следующим образом: $K_0=k(\sqrt[p]{m_1})\otimes_k k(\sqrt[p]{m_2})$, где элементы $m_1, m_2\in k^*\setminus k^{*p}$ выбраны так, чтобы K_0 было полем. Положим

$$\sqrt[p]{m_1}^{\,b_0}=\varepsilon_p\sqrt[p]{m_1},\ \sqrt[p]{m_2}^{\,b_0}=\sqrt[p]{m_2};\qquad \sqrt[p]{m_1}^{\,c_0}=\sqrt[p]{m_1},\ \sqrt[p]{m_2}^{\,c_0}=\varepsilon_p\sqrt[p]{m_2}.$$

Потребуем, чтобы $\varepsilon_{p^n}\notin K_0$, и найдем дополнительные условия на параметры m_1, m_2, обеспечивающие ультраразрешимость задачи $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$. Данная задача не является брауэровской, ибо $\varepsilon_{p^n}\notin k$, а все элементарные сопутствующие брауэровские задачи являются полупрямыми, а потому разрешимы. Таким образом, применим результат [3, гл. 3, §14, теорема 3.14.1], по которому задача $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ разрешима. Согласно [2, теорема 1] достаточно показать неразрешимость всех максимальных присоединенных задач.

Произвольная максимальная подгруппа группы G, не содержащая A, имеет вид $H_{m,\,s}=\langle d,\, ba^m,\, ca^s\rangle$, где $d=a^p$, числа m, s являются целыми неотрицательными, причем при $m>0$ имеем $(m,\, p)=1$, а также при $s>0$ имеем $(s,\, p)=1$. Заметим, что задача $(K_0/k,\, H_{m,\,s},\, \varphi_0)$ является брауэровской, а потому ее условие разрешимости состоит в распадении алгебры $(H_{m,\,s}\times K_0)e_\chi$, где e_χ – идемпотент групповой алгебры $K_0\langle d\rangle$, отвечающий порождающему элементу χ группы характеров $\mathrm{Hom}(\langle d\rangle,\, K_0^*)$. В алгебре $(H_{m,\,s}\times K_0)e_\chi$ есть коммутирующие подалгебры $\Lambda_1=\langle ba^m e_\chi,\ \sqrt[p]{m_1}e_\chi\rangle_k$ и $\Lambda_2=\langle ca^s\sqrt[p]{m_1}e_\chi,\ \sqrt[p]{m_2}e_\chi\rangle_k$, порождающие $(H_{m,\,s}\times K_0)e_\chi$. Более того, $\Lambda_1\cong k[\varepsilon^m_{p^{n-1}},\,m_1]$, а $\Lambda_2\cong k[\varepsilon^s_{p^{n-1}}m_1,\,m_2]$. Таким образом, алгебра $(H_{m,\,s}\times K_0)e_\chi$ эквивалентна в группе Брауэра $B(k)$ алгебре $k[m_1,\,m_2]\otimes_k k[\varepsilon^m_{p^{n-1}},\,m_1]\otimes_k k[\varepsilon^s_{p^{n-1}},\,m_2]$. Потребуем от параметров m_1, m_2 выполнения следующих условий

$$\begin{aligned} k[m_1,\,m_2]\ncong \mathrm{Mat}(p,\,k),\ & k[\varepsilon_{p^{n-1}},\,m_1]\\ &\cong k[\varepsilon_{p^{n-1}},\,m_2]\cong \mathrm{Mat}(p,\,k),\ \varepsilon_{p^n}\notin K_0, \end{aligned}\tag{3}$$

обеспечивающих неразрешимость всех рассматриваемых присоединенных задач.

Нетрудно показать, что элементы m_1, m_2 с условиями (3) найдутся, используя хорошо известный факт о том, что символ Гильберта p-й степени задает в векторном пространстве k^*/k^{*p} над полем $\mathbb{F}_p$ размерности $r=(k:\mathbb{Q}_p)+2$ невырожденную кососимметрическую форму, допускающую приведение к каноническому виду в базисе С. П. Демушкина (см. [3, гл. 4, §1, 4°]). В самом деле, векторное пространство обладает базисом $\{a_j\}_{j=1}^r$, где $a_1=\varepsilon_{p^{n-1}}$, причем

$$(a_1,\,a_2)=(a_3,\,a_4)=\ldots=(a_{r-1},\,a_r)=\varepsilon_p;$$
$$(a_2,\,a_1)=(a_4,\,a_3)=\ldots=(a_r,\,a_{r-1})=\varepsilon_p^{-1},$$

а на остальных парах базисных элементов символ Гильберта p-й степени тривиален. Но тогда можно в качестве m_1 взять a_3, а в качестве m_2 взять a_4 (а точнее – некоторые прообразы элементов a_3, a_4 в k^*). При таком выборе параметров m_1, m_2 имеем, разумеется, $\varepsilon_{p^n}\notin K_0$, ибо элементы a_1, a_3, a_4 порождают в k^*/k^{*p} подпространство размерности 3. □

Как уже отмечалось, центральное расширение (1), задаваемое классом $h\in H^2(F,\,A)$, получается подъемом класса $h_0\in H^2(F_0,\,A)$, задающего группу G_0 в (2). Покажем, что построенное расширение K_0/k погружается в некоторое поле K с группой F, причем задача $(K/k,\,G,\,\varphi)$ ультраразрешима. Сначала установим, что расширение K_0/k можно погрузить в поле K с группой F. Поскольку $d(F)=d(F_0)=2$, то, согласно результату Б. Б. Лурье [3, гл. 4, §1, теорема 4.1.2], а также в силу [3, гл. 3, §14, теорема 3.14.1] достаточно показать разрешимость всех элементарных сопутствующих брауэровских задач, отвечающих F-операторным характерам группы A. Любая такая задача – это задача вида $(K_0/k,\,\widetilde{F},\,\Psi)$, для которой

$$\widetilde{F}=\langle\widetilde{a},\,\widetilde{b},\,\widetilde{c}\mid \widetilde{a}^{p^j}=1,\,\widetilde{b}^p=\widetilde{a}^u,\,\widetilde{c}^p=\widetilde{a}^v,\,[\widetilde{b},\,\widetilde{c}]=\widetilde{a}^{wp^{j-1}},\,\widetilde{a}^{\widetilde{b}}=\widetilde{a}^{\widetilde{c}}=\widetilde{a}\rangle,\tag{4}$$

где $j < n$, ибо по построению $\varepsilon_{p^n} \notin K_0$; параметры u, v, w – целые неотрицательные числа с условием взаимной простоты с p в случае положительности; эпиморфизм Ψ переводит $\widetilde{a}$ в единицу, $\widetilde{b}$ в b_0, а $\widetilde{c}$ в c_0. Соотношение на коммутатор $[\widetilde{b}, \widetilde{c}]$ получается из того, что $1 = [\widetilde{b}, \widetilde{c}^p] = [\widetilde{b}, \widetilde{c}]^p$ (мы воспользовались условиями $\widetilde{a}^{\widetilde{b}} = \widetilde{a}^{\widetilde{c}} = \widetilde{a}$ и тем фактом, что $(w, p) = 1$ при $w > 0$). Покажем, что в (4) обязательно $w = 0$. В самом деле, заменим в копредставлении (2) a на $\widehat{a} = a^w$, b на $\widehat{b} = b\widehat{a}^{up^{n-j-1}}$, c на $c\widehat{a}^{vp^{n-j-1}}$ (такие замены корректны, ибо у нас $j < n$). Таким образом, группа G_0 в новых образующих будет задаваться копредставлением вида

$$
\begin{aligned}
G_0 = \langle \widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c} \mid \widehat{a}^{p^n} = 1, \quad \widehat{b}^p = \widehat{a}^{up^{n-j}}, \quad \widehat{c}^p = \widehat{a}^{vp^{n-j}}, \\
[\widehat{b}, \widehat{c}] = \widehat{a}^{wp^{n-1}}, \quad \widehat{a}^{\widehat{b}} = \widehat{a}^{\widehat{c}} = \widehat{a} \rangle.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Существует гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условием коммутативности диаграммы

$$
\begin{array}{ccc}
\widetilde{F} & = & \widetilde{F} \\
{\scriptstyle \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\
G_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & F_0.
\end{array} \tag{6}
$$

В самом деле, положим $\mu(\widetilde{a}) = \widehat{a}^{p^{n-j}}$, $\mu(\widetilde{b}) = \widehat{b}$, $\mu(\widetilde{c}) = \widehat{c}$. Но тогда класс $h_0 \in H^2(F_0, A)$, задающий (2), становится тривиальным при подъеме в группу $H^2(\widetilde{F}, A)$. Поскольку $\widetilde{F}$ – гомоморфный образ F, то класс h_0 становится тривиальным при подъеме в группу $H^2(F, A)$. Но при таком подъеме класс h_0 переходит в класс h, задающий неполупрямое расширение (1). Противоречие. Итак, в (4) $w = 0$. Заметим далее, что все рассматриваемые задачи $(K_0/k, \widetilde{F}, \Psi)$ будут разрешимы, если будет разрешимы задачи при $u = 1, v = 0$ и при $u = 0, v = 1$. При $u = 1$, $v = 0$ задача $(K_0/k, \widetilde{F}, \Psi)$ допускает спуск по подгруппе $\langle \widetilde{c} \rangle$ к задаче погружения расширения $k(\sqrt[p]{m_1})/k$ в поле с группой $\langle \widetilde{b} \rangle$. Условия разрешимости такой задачи состоят в тривиальности символа Гильберта p-й степени (ε_{p^j}, m_1). Поскольку $j < n$, то с учетом (3) имеем $(\varepsilon_{p^j}, m_1) = 1$ для всех $j < n$. При $u = 0$, $v = 1$ задача $(K_0/k, \widetilde{F}, \Psi)$ допускает спуск по подгруппе $\langle \widetilde{b} \rangle$ к задаче погружения расширения $k(\sqrt[p]{m_2})/k$ в поле с группой $\langle \widetilde{c} \rangle$. Условия разрешимости такой задачи состоят в тривиальности символа Гильберта p^j-й степени (ε_{p^j}, m_2). Поскольку $j < n$, то с учетом (3) имеем $(\varepsilon_{p^j}, m_2) = 1$ для всех $j < n$.

Итак, мы показали, что построенное расширение K_0/k погружается в поле K с группой F. Задача $(K/k,\, G,\, \varphi)$ при этом разрешима, так как получена подъемом с разрешимой задачи $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$. Покажем, что задача $(K/k,\, G,\, \varphi)$ ультраразрешима.

Рассмотрим коммутативную диаграмму[1]

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\widehat{F},\, A/\Phi(A)) & \xrightarrow{\varkappa} & H^2(\widehat{F},\, \Phi(A)) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\widehat{F},\, A) \\ \beta\Big\uparrow & & \lambda\Big\uparrow & & \mu\Big\uparrow \\ H^1(F,\, A/\Phi(A)) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(F,\, \Phi(A)) & \xrightarrow{\gamma} & H^2(F,\, A) \\ \beta_0\Big\uparrow & & \lambda_0\Big\uparrow & & \mu_0\Big\uparrow \\ H^1(F_0,\, A/\Phi(A)) & \xrightarrow{\alpha_0} & H^2(F_0,\, \Phi(A)) & \xrightarrow{\gamma_0} & H^2(F_0,\, A), \end{array} \tag{7}$$

где строки – фрагмент длинной точной последовательности когомологий, а вертикальные стрелки – гомоморфизмы подъема, индуцированные погружением расширения K_0/k с группой F_0 в расширение K/k с группой F и в алгебраическое замыкание поля k с группой $\widehat{F}$. Расширение K_0/k было выбрано так, что подъем ядра $\ker\gamma_0$ в группу $H^2(\widehat{F},\, \Phi(A))$ посредством $\lambda\lambda_0$ тривиален. Гомоморфизм β_0 является мономорфизмом, ибо

$$H^1(F,\, A/\Phi(A)) = \mathrm{Hom}(F,\, A/\Phi(A)),$$
$$H^1(F_0,\, A/\Phi(A)) = \mathrm{Hom}(F_0,\, A/\Phi(A)),$$

а потому любое $\nu \in \mathrm{Hom}(F_0,\, A/\Phi(A))$, такое что $\beta_0(\nu) = 1$, является тривиальным. Поэтому β_0 – изоморфизм, так как $d(F) = d(F_0)$.

Покажем, что ядро $\ker\gamma$ становится тривиальным при подъеме в группу $H^2(\widehat{F},\, \Phi(A))$. Пусть $x \in \ker\gamma$. Из точности строк диаграммы (7) следует, что существует элемент $y \in H^1(F,\, A/\Phi(A))$ такой, что $\alpha(y) = x$. Но поскольку β_0 – изоморфизм, то $y = \beta_0(y_0)$. Тогда из коммутативности диаграммы (7) имеем: $x = \lambda_0(\alpha_0(y_0))$. Таким образом, любой элемент ядра $\ker\gamma$ получается подъемом некоторого элемента ядра $\ker\gamma_0$. Но из ультраразрешимости (см. лемму 1) задачи $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ вытекает, что подъем ядра $\ker\gamma_0$ в группу $H^2(\widehat{F},\, \Phi(A))$ тривиален. А значит, и $\lambda(x) = 1$.

[1] Для дальнейшего важно отметить, что мы используем лишь равенство $d(F_0) = d(F)$; тривиальность F-модуля A никак не используется. Факт о том, что $d(F) = 2$, также никак не используется.

Заметим, что все максимальные присоединенные задачи к задаче $(K/k,\, G,\, \varphi)$ находятся в биективном соответствии с элементами ядра $\ker\gamma$ диаграммы (7). Поскольку ядро $\ker\gamma$ при подъеме в группу $H^2(\widehat{F},\, \Phi(A))$ становится тривиальным, а подъем класса, отвечающего максимальной присоединенной задаче $(K_0/k,\, H_{0,0},\, \varphi_0)$ из леммы 1, в группу $H^2(F,\, \Phi(A))$ задает неразрешимую задачу, то все максимальные присоединенные задачи к $(K/k,\, G,\, \varphi)$ неразрешимы, что в силу [2, теорема 1] влечет ультраразрешимость задачи $(K/k,\, G,\, \varphi)$.

Лемма 2. *Пусть* (1) – *минимальное центральное p-расширение, такое что $d(F) = 2$. Тогда* (1) *ультраразрешимо.*

Доказательство. Результат при $n \geqslant 2$ следует из леммы 1, изложенных выше соображений и из [6, теорема 1]. При $n = 1$ результат тривиален в силу [3, гл. 1, §6, следствие 5]. □

2.2. Рассмотрим p-расширение (1) типа $n - 1$.

Лемма 3. *Пусть* (1) – *минимальное p-расширение типа $n-1$, такое, что $d(F) = 2$. Тогда* (1) *ультраразрешимо.*

Доказательство. Согласно результату [5, лемма] расширение (1) является подъемом с расширения элементарной абелевой группы $F_0 = \langle b_0,\, c_0\rangle$ ранга 2 до G_0 с помощью $A = \langle a\rangle$, где группа G_0 может быть задана копредставлением

$$G_0 = \langle a,\, b,\, c \mid a^{p^n} = 1,\ b^p = a^{up^{n-1}},\ c^p = a^{vp^{n-1}},\\ [b,\, c] = a^{wp^{n-1}}\ a^b = a^{1+p^{n-1}},\ a^c = a\rangle, \tag{8}$$

где числа u, v, w – целые неотрицательные, взаимно простые с p в случае положительности. Зададим эпиморфизм $\varphi_0\colon G_0 \to F_0$ следующим образом: $\varphi_0(a) = 1$, $\varphi_0(b) = b_0$, а $\varphi_0(c) = c_0$. Мы вправе считать, что $n \geqslant 2$, так как иначе $A \leqslant \Phi(G)$, а тогда требуемый результат получается из [3, гл. 1, §6, следствие 5].

Прежде всего упростим копредставление (8). Именно, пусть $\widehat{b} = ba^{-up^{n-2}}$, тогда непосредственный подсчет показывает, что $\widehat{b}^p = 1$. Далее,

$$[\widehat{b},\, c] = a^{up^{n-2}}b^{-1}c^{-1}ba^{-up^{n-2}}c = [b,\, c],$$

ибо $a^c = a$. Поэтому можно считать в (8) $u = 0$. Пусть теперь $\widehat{c} = ca^{-vp^{n-2}}$, тогда $\widehat{c}^p = 1$. С другой стороны, при $n > 2$

$$[b,\, \widehat{c}] = b^{-1}a^{vp^{n-2}}c^{-1}bca^{-vp^{n-2}} = [b,\, c]a^{vp^{n-2+n-1}} = [b,\, c],$$

а при $n=2$ получим $[b,\widehat{c}]=a^{(v+w)p^{n-1}}$. В любом случае в (8) можно считать $u=v=0$, а w взаимно простым с p. Наконец, заменив a на $\widehat{a}=a^w$, можно положить $w=1$.

Пусть k – локальное поле, содержащее $\varepsilon_{p^{n-1}}$, но не содержащее ε_{p^n}. Определим расширение Галуа K_0/k с группой F_0: $K_0=k(\sqrt[p]{m_1})\otimes_k k(\sqrt[p]{m_2})$, где элементы $m_1,\,m_2\in k^*\setminus k^{*p}$ выбраны так, что K_0 – поле. Положим

$$\sqrt[p]{m_1}^{\,b_0}=\varepsilon_p\sqrt[p]{m_1},\ \sqrt[p]{m_2}^{\,b_0}=\sqrt[p]{m_2};\quad \sqrt[p]{m_1}^{\,c_0}=\sqrt[p]{m_1},\ \sqrt[p]{m_2}^{\,c_0}=\varepsilon_p\sqrt[p]{m_2}.$$

Потребуем, чтобы $\varepsilon_{p^n}\notin K_0$. В этом случае задача $(K_0/k,\,G_0,\,\varphi_0)$ не является брауэровской, а потому в силу [3, гл. 3, §14, теорема 3.14.1] для разрешимости указанной задачи необходима и достаточна разрешимость всех элементарных сопутствующих брауэровских задач. Но все такие задачи являются полупрямыми, а потому разрешимы. Заметим, что любая максимальная присоединенная задача $(K_0/k,\,H_0,\,\varphi_0)$ является брауэровской, причем H_0 – центральное расширение F_0 с помощью $\Phi(A)$. Поэтому при $H_0=\langle a^p,\,b,\,c\rangle$ применимы рассуждения леммы 1, по которой, условием *неразрешимости* задачи $(K_0/k,\,H_0,\,\varphi_0)$ будет $(m_1,\,m_2)\neq 1$, где скобка $(\cdot,\,\cdot)$ – символ Гильберта p-й степени. Исследуем поведение ядра $\ker\gamma_0$ гомоморфизма $\gamma_0\colon H^2(F_0,\,\Phi(A))\to H^2(F_0,\,A)$ из диаграммы (7). Ясно, что $\ker\gamma_0$ – элементарная абелева группа, ибо $\ker\gamma_0=\operatorname{Im}\alpha_0$, а

$$H^1(F_0,\,A/\Phi(A))=\operatorname{Hom}(F_0/\Phi(F_0),\,A/\Phi(A)).$$

Найдем условия, при которых ядро $\ker\gamma_0$ становится тривиальным при подъеме в группу $H^2(\widehat{F},\,\Phi(A))$ из диаграммы (7). Достаточно рассмотреть с учетом копредставления (8) два расширения

$$\begin{aligned}G_1=\langle d,\,\varkappa,\,c\mid d^{p^{n-1}}=1,\ \varkappa^p=d,\ c^p=1,\ [\varkappa,\,c]=1,&\\ d^{\varkappa}=d,\ d^c=d\rangle,&\end{aligned}\tag{9}$$

где $d=a^p$, а $\varkappa=ba$, а также

$$\begin{aligned}G_2=\langle d,\,b,\,\varkappa\mid d^{p^{n-1}}=1,\ b^p=1,\ \varkappa^p=d,\ [b,\,\varkappa]=d^{-p^{n-2}},&\\ d^b=d,\ d^{\varkappa}=d\rangle,&\end{aligned}\tag{10}$$

где $d=a^p$, а $\varkappa=ca$.

Исследуем условия разрешимости задачи $(K_0/k,\,G_1,\,\varphi_0)$. Такая задача допускает спуск по подгруппе $\langle c\rangle$ к равносильной задаче погружения расширения $k(\sqrt[p]{m_1})/k$ в поле с циклической группой $\langle\varkappa\rangle$.

Условия разрешимости такой задачи состоят в тривиальности символа Гильберта p-й степени $(\varepsilon_{p^{n-1}},\, m_1)$.

Исследуем теперь условия разрешимости задачи $(K_0/k,\, G_2,\, \varphi_0)$. Нетрудно видеть[2] (с учетом уже вычисленного препятствия для разрешимости задачи $(K_0/k,\, H_0,\, \varphi_0)$), что искомое препятствие имеет вид $(\varepsilon_{p^{n-1}}^{-1},\, m_2)(m_1,\, m_2)$, что эквивалентно $(m_2,\, \varepsilon_{p^{n-1}})(m_1,\, m_2)$.

Итак, условиями ультраразрешимости задачи $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ являются

$$(m_1,\, m_2)\neq 1,\ (\varepsilon_{p^{n-1}},\, m_1)=1,\ (m_2,\, \varepsilon_{p^{n-1}})(m_1,\, m_2)=1;\quad \varepsilon_{p^n}\notin K_0. \quad (11)$$

Покажем, что можно выбрать значения параметров $m_1,\, m_2 \in k^*$, удовлетворяющие условиям (11). Вновь рассмотрим векторное пространство k^*/k^{*p} размерности $r = (k : \mathbb{Q}_p) + 2$ над полем $\mathbb{F}_p$ и выберем базис С. П. Демушкина (см. [3, гл. 4, §1, 4°]) $\{a_j\}_{j=1}^r$ со свойствами

$$(a_1,\, a_2) = (a_3,\, a_4) = \ldots = (a_{r-1},\, a_r) = \varepsilon_p;$$
$$(a_2,\, a_1) = (a_4,\, a_3) = \ldots = (a_r,\, a_{r-1}) = \varepsilon_p^{-1},$$

а на остальных парах базисных элементов символ Гильберта p-й степени тривиален. При этом $a_1 = \varepsilon_{p^{n-1}}$. Выберем произвольным образом прообразы $\{\widehat{a}_j\}_{j=1}^r \subset k^*$ элементов $\{a_j\}_{j=1}^r$, причем возьмем $\widehat{a}_1 = \varepsilon_{p^{n-1}}$. Положим $m_1 = \widehat{a}_3$, $m_2 = \widehat{a}_2\widehat{a}_4$. Тогда $(\varepsilon_{p^{n-1}},\, m_1) = 1$, $(m_1,\, m_2) = \varepsilon_p$, а $(m_2,\, \varepsilon_{p^{n-1}}) = \varepsilon_p^{-1}$; при этом нетрудно видеть, что $\varepsilon_{p^n} \notin K_0$ при таком выборе параметров m_1, m_2: ведь в противном случае элементы $a_1,\, a_3,\, a_2a_4$ порождали бы в k^*/k^{*p} подпространство размерности 2, что противоречит выбору элементов $\{a_j\}_{j=1}^r$. Таким образом, все условия (11) выполнены.

Покажем, что расширение K_0/k погружается в поле K с группой F. Так как[3] условиями разрешимости такой задачи согласно результату Б. Б. Лурье [3, гл. 4, §1, теорема 4.1.2], а также согласно [3, гл. 3, §14, теорема 3.14.1] являются условия разрешимости всех элементарных сопутствующих брауэровских задач, отвечающих F-операторных характерам группы A, то из-за $\varepsilon_{p^n} \notin K_0$, достаточно рассмотреть задачи

[2] Для удобства заменим в (10) образующую d на d^{-1}.
[3] У нас $d(F_0) = d(F) = 2$.

вида $(K_0/k,\, \widetilde{F},\, \Psi)$, где $\widetilde{F}$ задана копредставлением (4). Напомним, что

$$\widetilde{F} = \langle \widetilde{a},\, \widetilde{b},\, \widetilde{c} \mid \widetilde{a}^{p^j} = 1,\, \widetilde{b}^p = \widetilde{a}^u,\, \widetilde{c}^p = \widetilde{a}^v,\, [\widetilde{b},\, \widetilde{c}] = \widetilde{a}^{wp^{j-1}},\\ \widetilde{a}^{\widetilde{b}} = \widetilde{a}^{\widetilde{c}} = \widetilde{a}\rangle, \tag{12}$$

параметры u, v, w – целые неотрицательные числа с условием взаимной простоты с p в случае положительности; эпиморфизм $\Psi\colon \widetilde{F} \to F_0$ действует на образующих следующим образом: $\Psi(\widetilde{a}) = 1$, $\Psi(\widetilde{b}) = b_0$, $\Psi(\widetilde{c}) = c_0$. Заметим, что $j < n$ в силу выбора расширения K_0/k. Также заметим, что $\widetilde{F}$ – гомоморфный образ F. При этом расширение K_0/k таково, что параметры m_1, m_2 удовлетворяют условиям (11).

Если $v = w = 0$, то, осуществив спуск по подгруппе $\langle\widetilde{c}\rangle$, получим задачу погружения расширения $k(\sqrt[p]{m_1})/k$ в поле с циклической группой порядка p^{j+1}. Ее условия разрешимости состоят в тривиальности символа Гильберта p-й степени $(\varepsilon_{p^j},\, m_1)$. Но для $j < n-1$ это условие выполняется, ибо $\varepsilon_{p^{n-1}} \in k$. В случае $j = n-1$ тривиальность символа $(\varepsilon_{p^{n-1}},\, m_1)$ гарантируется условиями (11). При этом в дальнейшем в некоторых "особых" случаях мы не сможем показать разрешимость задачи $(K_0/k,\, \widetilde{F},\, \Psi)$, но в этих случаях возникнет противоречие с нерасщепляемостью исходного расширения (1) (а, значит, и "особые" случаи не возникнут): мы построим в этих случаях гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условиями коммутативности диаграммы (6), причем во всех таких случаях будет $\mu(\widetilde{a}) = a^{p^{n-j}}$, $\mu(\widetilde{b}) = b$, $\mu(\widetilde{c}) = c$. Если $u \neq 0$, то из-за $n-1-j \geqslant 0$ мы можем в копредставлении (8) сделать сначала замену $\widehat{b} = ba^{-up^{n-2}}$ (при этом будет $\widehat{b}^p = 1$, а $[\widehat{b},\, c] = [b,\, c]$), а затем замену $\overline{b} = \widehat{b}a^{up^{n-1-j}}$ (при этом будет $\overline{b}^{p^{n-i}} = a^{up^{n-j}}$, а $[\overline{b},\, c] = [\widehat{b},\, c]$) – это, как мы увидим ниже, обеспечит корректность гомоморфизма μ во всех "особых" случаях.

Это, в частности, означает, что мы можем без ограничения общности считать $u = 0$: по доказанному класс коцикла $\widetilde{h}$ расширения (12) при $v = w = 0$ распадается при подъеме в группу $H^2(\widehat{F},\, \langle\widetilde{a}\rangle)$: просто умножим класс коцикла расширения (12) на $\widetilde{h}^{-1}$ и будем рассматривать полученное расширение.

Пусть в (12) $u = v = 0$, а $w \neq 0$. Но тогда можно определить гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$, где G_0 задана копредставлением вида (8) при $u = v = 0$ следующим образом: $\mu(\widetilde{a}) = a^{p^{n-j}}$, $\mu(\widetilde{b}) = b$, а $\mu(\widetilde{c}) = c$.

Нетрудно видеть, что гомоморфизм μ определен корректно и делает диаграмму (6) коммутативной. Это означает, что подъем класса $h_0 \in H^2(F_0, A)$, задающего расширение (8), в группу $H^2(\widetilde{F}, A)$ тривиален. Но тогда и исходное расширение (1) полупрямое, ибо $\widetilde{F}$ – гомоморфный образ F.

Пусть теперь в (12) $u = 0$, а $v \neq 0$. Но если $u = w = 0$, а $v \neq 0$, то в копредставлении (8) при $u = v = 0$ сделаем замену $\widehat{c} = ca^v$: тогда $\widehat{c}^p = a^{vp}$, а $[b, \widehat{c}] = [b, c]a^{-vp^{n-1}} = 1$, если предварительно поменять образующую a. При $j = n-1$ это дает противоречие: можно, как и выше, определить гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условиями коммутативности диаграммы (6). Предположим теперь, что в (12) $j = n-1$, $u = 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$. Пусть сначала $w + v \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$. В таком случае рассмотрим копредставление (8) с $b^p = c^p = 1$, а $[b, c] = a^{(w+v)p^{n-1}}$. Сделаем замену $\widehat{c} = ca^v$, тогда $\widehat{c}^p = a^{vp}$, а $[b, \widehat{c}] = a^{wp^{n-1}}$, ибо $j = n-1$. Вновь, как и выше, можно определить гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условием коммутативности диаграммы (6). Если же $w + v \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, то так как у нас $\widetilde{a}^{p^j} = 1$, а $[\widetilde{b}, \widetilde{c}] = \widetilde{a}^{wp^{j-1}}$, то можно положить $w = -v$. Но тогда задача $(K_0/k, \widetilde{F}, \Psi)$ разрешима, ибо является сопутствующей задачей к разрешимой задаче $(K_0/k, G_2, \varphi_0)$ (группа G_2 задана копредставлением (10)).

Пусть $j < n-1$. Рассмотрим сначала случай $u = w = 0$, а $v \neq 0$. В этом случае можно в задаче $(K_0/k, \widetilde{F}, \Psi)$ сделать спуск по подгруппе $\langle \widetilde{b} \rangle$ – получим равносильную задачу погружения расширения $k(\sqrt[p]{m_2})/k$ в поле с циклической группой порядка p^{j+1}. Но условия разрешимости такой задачи состоят в тривиальности символа Гильберта p-й степени (ε_{p^j}, m_2). Так как $j < n-1$, а $\varepsilon_{p^{n-1}} \in k$, то заведомо $(\varepsilon_{p^j}, m_2) = 1$. Итак, при $j < n-1$ мы можем считать $u = 0$, а $w \neq 0$. Если при этом $v = 0$, то, как и выше, существует корректно определенный гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условием коммутативности диаграммы (6): достаточно представить G_0 копредставлением (8) при $u = v = 0$ и положить $\mu(\widetilde{a}) = a^{p^{n-j}}$, $\mu(\widetilde{b}) = b$, $\mu(\widetilde{c}) = c$. Пусть, наконец, при $j < n-1$ выполнено $v \neq 0$ и $w \neq 0$. Тогда в копредставлении (8) при $u = v = 0$ сделаем замену $\widehat{c} = ca^{vp^{n-j-1}}$. Получим с учетом $j < n-1$, что $\widehat{c}^p = a^{vp^{n-j}}$, а $[b, \widehat{c}] = [b, c]$. Таким образом, вновь существует вышеопределенный гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условием коммутативности диаграммы (6).

Итак, мы показали, что задача $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ ультраразрешима, причем K_0/k погружается в поле K с группой F. Но так как $d(F) = d(F_0)$, то применимы рассуждения, основанные на анализе диаграммы (7), а потому задача $(K/k,\, G,\, \varphi)$ ультраразрешима. Наконец, в силу [6, теорема 1] расширение (1) ультраразрешимо. $\square$

2.3. Теперь рассмотрим случай минимального p-расширения (1) типа $i < n-1$. Согласно [5, лемма] расширение (1) получается подъемом с расширения $A = \langle a\rangle$ до G_0 с помощью абелевой группы $F_0 = \langle b_0,\, c_0\rangle$, где

$$G_0 = \langle a,\, b,\, c \mid a^{p^n} = 1,\, b^{p^{n-i}} = a^{up^{n-1}},\, c^p = a^{vp^{n-1}},\, [b,\, c] = a^{wp^{n-1}} \\ a^b = a^{1+p^i},\, a^c = a\rangle, \tag{13}$$

причем $|b_0| = p^{n-i}$, а $|c_0| = p$. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi_0\colon G_0 \to F_0$ с ядром A, причем $\varphi_0(b) = b_0$, а $\varphi_0(c) = c_0$.

Лемма 4. *Существует расширение Галуа локальных полей K_0/k с группой F_0, такое, что задача $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ ультраразрешима.*

Доказательство. Пусть k – локальное поле, содержащее ε_{p^i}, но не содержащее $\varepsilon_{p^{i+1}}$. Реализуем группу F_0 как группу Галуа расширения K_0/k так, чтобы $\varepsilon_{p^{n-1}} \in K_0$, причем элемент b_0 действовал на $\varepsilon_{p^{n-1}}$ как возведение в степень $1 + p^i$, что согласуется с (13), а $\varepsilon_{p^n} \notin K_0$. Снова в силу [3, гл. 1, §6, следствие 5] можно считать $n \geqslant 2$.

Группа Галуа D максимального p-расширения поля k (группа Демушкина) как про-p-группа порождается элементами $\{x_j\}_{j=1}^r$, где $r = (k : \mathbb{Q}_p) + 2$, удовлетворяющими единственному соотношению (см. [7, Теорема])

$$x_1^{p^i}[x_1^{-1},\, x_2^{-1}][x_3^{-1},\, x_4^{-1}]\dots[x_{r-1}^{-1},\, x_r^{-1}] = 1. \tag{14}$$

Предварительно преобразуем сначала копредставление (13) к удобному виду. Именно, сначала рассмотрим замену $\widehat{c} = ca^{-vp^{n-2}}$. При этом $\widehat{c}^p = 1$, а $[b,\, \widehat{c}] = a^{wp^{n-1}}$ при $i > 1$; при $i = 1$ получим $[b, \widehat{c}] = a^{(w+v)p^{n-1}}$.

Затем делаем замену $\widehat{b} = ba^{-up^{i-1}}$. Непосредственно проверяется, что $\widehat{b}^{p^{n-i}} = 1$, а $[\widehat{b},\, c] = [b,\, c]$. Таким образом, в (13) можно считать $u = v = 0$, $(w,\, p) = 1$. Действительно, это очевидно при $i > 1$. При $i = 1$ если $w + v \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, то расширение (13) полупрямое. Положим $\widetilde{w} = w$ при $i > 1$, а при $i = 1$ положим $\widetilde{w} = w + v$. Наконец, делая замену вида $\widetilde{c} = \widehat{c}a^{\widetilde{w}p^{n-i-1}}$, мы получим (при необходимости меняя образующую a) окончательное копредставление

$$G_0 = \langle a,\, b,\, c \mid a^{p^n} = 1,\, b^{p^{n-i}} = 1,\, c^p = a^{p^{n-i}},\, [b,\, c] = 1 \\ a^b = a^{1+p^i},\, a^c = a\rangle, \tag{15}$$

с которым и будем работать.

Определим эпиморфизм $\Psi\colon D \to G_0$ следующим образом:

$$\Psi(x_1) = c^{-1},\, \Psi(x_2) = b^{-1},\, \Psi(x_3) = a^{-1}, \\ \Psi(x_4) = b^{-p^{n-i-1}},\, \Psi(x_j) = 1, \quad \forall\, j > 4. \tag{16}$$

Покажем, что Ψ корректно определен. Для этого проверим соотношение (14). Имеем

$$c^{-p^i}[c,\, b][a,\, b^{p^{n-i-1}}] = a^{-p^{n-1}}[a,\, b^{p^{n-i-1}}] \\ = a^{-p^{n-1}}a^{-1}a^{(1+p^i)^{p^{n-i-1}}} = a^{-p^{n-1}}a^{-1}a^{1+p^{n-1}} = 1.$$

Таким образом, Ψ – корректно определенный эпиморфизм группы D на G_0. Положим $\psi = \varphi_0\Psi$. Эпиморфизм $\psi\colon D \to F_0$ определяет расширение Галуа K_0/k с группой F_0, причем по построению задача $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ разрешима. Покажем, что $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ ультраразрешима. Предположив противное, мы получим существование гомоморфизма $\widetilde{\Psi}\colon D \to G_0$, не являющегося эпиморфизмом, такого, что $\psi = \varphi_0\widetilde{\Psi}$. Но тогда

$$\widetilde{\Psi}(x_1) = c^{-1}a^u,\, \widetilde{\Psi}(x_2) = b^{-1}a^v,\, \widetilde{\Psi}(x_3) = a^w,\, \widetilde{\Psi}(x_4) = b^{-p^{n-i-1}}a^z, \tag{17}$$

причем все коммутаторы $[x_j^{-1},\, x_{j+1}^{-1}]$ при $j > 4$ гомоморфизм $\widetilde{\Psi}$ отображает в единицу. При этом в (17) $w \equiv 0(\operatorname{mod} p)$, так как в противном случае $\widetilde{\Psi}$ был бы эпиморфизмом. Гомоморфизм $\widetilde{\Psi}$ должен переводить соотношение (14) в единицу. Однако, имеем

$$(c^{-1}a^u)^{p^i}[a^{-u}c,\, a^{-v}b][a^{-w},\, a^{-z}b^{p^{n-i-1}}] \\ = a^{-p^{n-1}}a^{up^i}(c^{-1}a^ub^{-1}ca^{-u}b)(a^wa^{-w(1+p^i)^{p^{n-i-1}}}) \\ = a^{-p^{n-1}}a^{up^i}[c,\, b]a^{-up^i} = a^{-p^{n-1}} \neq 1,$$

где мы использовали тот факт, что $a^{-wp^{n-1}} = 1$ а также $[c,\, b] = 1$, что вытекает из копредставления (15). Итак, гомоморфизм $\widetilde{\Psi}$ не существует, а потому задача $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ ультраразрешима. □

Замечание 1. Ясно, что построенная в лемме 4 ультраразрешимая задача $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ не должна быть брауэровской, а все максимальные присоединенные задачи должны быть брауэровскими: если бы $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ была брауэровской, то она была бы равносильна некоторой максимальной присоединенной задаче; если бы некоторая максимальная присоединенная задача не была брауэровской, то она была бы разрешима (см. [3, гл. 3, §14, теорема 3.14.1]). Поэтому $\varepsilon_{p^{n-1}} \in K_0$, причем элемент b_0 группы F_0 действует на $\varepsilon_{p^{n-1}}$ как возведение в степень $1+p^i$. Итак, поле K_0 имеет вид[4] $k(\varepsilon_{p^{n-1}})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}}m_1}) \otimes_k k(\sqrt[p]{m_2})$ для некоторых элементов $m_1,\, m_2 \in k^*$, причем

$$\mathrm{Gal}(k(\varepsilon_{p^{n-1}})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}}m_1})) = \langle b_0\rangle, \quad \mathrm{Gal}(k(\sqrt[p]{m_2})) = \langle c_0\rangle.$$

Нам понадобится для дальнейшего установить следующий результат.

Лемма 5. *Построенное в лемме 4 поле K_0 удовлетворяет условию: либо $\varepsilon_{p^n} \notin K_0$, либо $m_1 \in k^{*p}$. В последнем случае b_0 действует на ε_{p^n} как возведение в степень $1+p^i+zp^{n-1}$ для некоторого целого $z \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$.*

Доказательство. Напомним, что расширение K_0/k, построенное в лемме 4, определяется эпиморфизмом $\psi\colon D \to F_0$, где D – группа Демушкина поля k, а $\psi = \varphi_0\Psi$. Поскольку F_0 – абелева, то ψ индуцирует эпиморфизм $\widehat{\psi}\colon D/D' \to F_0$; группа D/D' является группой Галуа максимального абелева p-расширения поля k с образующими $\{x_j\}_{j=1}^r$ и соотношением $x_1^{p^i} = 1$. Вспомним также, что $K_0 = k(\varepsilon_{p^{n-1}})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}}m_1}) \otimes_k k(\sqrt[p]{m_2})$ для некоторых $m_1,\, m_2 \in k^*$. Предположим, что $\varepsilon_{p^n} \in K_0$. В таком случае найдутся целые числа u, v, такие, что

$$\varepsilon_{p^{n-1}} = (\varepsilon_{p^{n-1}}m_1)^u m_2^v x^p, \tag{18}$$

для некоторого элемента $x \in k(\varepsilon_{p^{n-1}})^*$. Выясним, как действует элемент c_0 на ε_{p^n}. Поскольку K_0 – поле, то c_0 действует на x из (18), а также на элемент $\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}}m_1}$ неподвижно. С другой стороны, из (16) и соотношения $\psi = \varphi_0\Psi$ вытекает, что $\psi(x_1) = c_0^{-1}$. Поскольку в D/D'

[4] Мы воспользовались тем, что брауэровская задача погружения $k(\varepsilon_{p^{n-1}})/k$ в поле с циклической группой порядка p^{n-i} разрешима: годится, например, решение $k(\varepsilon_{p^n})$; все решения такой задачи имеют вид $k(\varepsilon_{p^{n-1}})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}}m_1})$ согласно [3, гл. 3, §1].

выполнено соотношение $x_1^{p^i} = 1$, то (так как F_0 – p-группа) действие $\psi(x_1)$ на ε_{p^n} может быть отождествлено (в силу локальной теории полей классов) с локальным символом Артина $\theta_k(\varepsilon_{p^i})$. Таким образом, элемент c_0 действует на ε_{p^n} как символ $\theta_k(\varepsilon_{p^i}^{-1})$. Заметим, что

$$(\theta_k(\varepsilon_{p^i}))(\varepsilon_{p^n}) = \varepsilon_{p^n}. \tag{19}$$

В самом деле, рассмотрим задачу погружения расширения $k(\varepsilon_{p^n})/k$ в поле с циклической группой порядка p^n. Поскольку $\varepsilon_{p^i} \in k$, то такая задача является брауэровской. Более того, она разрешима: годится, например, поле $k(\varepsilon_{p^{n+i}})$ в качестве решения. Но условия разрешимости такой задачи состоят в том, что элемент ε_{p^i} является нормой относительно расширения $k(\varepsilon_{p^n})/k$, а это условие равносильно (19).

Таким образом, элемент c_0 действует на ε_{p^n} неподвижно. В таком случае из (18) вытекает, что $v \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$. В частности, можно считать без ограничения общности, что $\varepsilon_{p^n} \in k(\varepsilon_{p^{n-1}})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1})$. Таким образом, можно считать $m_1 = 1$.

Итак, в предположении $\varepsilon_{p^n} \in K_0$ мы имеем $K_0 = k(\varepsilon_{p^n}) \otimes_k k(\sqrt[p]{m_2})$. Выясним, как элемент b_0 действует на ε_{p^n}. В силу замечания 1 мы имеем $\varepsilon_{p^{n-1}}^{b_0} = \varepsilon_{p^{n-1}}^{1+p^i}$. При этом $\varepsilon_{p^n}^{b_0} \neq \varepsilon_{p^n}^{1+p^i}$ в силу замечания 1. Поскольку ε_{p^n} – корень многочлена $x^p - \varepsilon_{p^{n-1}}$, то $\varepsilon_{p^n}^{b_0} = \varepsilon_p^w \varepsilon_{p^n}^{1+p^i}$ для некоторого $w \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$. Т.е. можно считать, что

$$\varepsilon_{p^n}^{b_0} = \varepsilon_{p^n}^{1+p^i+zp^{n-1}}, \quad z \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p). \tag{20}$$

$\square$

Замечание 2. Из замечания 1 вытекает, что расширение (13), задаваемое классом $h_0 \in H^2(F_0, A)$, где F_0 реализована как группа Галуа построенного в лемме 4 расширения K_0/k, определяет однозначно по модулю ядра $\ker \gamma_0$ диаграммы (7) класс $\widehat{h}_0 \in H^2(F_0, \Phi(A))$; классу $\widehat{h}_0$ в силу леммы 4 соответствует некоторая неразрешимая максимальная присоединенная задача. Более того, все элементы ядра $\ker \gamma_0$ диаграммы (7) становятся тривиальными при подъеме в группу $H^2(\widehat{F}, \Phi(A))$: в самом деле, в противном случае нашелся бы элемент $x \in \ker \gamma_0$, такой что $\lambda(\lambda_0(x)) \neq 1$. Но так как по построению расширения K_0/k элемент x определяет брауэровскую задачу погружения, то условию $\lambda(\lambda_0(x)) \neq 1$ отвечает (ведь в диаграмме (7) даже для случая, когда A – нетривиальный F_0-модуль, $\ker \gamma_0 = \operatorname{Im} \alpha_0$, а $H^1(F_0, A/\Phi(A)) = \mathrm{Hom}(\mathrm{F_0}/\Phi(\mathrm{F_0})), \mathrm{A}/\Phi(\mathrm{A}))$ препятствие в виде символа Гильберта p-й степени – над локальным полем любая центрально-простая конечномерная алгебра является циклической. Так как $\lambda(\lambda_0(x)) \neq 1$ по предположению, то указанный символ Гильберта нетривиален, а потому его подходящая степень определяет обратный элемент к препятствию для разрешимости бруаэровской задачи с классом $\widehat{h}_0$. Таким образом, если $\lambda(\lambda_0(x)) \neq 1$, то мы можем построить разрешимую максимальную присоединенную задачу к $(K_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$, что противоречит лемме 4.

Итак, расширение K_0/k, построенное в лемме 4, таково, что ядро $\ker\gamma_0$ становится тривиальным при подъеме в группу $H^2(\widehat{F},\, \Phi(A))$. Снова анализируя диаграмму (7) с учетом $d(F) = d(F_0)$, получаем, что ядро $\ker\gamma$ становится тривиальным при подъеме в группу $H^2(\widehat{F},\, \Phi(A))$: при анализе диаграммы (7) мы никак не использовали тривиальность A как F-модуля, ибо в любом случае

$$H^1(F_0,\, A/\Phi(A)) = \mathrm{Hom}(F_0/\Phi(F_0),\, A/\Phi(A)),$$

а

$$H^1(F,\, A/\Phi(A)) = \mathrm{Hom}(F/\Phi(F),\, A/\Phi(A)).$$

Замечание 3. Выясним, какие задачи погружения соответствуют порождающим элементам ядра $\ker\gamma_0$ диаграммы (7) в контексте леммы 4 и замечания 2. С учетом копредставления (13) порождающие элементы ядра $\ker\gamma_0$ задаются следующими копредставлениями

$$G_1 = \langle d,\, \varkappa,\, c \mid d^{p^{n-1}} = 1,\, \varkappa^{p^{n-i}} = d^{p^{n-i-1}},\, c^p = 1,\, [\varkappa,\, c] = 1, \\ d^{\varkappa} = d^{1+p^i},\, d^c = d\rangle, \tag{21}$$

где $d = a^p$, а $\varkappa = ba$, а также

$$G_2 = \langle d,\, b,\, \varkappa \mid d^{p^{n-1}} = 1,\, b^{p^{n-i}} = 1,\, \varkappa^p = d,\, [b,\, \varkappa] = d^{-p^{i-1}}, \\ d^b = d^{1+p^i},\, d^{\varkappa} = d\rangle, \tag{22}$$

где $d = a^p$, а $\varkappa = ca$.

Лемма 4 утверждает (с учетом замечания 2), что $(K_0/k,\, G_1,\, \varphi_0)$ и $(K_0/k,\, G_2,\, \varphi_0)$ разрешимы. Нам понадобится явное условие разрешимости задачи $(K_0/k,\, G_1,\, \varphi_0)$ в терминах элементов $m_1,\, m_2 \in k^*$, определяющих поле K_0 согласно замечанию 1. Заметим, что задача $(K_0/k,\, G_1,\, \varphi_0)$ допускает спуск по подгруппе $\langle c\rangle$ к равносильной задаче погружения. Но из копредставления (21) вытекает, что условиями разрешимости задачи, полученной от $(K_0/k,\, G_1,\, \varphi_0)$ спуском по подгруппе $\langle c\rangle$, является представимость элемента ε_{p^i} в виде нормы относительно расширения $k(\varepsilon_{p^{n-1}})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}}m_1})/k$. Ясно, что ε_{p^i} является нормой относительно расширения $k(\varepsilon_{p^{n-1}})/k$: ведь расширение $k(\varepsilon_{p^{n-1}})/k$ погружается в поле $k(\varepsilon_{p^{n-1+i}})$. Поэтому условия разрешимости задачи $(K_0/k,\, G_1,\, \varphi_0)$ равносильны тривиальности действия локального символа Артина $\theta_k(\varepsilon_{p^i})$ на $\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}}m_1}$. Но, очевидно, $\theta_k(\varepsilon_{p^i})$ действует на ε_{p^n} неподвижно, а потому искомые условия состоят в том, что $\theta_k(\varepsilon_{p^i})(\sqrt[p]{m_1}) = \sqrt[p]{m_1}$, т.е. должен быть тривиален символ Гильберта p-й степени $(\varepsilon_{p^i},\, m_1)$.

Итак, условием разрешимости задачи $(K_0/k,\, G_1,\, \varphi_0)$ является

$$(\varepsilon_{p^i},\, m_1) = 1.$$

Лемма 6. *Пусть минимальное p-расширение* (1) *является расширением типа $i < n-1$, причем $d(F) = 2$. Тогда* (1) *ультраразрешимо.*

Доказательство. В силу замечания 2, леммы 4 и [5, лемма] достаточно показать, что построенное в лемме 4 расширение K_0/k погружается в поле K в группой F: действительно, в этом случае задача $(K/k,\, G,\, \varphi)$ будет ультраразрешимой, а тогда в силу [6, теорема 1] расширение (1) также будет ультраразрешимым.

Так как $d(F) = d(F_0)$, то в силу [3, гл. 4, §1, теорема 4.1.2] достаточно показать разрешимость всех элементарных сопутствующих брауэровских задач, отвечающих F-операторным характерам ядра. Любая такая задача – это задача $(K_0/k,\, \widetilde{F},\, \widetilde{\Psi})$, где группа $\widetilde{F}$ при $j < n$ задана копредставлением[5]

$$\begin{aligned}\widetilde{F} = \langle \widetilde{a},\, \widetilde{b},\, \widetilde{c} \mid \widetilde{a}^{p^j} = 1,\, \widetilde{b}^{p^{n-i}} = \widetilde{a}^{up^m},\, \widetilde{c}^{p} = \widetilde{a}^{vp^s},\, [\widetilde{b},\, \widetilde{c}] = \widetilde{a}^{wp^t},\\ \widetilde{a}^{\widetilde{b}} = \widetilde{a}^{1+p^i},\, \widetilde{a}^{\widetilde{c}} = \widetilde{a}\rangle,\end{aligned} \tag{23}$$

параметры u, v, w – целые неотрицательные числа с условием взаимной простоты с p в случае положительности, параметры m, s, t – целые неотрицательные числа, меньшие чем j; эпиморфизм $\widetilde{\Psi}\colon \widetilde{F} \to F_0$ действует на образующих следующим образом: $\widetilde{\Psi}(\widetilde{a}) = 1$, $\widetilde{\Psi}(\widetilde{b}) = b_0$, $\widetilde{\Psi}(\widetilde{c}) = c_0$. Заметим, что $j < n+1$ в силу выбора расширения K_0/k. При этом случай $j = n$ возможен, согласно лемме 5, лишь когда $K_0 = k(\varepsilon_{p^n}) \otimes k(\sqrt[p]{m_2})$, причем b_0 действует на ε_{p^n} в точности так, как указано в (20). Также заметим, что $\widetilde{F}$ – гомоморфный образ F. При этом расширение K_0/k таково, что разрешимы задачи $(K_0/k,\, G_1,\, \varphi_0)$

[5] При $j = n$ группа $\widetilde{F}$ задается копредставлением (29).

и $(K_0/k,\, G_2,\, \varphi_0)$, связанные с копредставлениями (21) и (22) из замечания 3. Покажем, что в указанных предположениях на расширение K_0/k все задачи вида $(K_0/k,\, \widetilde{F},\, \widetilde{\Psi})$ разрешимы.

Шаг 1. Пусть в (23) сначала $j \leqslant i$. Тогда $\widetilde{F}$ – центральное расширение $\langle \widetilde{b} \rangle$ с помощью $\langle \widetilde{a} \rangle$. Пусть сначала $s > 0$, тогда рассмотрим замену $\widehat{c} = \widetilde{c}\widetilde{a}^{-vp^{s-1}}$, откуда $\widehat{c}^p = 1$. При этом $[\widetilde{b},\, \widehat{c}] = [\widetilde{b},\, \widetilde{c}]$. Таким образом, при $s > 0$ можно считать $v = 0$. Далее при $s > 0$ имеем[6]

$$1 = [\widetilde{b},\, \widetilde{c}^p] = [\widetilde{b},\, \widetilde{c}]^p = \widetilde{a}^{wp^{t+1}},$$

откуда либо $w = 0$, либо $w \neq 0$, а $t = j - 1$. Если $v = w = 0$, то достаточно показать разрешимость задачи $(K_0/k,\, \widetilde{F},\, \widetilde{\Psi})$ в случае $m = 0$. Но тогда, осуществив спуск по подгруппе $\langle \widetilde{c} \rangle$, получим задачу погружения расширения $k(\varepsilon_{p^{n-1}})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1})$ в поле с циклической группой порядка p^{n-i+j}. Ее условия разрешимости состоят в том, что элемент ε_{p^j} должен представляться в виде нормы относительно расширения $k(\varepsilon_{p^{n-1}})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1})/k$. Рассуждая так же, как и в замечании 3, получаем эквивалентное условие: символ Гильберта p-й степени $(\varepsilon_{p^j},\, m_1)$ должен быть тривиален. Но для $j < i$ это условие выполняется, ибо $\varepsilon_{p^i} \in k$. В случае $j = i$ получаем, согласно замечанию 3, условие разрешимости задачи $(K_0/k,\, G_1,\, \varphi_0)$, которое выполнено по построению расширения K_0/k. При этом в дальнейшем в некоторых "особых" случаях мы не сможем показать разрешимость задачи $(K_0/k,\, \widetilde{F},\, \widetilde{\Psi})$, но в этих случаях возникнет противоречие с нерасщепляемостью исходного расширения (1) (а, значит, и "особые" случаи не возникнут): мы построим в этих случаях гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условиями коммутативности диаграммы (6), причем во всех таких случаях будет $\mu(\widetilde{a}) = a^{p^{n-j}}$, $\mu(\widetilde{b}) = b$, $\mu(\widetilde{c}) = c$. Если $u \neq 0$, то из-за $i - j + m \geqslant 0$ мы можем в копредставлении (13) сделать сначала замену $\widehat{b} = ba^{-up^{i-1}}$ (при этом будет $\widehat{b}^{p^{n-i}} = 1$, а $[\widehat{b},\, c] = [b,\, c]$), а затем замену $\overline{b} = \widehat{b}a^{up^{m-j+i}}$ (при этом будет $\overline{b}^{p^{n-i}} = a^{up^{n-j+m}}$, а $[\overline{b},\, c] = [\widehat{b},\, c]$) – это, как мы увидит ниже, обеспечит корректность гомоморфизма μ во всех "особых" случаях.

Это, в частности, означает, что мы можем без ограничения общности считать $u = 0$.

[6] Мы уже полагаем $v = 0$.

Пусть в (23) $u = v = 0$, а $w \neq 0$; при этом будет $t = j - 1$. Но тогда можно определить гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$, где G_0 задана копредставлением вида (13) при $u = v = 0$ следующим образом: $\mu(\widetilde{a}) = a^{p^{n-j}}$, $\mu(\widetilde{b}) = b$, а $\mu(\widetilde{c}) = c$. Нетрудно видеть, что гомоморфизм μ определен корректно и делает диаграмму (6) коммутативной. Это означает, что подъем класса $h_0 \in H^2(F_0, A)$, задающего расширение (13), в группу $H^2(\widetilde{F}, A)$ тривиален. Но тогда и исходное расширение (1) полупрямое, ибо $\widetilde{F}$ – гомоморфный образ F.

Пусть теперь в (23) $u = s = 0$, а $v \neq 0$. В любом случае $[\widetilde{b}, \widetilde{c}^p] = 1$ в силу $j \leqslant i$, т.е. либо $w = 0$, либо $w \neq 0$, а $t = j - 1$. Но если $u = w = s = 0$, а $v \neq 0$, то вспомним, что группу G_0 можно задать и копредставлением (15) (заменим в (15) образующую a на a^v). При $j = i$ это дает противоречие: можно, как и выше, определить гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условиями коммутативности диаграммы (6). Предположим теперь, что в (23) $j = i$, $u = s = 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$, а $t = j - 1$. Пусть сначала $w + v \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$. В таком случае рассмотрим копредставление (13) с $b^{p^{n-i}} = c^p = 1$, а $[b, c] = a^{(w+v)p^{n-1}}$. Сделаем замену $\widehat{c} = ca^{vp^{n-j-1}}$, тогда $\widehat{c}^p = a^{vp^{n-j}}$, а $[b, \widehat{c}] = a^{wp^{n-1}}$, ибо $j = i$. Вновь, как и выше можно определить гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условием коммутативности диаграммы (6). Если же $w + v \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, то так как у нас $\widetilde{a}^{p^j} = 1$, а $[\widetilde{b}, \widetilde{c}] = \widetilde{a}^{wp^{j-1}}$, то можно положить $w = -v$. Но тогда задача $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$ разрешима, ибо является сопутствующей задачей к разрешимой в силу замечания 3 задачи $(K_0/k, G_2, \varphi_0)$ (группа G_2 задана копредставлением (22)).

Пусть $j < i$. Рассмотрим сначала случай $u = s = w = 0$, а $v \neq 0$. В этом случае можно в задаче $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$ сделать спуск по подгруппе $\langle\widetilde{b}\rangle$ – получим равносильную задачу погружения расширения $k(\sqrt[p]{m_2})/k$ в поле с циклической группой порядка p^{j+1}. Но условия разрешимости такой задачи состоят в тривиальности символа Гильберта p-й степени (ε_{p^j}, m_2). Так как $j < i$, а $\varepsilon_{p^i} \in k$, то заведомо $(\varepsilon_{p^j}, m_2) = 1$. Итак, при $j < i$ мы можем считать $u = s = 0$, $t = j - 1$, $w \neq 0$. Но тогда при $v = 0$, как и выше, существует корректно определенный гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условием коммутативности диаграммы (6): достаточно представить G_0 копредставлением (13) при $u = v = 0$ и положить $\mu(\widetilde{a}) = a^{p^{n-j}}$, $\mu(\widetilde{b}) = b$, $\mu(\widetilde{c}) = c$. Пусть, наконец, при $j < i$ выполнено $u = s = 0$, $v \neq 0$ и $w \neq 0$. Тогда в копредставлении (13) при $u = v = 0$ сделаем замену $\widehat{c} = ca^{vp^{n-j-1}}$. Получим с учетом $j < i$, что $\widehat{c}^p = a^{vp^{n-j}}$, а $[b, \widehat{c}] = [b, c]$. Таким образом, вновь существует вышеопределенный гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условием коммутативности диаграммы (6).

Шаг 2. Теперь рассмотрим в (23) случай $i < j < n$. Тогда легко видеть, что в (23) $m \geqslant j - i$, ибо должно выполняться условие $\widetilde{b}^{-1}\widetilde{a}^{up^m}\widetilde{b} = \widetilde{a}^{up^m}$. Рассмотрим класс $\widetilde{h} \in H^2(F_0, \langle\widetilde{a}\rangle)$, задающий расширение (23) при $v = w = 0$. Этот класс получается подъемом класса, определяющего брауэровскую[7] задачу погружения расширения

$$k(\varepsilon_{p^{n-1}})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}}m_1})/k$$

в поле с группой N, заданной копредставлением

$$N = \langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \mid \widetilde{a}^{p^j} = 1, \widetilde{b}^{p^{n-i}} = \widetilde{a}^{up^m}, \widetilde{a}^{\widetilde{b}} = \widetilde{a}^{1+p^i} \rangle. \tag{24}$$

Условиями разрешимости такой задачи является представимость $\varepsilon_{p^{j-m}}$ в виде нормы относительно расширения $k(\varepsilon_{p^{n-1}})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}}m_1})/k$. Но поскольку $\varepsilon_{p^{j-m}}$ является нормой относительно расширения $k(\varepsilon_{p^{n-1}})/k$, то искомые условия состоят в тривиальности действия символа Артина $\theta_k(\varepsilon_{p^{j-m}})$ на $\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}}m_1}$. Но на элементе ε_{p^n} символ $\theta_k(\varepsilon_{p^{j-m}})$ действует тривиально, а потому искомые условия состоят в тривиальности символа Гильберта p-й степени $(\varepsilon_{p^{j-m}}, m_1)$. При $m > j - i$ это условие выполняется в силу $\varepsilon_{p^i} \in k$, а при $m = j - i$ – в силу разрешимости задачи $(K_0/k, G_1, \varphi_0)$ из замечания 3, где G_1 задана копредставлением (21).

Итак, при $i < j < n$ мы можем класс коцикла расширения (23) умножить на класс $\widetilde{h}^{-1}$, который задает разрешимую задачу. При этом в дальнейшем в некоторых "особых" случаях мы не сможем показать разрешимость задачи $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$, но в этих случаях возникнет противоречие с нерасщепляемостью исходного расширения (1) (а, значит, и "особые" случаи не возникнут): мы построим в этих случаях гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ с условиями коммутативности диаграммы (6), причем во всех таких случаях будет $\mu(\widetilde{a}) = a^{p^{n-j}}$, $\mu(\widetilde{b}) = b$, $\mu(\widetilde{c}) = c$. Если $u \neq 0$, то из-за $m \geqslant j - i$ мы можем в копредставлении (13) сделать сначала замену $\widehat{b} = ba^{-up^{i-1}}$ (при этом будет $\widehat{b}^{p^{n-i}} = 1$, а $[\widehat{b}, c] = [b, c]$), а затем замену $\overline{b} = \widehat{b}a^{up^{m-j+i}}$ (при этом будет $\overline{b}^{p^{n-i}} = a^{up^{n-j+m}}$, а $[\overline{b}, c] = [\widehat{b}, c]$) – это, как мы увидим ниже, обеспечит корректность гомоморфизма μ во всех "особых" случаях.

[7]Ибо $m \geqslant j - i$, а $\varepsilon_{p^i} \in k$.

Таким образом, без ограничения общности можно считать $u = 0$ в (23). Если в (23) $v = 0$, то $[\widetilde{b}, \widetilde{c}^p] = 1$. Но так как $[\widetilde{b}, \widetilde{c}^p] = [\widetilde{b}, \widetilde{c}]^p = \widetilde{a}^{wp^{t+1}}$, то в этом случае $t = j-1$, так как можно при $u = v = 0$ считать $w \neq 0$. В таком случае гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$, определенный выше, задан корректно: в копредставлении (13) можно без ограничения общности положить $u = v = 0$, более того, диаграмма (6) коммутативна. Поэтому класс $h_0 \in H^2(F_0, A)$ расширения (13) становится тривиальным при подъеме в группу $H^2(\widetilde{F}, A)$, чего не может быть, ибо $\widetilde{F}$ – гомоморфный образ F, а расширение (1) неполупрямое.

Пусть в (23) $v \neq 0$. Тогда с одной стороны $[\widetilde{b}, \widetilde{c}^p] = [\widetilde{b}, \widetilde{c}]^p = \widetilde{a}^{wp^{t+1}}$, а с другой – $[\widetilde{b}, \widetilde{c}^p] = [\widetilde{b}, \widetilde{a}^{vp^s}] = \widetilde{a}^{-vp^{s+i}}$. Итак, получаем

$$\widetilde{a}^{wp^{t+1}} = \widetilde{a}^{-vp^{s+i}}. \tag{25}$$

Пусть $s > 0$, тогда в (23) сделаем замену $\widehat{c} = \widetilde{c}\widetilde{a}^{vp^{s-1}}$. Получим $\widehat{c}^p = 1$, а

$$[\widetilde{b}, \widehat{c}] = \widetilde{a}^{wp^t + vp^{s-1+i}}. \tag{26}$$

Если при этом $w = 0$, то из (25) получаем $s+i \geqslant j$, т.е. расширение (23) либо тривиально, либо $s + i - 1 = j - 1$. Но тогда мы приходим к уже разобранной ситуации. Если же $w \neq 0$, то из (25) имеем либо $t = j-1$, а $s + i \geqslant j$, что с учетом (26) даст либо тривиальное расширение в (23) (при $s+i-1 = j-1$ и $v+w \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$), либо уже разобранную ситуацию (при $s + i > j$ или при $s + i - 1 = j - 1$ и $w + v \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$). Таким образом, при $w \neq 0$, $v \neq 0$ и $s > 0$ с учетом (25) мы имеем $t+1 = s+i < j$, причем дополнительно $v+w \equiv 0 (\operatorname{mod} p^{j-t-1})$. Но тогда из (26) получим либо уже разобранную ситуацию (когда $u = v = 0$, а $w \neq 0$), либо тривиальное расширение в (23) (при $v+w \equiv 0 (\operatorname{mod} p^{j-t})$).

Итак, мы можем считать в (23) $u = s = 0$, $v \neq 0$. При этом обязательно $w \neq 0$, так как в противном случае

$$1 = [\widetilde{b}, \widetilde{c}]^p = [\widetilde{b}, \widetilde{c}^p] = \widetilde{a}^{-vp^i},$$

что невозможно в силу $i < j$ и $(v, p) = 1$. Вновь обратимся к (25) с учетом $s = 0$. Так как $v \neq 0$ и $w \neq 0$, то из-за $i < j$ и $s = 0$ обязательно будет $t = i-1$. При этом из (25) следует также, что $v+w \equiv 0 (\operatorname{mod} p^{j-i})$. В частности,

$$w = -v + \widehat{v}p^{j-i} \tag{27}$$

для некоторого целого $\widehat{v}$. Таким образом, копредставление (23) переписывается в виде

$$\widetilde{F} = \langle \widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c} \mid \widetilde{a}^{p^j} = 1, \widetilde{b}^{p^{n-i}} = 1, \widetilde{c}^p = \widetilde{a}^v, [\widetilde{b}, \widetilde{c}] = \widetilde{a}^{-vp^{i-1}+\widehat{v}p^{j-1}}, \\ \widetilde{a}^{\widetilde{b}} = \widetilde{a}^{1+p^i}, \widetilde{a}^{\widetilde{c}} = \widetilde{a}\rangle. \tag{28}$$

При $\widehat{v} \equiv 0(\operatorname{mod} p)$ получаем, что задача $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$ является сопутствующей задачей к $(K_0/k, G_2, \varphi_0)$ из замечания 3, где группа G_2 задана копредставлением (22). Таким образом, в этом случае задача $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$ разрешима. Будем поэтому считать, что $(\widehat{v}, p) = 1$. В этом случае рассмотрим копредставление (13) с $u = v = 0$, $w = \widehat{v}$ (без ограничения общности это можно предполагать, заменив при необходимости образующие). Затем в копредставлении (13) сделаем замену $\widehat{c} = ca^{vp^{n-j-1}}$. Получим $\widehat{c}^p = a^{vp^{n-j}}$, а $[b, \widehat{c}] = a^{-vp^{n-j-1+i}+\widehat{v}p^{n-1}}$. Определим вновь, как и выше, гомоморфизм $\mu\colon \widetilde{F} \to G_0$ на образующих следующим образом: $\mu(\widetilde{a}) = a^{p^{n-j}}$, $\mu(\widetilde{b}) = b$, $\mu(\widehat{c}) = c$. При этом гомоморфизм μ оказывается корректно определенным и делает диаграмму (6) коммутативной. Вновь, как и выше, в этом случае получается противоречие с нерасщепляемостью расширения (1).

Шаг 3. Пусть теперь $j = n$. В таком случае в силу леммы 5 $K_0 = k(\varepsilon_{p^n}) \otimes_k k(\sqrt[p]{m_2})$, причем b_0 действует на ε_{p^n} согласно (20). Таким образом, нужно исследовать брауэровские задачи вида $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$, где

$$\widetilde{F} = \langle \widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c} \mid \widetilde{a}^{p^n} = 1, \widetilde{b}^{p^{n-i}} = \widetilde{a}^{up^m}, \widetilde{c}^p = \widetilde{a}^{vp^s}, [\widetilde{b}, \widetilde{c}] = \widetilde{a}^{wp^t}, \\ \widetilde{a}^{\widetilde{b}} = \widetilde{a}^{1+p^i+zp^{n-1}}, \widetilde{a}^{\widetilde{c}} = \widetilde{a}\rangle, \tag{29}$$

параметры u, v, w – целые неотрицательные числа с условием взаимной простоты с p в случае положительности, параметры m, s, t – целые неотрицательные числа, меньшие чем n; эпиморфизм $\widetilde{\Psi}\colon \widetilde{F} \to F_0$ действует на образующих следующим образом: $\widetilde{\Psi}(\widetilde{a}) = 1$, $\widetilde{\Psi}(\widetilde{b}) = b_0$, $\widetilde{\Psi}(\widetilde{c}) = c_0$.

Прежде всего исследуем копредставление (29). Так как $\widetilde{b}^{-1}\widetilde{b}^{p^{n-i}}\widetilde{b} = \widetilde{b}^{p^{n-i}}$, то должно выполняться равенство $\widetilde{a}^{up^m} = \widetilde{a}^{up^m(1+p^i+zp^{n-1})}$. Иными словами,

$$up^{m+i} + uzp^{m+n-1} \equiv 0(\operatorname{mod} p^n).$$

Поскольку у нас $i < n-1$, то $m \geqslant n-i$. Но в таком случае можно в копредставлении (29) сделать замену вида $\widehat{b} = \widetilde{b}\widetilde{a}^{-up^{m-n+i}}$. Непосредственный подсчет показывает, что $\widehat{b}^{p^{n-i}} = 1$, а $[\widehat{b}, \widetilde{c}] = [\widetilde{b}, \widetilde{c}]$. Таким образом, мы можем считать без ограничения общности, что $u = 0$ в копредставлении (29).

Пусть сначала $v \neq 0$ и $s > 0$. Тогда, рассмотрев замену $\widehat{c} = \widetilde{c}\widetilde{a}^{-vp^{s-1}}$, получим $\widehat{c}^p = 1$, а

$$[\widetilde{b}, \widehat{c}] = \widetilde{a}^{wp^t + vp^{s+i-1} + vzp^{s+n-2}}. \tag{30}$$

Далее, имеем

$$1 = [\widetilde{b}, \widehat{c}^p] = [\widetilde{b}, \widehat{c}]^p = \widetilde{a}^{wp^{t+1} + vp^{s+i}}. \tag{31}$$

Если $t + 1 = s + i < n$, то тогда $w = -v + \widehat{v}p^{n-s-i}$. В этом случае получаем

$$[\widetilde{b}, \widehat{c}] = \widetilde{a}^{\widehat{v}p^{n-1} + vzp^{s+n-2}}.$$

В любом случае мы получаем либо полупрямую задачу $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$, либо ситуацию, когда в копредставлении (29) $u = v = 0$, $w \neq 0$, а $t = n-1$.

Если же $t+1 \neq s+i$, то из (31) вытекает, что в (29) можно положить $t = n-1$: действительно, в противном случае было бы $s + i < t + 1$, причем тогда и $s + i \geqslant n$. Но у нас $i < n-1$, а потому $s \geqslant 2$. Из (30) получаем тогда либо полупрямую задачу $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$, либо ситуацию, когда в копредставлении (29) $u = v = 0$, $w \neq 0$, а $t = n-1$.

Теперь рассмотрим случай $u = s = 0$. Если при этом $v = 0$, то из $1 = [\widetilde{b}, \widetilde{c}^p] = [\widetilde{b}, \widetilde{c}]^p$ имеем $\widetilde{a}^{wp^{t+1}} = 1$, откуда либо $w = 0$ (а тогда задача $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$ полупрямая), либо $t = n-1$. Если $v \neq 0$, а $w = 0$, то с одной стороны $1 = [\widetilde{b}, \widetilde{c}]$, а с другой –

$$1 = [\widetilde{b}, \widetilde{c}]^p = [\widetilde{b}, \widetilde{c}^p] = \widetilde{a}^{-v(p^i + zp^{n-1})}.$$

Но так как у нас $i < n-1$, а $(v, p) = 1$, то получается противоречие.

Итак, мы можем считать $u = s = 0$, а $v, w \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$. В таком случае опять с учетом $[\widetilde{b}, \widetilde{c}^p] = [\widetilde{b}, \widetilde{c}]^p$ получаем условие

$$\widetilde{a}^{wp^{t+1} + vp^i + vzp^{n-1}} = 1. \tag{32}$$

Если $t < n-1$, то (так как $i < n-1$) из (32) необходимо получаем $i = t+1$, причем дополнительно $w + v \equiv -vz (\operatorname{mod} p^{n-i-1})$. Т.е. $w = (-1 -$

$z)v + \widehat{v}p^{n-i-1}$. Но тогда $[\widetilde{b}, \widetilde{c}] = \widetilde{a}^{(-1-z)vp^{i-1}+\widehat{v}zp^{n-2}}$. Таким образом, получаем

$$\widetilde{a}^{-v(p^i+zp^{n-1})} = [\widetilde{b}, \widetilde{c}^p] = [\widetilde{b}, \widetilde{c}]^p = \widetilde{a}^{(-1-z)vp^i+\widehat{v}p^{n-1}},$$

откуда

$$-zvp^i + \widehat{v}p^{n-1} + zvp^{n-1} \equiv 0(\operatorname{mod} p^n).$$

Но тогда и $-zvp^i \equiv 0(\operatorname{mod} p^{i+1})$, ибо $i < n-1$. Однако, из-за $v, z \not\equiv 0(\operatorname{mod} p)$ получаем противоречие. В таком случае при $u = s = 0$, а $v, w \not\equiv 0(\operatorname{mod} p)$ обязательно будет $t = n-1$. Но тогда из (32) мы получаем $\widetilde{a}^{vp^i+vzp^{n-1}} = 1$, чего не может быть в силу $i < n-1$ и $(v, p) = 1$.

Итак, нам достаточно рассмотреть единственную содержательную ситуацию в (29): $u = v = 0$, $w \neq 0$, $t = n-1$. При этом, заменяя $\widetilde{a}$ на $\widetilde{a}^w$ можно без ограничения общности считать $w = 1$. Таким образом, нужно показать разрешимость задачи $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$ в предположениях $u = v = 0$, $w = 1$, $t = n-1$. Вспомним, что расширение K_0/k определялось в лемме 4 с помощью эпиморфизма $\psi\colon D \to F_0$. При этом в силу (16) имеем (с учетом $\psi = \varphi_0\Psi$)

$$\psi(x_1) = c_0^{-1},\ \psi(x_2) = b_0^{-1},\ \psi(x_3) = 1,$$
$$\psi(x_4) = b_0^{-p^{n-i-1}}, \quad \psi(x_j) = 1\,\forall\, j > 4.$$

Построим эпиморфизм $\varkappa\colon D \to \widetilde{F}$ с условием коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varkappa"'] & D \arrow[d, "\psi"] \\ \widetilde{F} \arrow[r, "\widetilde{\Psi}"] & F_0. \end{tikzcd} \tag{33}$$

Именно, положим

$$\begin{aligned} &\varkappa(x_1) = \widetilde{c}^{-1},\ \varkappa(x_2) = \widetilde{b}^{-1},\ \varkappa(x_3) = \widetilde{a}^{-1}, \\ &\qquad \varkappa(x_4) = \widetilde{b}^{-p^{n-i-1}},\ \varkappa(x_j) = 1\,\forall\, j > 4. \end{aligned} \tag{34}$$

Покажем, что $\varkappa$ – корректно заданный эпиморфизм группы Демушкина D на $\widetilde{F}$. Для этого достаточно проверить соотношение (14). Имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{c}^{-p^i}[\widetilde{c}, \widetilde{b}][\widetilde{a}, \widetilde{b}^{p^{n-i-1}}] &= \widetilde{a}^{-p^{n-1}}[\widetilde{a}, \widetilde{b}^{p^{n-i-1}}] \\ &= \widetilde{a}^{-p^{n-1}}\widetilde{a}^{-1}\widetilde{a}^{(1+p^i+zp^{n-1})^{p^{n-i-1}}} = \widetilde{a}^{-p^{n-1}}\widetilde{a}^{-1}\widetilde{a}^{1+p^{n-1}} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, эпиморфизм $\varkappa$ корректно определен и делает диаграмму (33) коммутативной. Т.е. задача $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$ разрешима.

Итак, мы показали, что все рассматриваемые задачи $(K_0/k, \widetilde{F}, \widetilde{\Psi})$ при всех $j < n+1$ разрешимы. Но тогда (см. начало доказательства) разрешима и задача погружения расширения K_0/k в поле K с группой F. Таким образом, задача $(K/k, G, \varphi)$ ультраразрешима, а тогда в силу [6, теорема 1] расширение (1) ультраразрешимо. □

Итак, нами установлен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* (1) *– минимальное p-расширение, у которого*

$$d(F) = 2,$$

тогда (1) *ультраразрешимо.*

Литература

1. Д. Д. Киселев, *Примеры задач погружения, у которых решения только поля.* — УМН **68**, No. 4 (2013), 181–182.
2. Д. Д. Киселев, Б. Б. Лурье, *Ультраразрешимость и сингулярность в проблеме погружения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **414** (2013), 113–126.
3. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*, Наука, М., 1990.
4. Д. Д. Киселев, *Об ультраразрешимости групповых p-расширений абелевой группы с помощью циклического ядра.* — Зап. научн. семин. ПОМИ (принята к публикации).
5. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Универсально разрешимые задачи погружения с циклическим ядром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 189–197.
6. А. В. Яковлев, *Об ультраразрешимых задачах погружения для числовых полей.* — Алгебра и анализ, **27**, No. 6 (2015), 260–263.
7. С. П. Демушкин, *Группа максимального p-расширения локального поля.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., **25**, No. 3 (1961), 329–346.

Kiselev D. D., Chubarov I. A. On ultrasolvability of some classes of minimal non-split p-extensions with cyclic kernel for $p > 2$.

For any nonsplit $p > 2$-extensions of finite groups with cyclic kernel and a quotient-group with two generators which acompanying extensions are semisimple there exists a realization of the quotient-group as Galois group

of number fields such as corresponding embedding problem is ultrasolvable (i.e., this embedding problem is solvable and has only fields as solutions).

Всероссийская академия
внешней торговли
минэкономразвития РФ,
Пудовкина 4а, 119285, Москва,
Россия

E-mail: denmexmath@yandex.ru

Поступило 08 июля 2016 г.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы 1, 119992, Москва,
Россия

E-mail: igor.chubaroff@gmail.com