Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 452, 2016 г.

Д. Д. Киселев

ОБ УЛЬТРАРАЗРЕШИМОСТИ ГРУППОВЫХ p-РАСШИРЕНИЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ С ПОМОЩЬЮ ЦИКЛИЧЕСКОГО ЯДРА

§1. Введение

1.1. Задача погружения, связанная с точной последовательностью конечных групп,

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} F = \mathrm{Gal}(K/k) \longrightarrow 1,$$

состоит в том, чтобы построить k-алгебру Галуа L с группой G, содержащую поле K, таким образом, чтобы эпиморфизм ограничения автоморфизмов L на K совпадал бы с φ. Поиск решений в классе алгебр Галуа (не обязательно полей) принципиален по нескольким причинам: в случае нильпотентного ядра и расширения полей алгебраических чисел поиски решения задачи погружения в смысле алгебр Галуа и в смысле полей эквивалентны (см. [1]), в случае абелева ядра можно применить аппарат гомологической алгебры (именно так А. В. Яковлевым в [2] были получены условия разрешимости задачи погружения для абелева ядра).

В то же время интересен случай, когда априори можно гарантировать, что все решения задачи погружения окажутся полями (такие задачи мы в дальнейшем, следуя [3], называем ультраразрешимыми). Простейшее условие таково: ядро задачи погружения лежит в группе Фраттини накрывающей группы (см. [4, гл. 1, §6, следствие 5]). Первые нетривиальные примеры (когда указанное условие на группу Фраттини не выполняется) были построены в [3, 5]. В связи с работами [3, 5] А. В. Яковлев поставил следующую проблему.

Проблема 1 (А. В. Яковлев). *Пусть*

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} F \longrightarrow 1 \tag{1}$$

– расширение конечных групп с абелевым ядром A. При каких условиях существует расширение Галуа числовых полей K/k с группой F, такое, что получившаяся задача погружения ультраразрешима?

Ключевые слова: ультраразрешимость, задача погружения.

В данной работе мы рассматриваем случай, когда в (1) группа F абелева, а A является циклической, причем (1) – p-расширение для $p > 2$. В этом случае мы в теореме 1 даем полное решение проблемы 1. Работа завершается некоторыми замечаниями.

1.2. Все рассматриваемые далее группы являются конечными, если не оговорено противное. Для элементов x, y некоторой группы обозначим $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Символ p всюду в дальнейшем[1] обозначает нечетное простое число. Символом $d(F)$ обозначается минимальное число образующих p-группы F. В дальнейшем расширение (1) будем называть *ультраразрешимым*, если проблема 1 для него решается положительно.

Под p-локальным полем мы будем понимать конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$. Под числовым полем мы будем понимать конечное расширение поля $\mathbb{Q}$. Для локального поля k символ θ_k обозначает локальный символ Артина. Символом k^* обозначается мультипликативная группа поля k. Для расширения Галуа K/k символом $N_{K/k}(K^*)$ обозначается множество элементов из k^*, представимых в виде нормы относительно расширения K/k. Символом $\nu_p(m)$ мы обозначаем значение p-адического показателя целого числа m. Символом ε_m будем обозначать некоторый примитивный корень степени m из единицы. При этом если $m_1 \mid m_2$, то соответствующие корни из единицы всегда будут выбираться с условием нормировки: $\varepsilon_{m_1} = \varepsilon_{m_2}^{m_2/m_1}$. Для конечного расширения полей K/k символом $(K : k)$ обозначается размерность K как векторного пространства над k. Для полей нулевой характеристики k_1, k_2 символ $k_1 \cdot k_2$ обозначает их композит.

Пусть k – числовое поле, такое, что $\varepsilon_n \in k$. Символом $k[a, b]$ для некоторых a, $b \in k^*$ будем обозначать алгебру обобщенных кватернионов степени[2] n, т.е. k-алгебру с порождающими ξ, η, удовлетворяющими соотношениям $\xi^n = a$, $\eta^n = b$, $ab = \varepsilon_n ba$. Символом $\mathrm{Mat}(n, k)$ обозначается матричная алгебра порядка n над полем k. Для расширения Галуа K/k и класса $h \in H^2(\mathrm{Gal}(K/k), K^*)$ символом $[K, \mathrm{Gal}(K/k), h]$ обозначается соответствующий элемент группы Брауэра $B(k)$ – класс, представителем которого является скрещенная алгебра. Символ δ_{ij} обозначает символ Кронекера.

[1]Кроме пункта 3.4.

[2]Из контекста всегда будет ясно, какая степень имеется в виду.

Напомним понятие брауэровской задачи погружения. Предположим, что $(K/k,\, G,\, \varphi)$ – задача погружения с циклическим ядром A порядка m, а характеристика поля k не делит m. Пусть далее $\varepsilon_m \in K$. Группу $\mathrm{Hom}(A,\, K^*)$ можно естественным образом превратить в $\mathrm{Gal}(K/k)$-модуль:

$$\chi^f(a) = \chi(a^{f^{-1}})^f,\ \forall\, \chi \in \mathrm{Hom}(A,\, K^*),\ f \in \mathrm{Gal}(K/k),\ a \in A.$$

Задача $(K/k,\, G,\, \varphi)$ является по определению брауэровской, если для любого $\chi \in \mathrm{Hom}(A,\, K^*)$ и любого $f \in \mathrm{Gal}(K/k)$ выполнено $\chi^f = \chi$.

Для любой задачи погружения $(K/k,\, G,\, \varphi)$ с абелевым ядром A периода m, взаимно простого с характеристикой поля k, такой, что $\varepsilon_m \in K$, можно определить для $\chi \in \mathrm{Hom}(A,\, K^*)$ сопутствующую брауэровскую задачу погружения: $(K/K_\chi,\, G_\chi/\ker\chi,\, \varphi_\chi)$, где G_χ – полный прообраз относительно φ подгруппы $F_\chi = \mathrm{Gal}(K/K_\chi)$ группы $\mathrm{Gal}(K/k)$, действие которой на χ тривиально; при этом φ_χ – индуцированный эпиморфизм. Для задачи $(K/k,\, G,\, \varphi)$ с абелевым ядром A периода m, взаимно простого с характеристикой поля k, и для любого[3] $\chi \in \mathrm{Hom}(A,\, K^*)$, неподвижного относительно $\mathrm{Gal}(K/k)$, можно определить элементарную сопутствующую брауэровскую задачу $(K/k,\, G/\ker\chi,\, \varphi_\chi)$, где φ_χ – эпиморфизм, индуцированный φ. Если k – локальное поле, то известная теорема Демушкина–Шафаревича (см. [4, гл. 3, §14, теорема 3.14.1]) утверждает, что для разрешимости задачи $(K/k,\, G,\, \varphi)$ с абелевым ядром необходима и достаточна разрешимость всех элементарных сопутствующих брауэровских задач. Мы неоднократно будем пользоваться данным фактом.

С каждой задачей погружения $(K/k,\, G,\, \varphi)$ с условием $\ker\varphi \nleqslant \Phi(G)$ можно связать максимальную присоединенную задачу: именно, возьмем некоторую максимальную подгруппу H группы G, не содержащую $\ker\varphi$, и рассмотрим задачу $(K/k,\, H,\, \varphi)$. Хорошо известно (см. [3, теорема 1]), что для ультраразрешимости задачи $(K/k,\, G,\, \varphi)$ необходима и достаточна ее разрешимость, а также неразрешимость всех максимальных присоединенных задач.

1.3. Начнем со следующего очевидного результата.

Лемма 1. *Пусть i – некоторое натуральное число. Пусть k – произвольное поле нулевой характеристики, такое, что для нечетного*

[3] При этом уже не требуется, чтобы $\varepsilon_m \in K^*$.

простого p выполнено $\varepsilon_{p^i} \in k$, но $\varepsilon_{p^{i+1}} \notin k$. Тогда для любого $n > i$ степень расширения $k(\varepsilon_{p^n})/k$ равна p^{n-i}.

Доказательство. Ясно,что расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n})/\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})$ имеет степень p^{n-i}. Заметим теперь, что $k \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n}) = \mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})$. Именно, так как $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n})/\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i}))$ – циклическая p-группа, то в случае $k \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n}) \neq \mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})$ необходимо было бы $\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^{i+1}}) \subseteq k$, что противоречит условию леммы. Таким образом, поля k и $\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n})$ линейно разделены над $\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})$. Поэтому алгебра $k \otimes_{\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})} \mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n})$ является полем, и расширение $k(\varepsilon_{p^n})/k$ имеет с точностью до изоморфизма ту же группу Галуа, что и расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n})/\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})$. □

Лемма 2. *Пусть $(K/k,\, G,\, \varphi)$ – брауэровская задача погружения с циклическим ядром A, причем G – p-группа. Задача $(K/k,\, G,\, \varphi)$ ультраразрешима тогда и только тогда, когда $A \leqslant \Phi(G)$.*

Доказательство. Если $A \leqslant \Phi(G)$, то применим [4, гл. 1, §6, следствие 5]. Предположим теперь, что задача $(K/k,\, G,\, \varphi)$ ультраразрешима, но тем не менее $A \nleqslant \Phi(G)$. В таком случае класс[4] $h \in H^2(F,\, A)$ задачи $(K/k,\, G,\, \varphi)$ получается (посредством гомоморфизма когомологий $\gamma\colon H^2(F,\, \Phi(A)) \to H^2(F,\, A)$, индуцированного вложением $\Phi(A) \hookrightarrow A$) из класса $h_0 \in H^2(F,\, \Phi(A))$, определяющего некоторую максимальную присоединенную задачу. Так как задача $(K/k,\, G,\, \varphi)$ брауэровская, то A как F-модуль может быть отождествлена с группой корней из единицы порядка $|A|$, содержащихся в K^*. Условием разрешимости задачи с классом h является $\varkappa(h) = 1$, где $\varkappa\colon H^2(F,\, A) \to H^2(F,\, K^*)$ – гомоморфизм, индуцированный вложением $A \hookrightarrow K^*$. Условием разрешимости задачи с классом h_0 является $\varkappa(\gamma(h_0)) = 1$. Поскольку $h = \gamma(h_0)$, то максимальная присоединенная задача с классом h_0 разрешима вопреки предположению. □

Нам также понадобится

Лемма 3. *Пусть F – некоторая нециклическая p-группа. Пусть A – циклическая p-группа с образующей a, превращенная в F-модуль с помощью гомоморфизма $\gamma\colon F \to \mathrm{Aut}\, A$. Тогда существует система образующих $\{f_r\}_{r=1}^{d(F)}$ группы F, такая что $\gamma(f_1)$ порождает $\mathrm{im}\,\gamma$, а элементы $\{f_r\}_{r=2}^{d(F)}$ принадлежат $\ker\gamma$.*

[4]Здесь $F = \mathrm{Gal}(K/k)$.

Доказательство. Для любого $f \in F$ обозначим через $\overline{f}$ – образ f в группе $F/\Phi(F)$ при естественном эпиморфизме.

Существует элемент $f_1 \in F$, образ которого при гомоморфизме γ порождает $\operatorname{im}\gamma$. Дополним элемент f_1 до некоторой системы образующих $\{f'_r\}_{r=1}^{d(F)}$, где $f'_1 = f_1$. В таком случае для любого $r > 1$ имеем $f'_r = f_1^{m_r} f_{0r}$ для некоторого целого m_r и $f_{0r} \in \ker\gamma$. Положим $f_r = f_{0r}$. Покажем, что система $\{f_r\}_{r=1}^{d(F)}$ искомая. Действительно, в силу теоремы Бернсайда о базисе (см. [6, гл. 12, теорема 12.2.1]) достаточно показать, что элементы $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_{d(F)}$ группы $F/\Phi(F)$ линейно независимы над полем $\mathbb{F}_p$. Но по построению элементы $\overline{f}'_1, \ldots, \overline{f}'_{d(F)}$ в $F/\Phi(F)$ образую базис над $\mathbb{F}_p$, а так как $f_r = f_1^{-m_r} f'_r$ для всех $r > 1$, то матрица перехода от набора $\{\overline{f}_r\}_{r=1}^{d(F)}$ к набору $\{\overline{f}'_r\}_{r=1}^{d(F)}$ является треугольной с ненулевыми элементами на диагонали, т.е. невырожденной. $\square$

Предположим теперь, что A – циклическая p-группа с порождающим элементом a порядка p^n для некоторого $n \geqslant 2$. Пусть F – некоторая p-группа. Превратим A в F-модуль с помощью некоторого гомоморфизма $\gamma\colon F \to \operatorname{Aut} A$. Вложение F-модулей $\Phi(A) \hookrightarrow A$ индуцирует гомоморфизм когомологий $\alpha\colon H^2(F, \Phi(A)) \to H^2(F, A)$. Нашей целью будет описание ядра $\ker\alpha$ в удобных для нас терминах. Для этого по группе F построим абелеву p-группу F_0 с тем же числом образующих, что и F. При этом действие группы F_0 на A будет "таким же", как и действие F. Более точно это выражено в следующих условиях.

Условия 1. Пусть $F = \ker\gamma$. В таком случае в качестве F_0 рассмотрим элементарную абелеву группу ранга $d(F)$; при этом определен естественный эпиморфизм $\theta\colon F \to F_0$. Группу A можно рассматривать как тривиальный F_0-модуль.

Пусть F действует на A нетривиально. Тогда существует элемент $f_1 \in F$, такой, что $\gamma(f_1)$ порождает $\operatorname{im}\gamma$. При этом без ограничения общности $a^{f_1} = a^{1+p^i}$ для некоторого $i \in [1, n-1] \cap \mathbb{N}$. В качестве группы F_0 в этом случае возьмем абелеву группу с образующими $f_1^0, \ldots, f_{d(F)}^0$, причем f_1^0 имеет такой же порядок, как и $\gamma(f_1)$, а образующие[5] $f_2^0, \ldots, f_{d(F)}^0$ являются элементами порядка p. На A можно ввести структуру F_0-модуля, положив $a^{f_1^0} = a^{f_1}$ и $a^{f_r^0} = a$ для всех $r > 1$. В силу леммы 3 элемент f_1 можно дополнить (если $d(F) > 1$) до

[5]Если, конечно, $d(F) > 1$.

системы образующих $\{f_r\}_{r=1}^{d(F)}$ группы F таким образом, что $a^{f_r} = a$ для всех $r > 1$. Ясно, что соответствие $f_r \mapsto f_r^0$ корректно продолжается до эпиморфизма $\theta\colon F \to F_0$.

Эпиморфизм θ из условий 1 позволяет корректно определить гомоморфизмы подъема когомологий[6] $\lambda_1\colon H^2(F_0,\, \Phi(A)) \to H^2(F,\, \Phi(A))$ и $\lambda_2\colon H^2(F_0,\, A) \to H^2(F,\, A)$. При этом следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^2(F,\, \Phi(A)) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(F,\, A) \\ {\scriptstyle\lambda_1}\Big\uparrow & & {\scriptstyle\lambda_2}\Big\uparrow \\ H^2(F_0,\, \Phi(A)) & \xrightarrow{\beta} & H^2(F_0,\, A), \end{array} \tag{2}$$

где горизонтальные стрелки – гомоморфизмы, индуцированные вложением $\Phi(A) \hookrightarrow A$, является коммутативной.

Лемма 4. *Гомоморфизм λ_1 диаграммы* (2) *индуцирует эпиморфизм $\lambda_1\colon \ker\beta \to \ker\alpha$.*

Доказательство. Из коммутативности диаграммы (2) вытекает, что для всех $x \in \ker\beta$ будет $\lambda_1(x) \in \ker\alpha$. Точная последовательность

$$1 \longrightarrow \Phi(A) \longrightarrow A \longrightarrow A/\Phi(A) \longrightarrow 1$$

вместе с эпиморфизмом θ из условий 1 индуцируют коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F,\, A/\Phi(A)) & \xrightarrow{\mu} & H^2(F,\, \Phi(A)) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(F,\, A) \\ {\scriptstyle\varkappa}\Big\uparrow & & {\scriptstyle\lambda_1}\Big\uparrow & & {\scriptstyle\lambda_2}\Big\uparrow \\ H^1(F_0,\, A/\Phi(A)) & \xrightarrow{\nu} & H^2(F_0,\, \Phi(A)) & \xrightarrow{\beta} & H^2(F_0,\, A) \end{array}$$

с точными строками. Заметим, что $A/\Phi(A)$ – группа порядка p, а потому

$$H^1(F,\, A/\Phi(A)) = \mathrm{Hom}(F,\, A/\Phi(A))$$

и

$$H^1(F_0,\, A/\Phi(A)) = \mathrm{Hom}(F_0,\, A/\Phi(A)).$$

Поскольку $d(F_0) = d(F)$, то справедливо равенство

$$|\mathrm{Hom}(F_0,\, A/\Phi(A))| = |\mathrm{Hom}(F,\, A/\Phi(A))|.$$

[6]Ясно, что $\Phi(A)$ является как F- так и F_0-подмодулем модуля A: ведь A – циклическая p-группа.

Далее, $\varkappa$ является мономорфизмом. В самом деле, для любого $y \in \mathrm{Hom}(F_0,\, A/\Phi(A))$, такого, что $(\varkappa(y))(x) = 1$ для всех $x \in F$, имеем

$$(\varkappa(y))(x) = y(\theta(x)) = 1\,\forall\, x \in F.$$

Но так как θ – эпиморфизм, то и $y = 1$. Таким образом, $\varkappa$ необходимо является изоморфизмом. Фиксируем теперь любой $z \in \ker\alpha$. Тогда $z = \mu(y)$ для некоторого $y \in H^1(F,\, A/\Phi(A))$. Так как $\varkappa$ – изоморфизм, то существует $x \in H^1(F_0,\, A/\Phi(A))$, такой, что $\varkappa(x) = y$. В силу коммутативности диаграммы получаем $\lambda_1(\nu(x)) = z$. $\square$

Дадим описание ядра $\ker\beta$ из диаграммы (2). Из доказательства леммы 4 вытекает, что $\ker\beta$ – или элементарная абелева p-группа, или тривиальная группа.

Лемма 5. *Ядро* $\ker\beta$ *из диаграммы* (2) *порождается при* $i < n$ *следующими расширениями*

$$\begin{aligned}
X_1 = \langle d,\, c_1, \ldots,\, c_{d(F)} \mid\, & d^{p^{n-1}} = 1,\, c_1^{p^{n-i}} = d^{p^{n-i-1}},\, c_r^p = 1\,\forall\, r > 1,\\
& [c_s,\, c_t] = 1\,\forall\, s < t,\, d^{c_1} = d^{1+p^i},\, d^{c_r} = d\,\forall\, r > 1\rangle,\\
X_r = \langle d,\, c_1, \ldots,\, c_{d(F)} \mid\, & d^{p^{n-1}} = 1,\, c_1^{p^{n-i}} = 1,\\
& c_s^p = 1\,\forall\, 1 < s \neq r,\, c_r^p = d,\\
& [c_1,\, c_r] = d^{-p^{i-1}},\, [c_s,\, c_t] = 1\,\forall\, s < t : (s,\, t) \neq (1,\, r),\\
& d^{c_1} = d^{1+p^i},\, d^{c_s} = d\,\forall\, s > 1\rangle\,\forall\, r > 1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Поскольку F_0 – абелева группа, любой класс $h_0 \in H^2(F_0,\, \Phi(A))$ определяет группу G_0, в которой соотношения на прообразы $\{c_s\}_{s=1}^{d(F)}$ элементов $\{f_s^0\}_{s=1}^{d(F)}$ сводятся к соотношениям на коммутаторы и степени. Можно считать, что $d = a^p$, где $A = \langle a\rangle$. Вычислим элемент $(c_1 a)^{p^{n-i}}$. Имеем

$$\begin{aligned}
(c_1 a)^{p^{n-i}} &= c_1^2 a^{1+(1+p^i)}(c_1 a)^{p^{n-i}-2} = \ldots = c_1^{p^{n-i}} a^{1+(1+p^i)+\ldots+(1+p^i)^{p^{n-i}-1}}\\
&= c_1^{p^{n-i}} a^{((1+p^i)^{p^{n-i}}-1)/p^i} = c_1^{p^{n-i}} a^{p^{n-i}} = c_1^{p^{n-i}} d^{p^{n-i-1}}.
\end{aligned}$$

Далее, $[c_1 a,\, c_r] = a^{-1}c_1^{-1}c_r^{-1}c_1 a c_r = a^{-1}[c_1,\, c_r]a = [c_1,\, c_r]$. Вычислим коммутатор $[c_1,\, c_r a]$. Имеем

$$[c_1,\, c_r a] = c_1^{-1}a^{-1}c_r^{-1}c_1 c_r a = a^{-c_1}[c_1,\, c_r]a = [c_1,\, c_r]d^{-p^{i-1}}.$$

Теперь уже ясно, что порождающие ядра $\ker\beta$ имеют искомый вид (3). $\square$

Аналогичными рассуждениями доказывается

Лемма 6. *Ядро* $\ker\beta$ *из диаграммы* (2) *порождается при* $i = n$ *следующими расширениями*

$$\begin{aligned} X_1 = \langle d,\, c_1, \ldots,\, c_{d(F)} \mid d^{p^{n-1}} = 1,\, c_1^p = d,\, c_r^p = 1\,\forall\, r > 1, \\ [c_s,\, c_t] = 1\,\forall\, s < t,\, d^{c_r} = d\,\forall\, r > 1\rangle, \\ X_r = \langle d,\, c_1, \ldots,\, c_{d(F)} \mid d^{p^{n-1}} = 1,\, c_1^p = 1,\, c_s^p = 1\,\forall\, 1 < s \neq r,\, c_r^p = d, \\ [c_s,\, c_t] = 1\,\forall\, s < t,\, d^{c_s} = d\,\forall\, s > 1\rangle\,\forall\, r > 1. \end{aligned} \tag{4}$$

§2. Об одном классе задач погружения

2.1. В данном разделе k – произвольное поле характеристики$\neq p$, содержащее ε_p. Мы будем использовать символы $\mathrm{res}_{B\to C}$ и $\inf_{D\to E}$ для обозначения гомоморфизмов ограничения с группы B на подгруппу C и подъема с факторгруппы D на накрывающую группу E.

Лемма 7. *Пусть* X, Y *–* p*-группы с образующими* $\{x_r\}_{r=1}^{d(X)}$ *и* $\{y_r\}_{r=1}^{d(Y)}$. *Выберем параметры* $s \in [1,\, d(X)] \cap \mathbb{N}$, $t \in [1,\, d(Y)] \cap \mathbb{N}$. *Тогда существует расширение*

$$1 \longrightarrow \langle\varepsilon_p\rangle \longrightarrow E_{st} \xrightarrow{\pi} X \times Y \longrightarrow 1 \tag{5}$$

со свойствами: ограничение расширения (5) *на* X *и на* Y *расщепляется; если* $\{\overline{x}_r\}_{r=1}^{d(X)}$ *и* $\{\overline{y}_r\}_{r=1}^{d(Y)}$ *– прообразы относительно* π *элементов* $\{x_r\}_{r=1}^{d(X)}$ *и* $\{y_r\}_{r=1}^{d(Y)}$, *то*

$$[\overline{x}_i,\, \overline{y}_j] = 1\,\forall\,(i,\, j) \neq (s,\, t), \quad [\overline{x}_s,\, \overline{y}_t] = \varepsilon_p.$$

Доказательство. Рассмотрим расширение[7]

$$1 \longrightarrow \langle\varepsilon_p\rangle \xrightarrow{\alpha} G_{p^3} \xrightarrow{\xi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 1, \tag{6}$$

где

$$G_{p^3} = \langle d,\, c_1,\, c_2 \mid d^p = c_1^p = c_2^p = 1, [c_1,\, c_2] = d,\, d^{c_1} = d^{c_2} = d\rangle,$$

$\alpha\colon \varepsilon_p \mapsto d$, а $\xi(c_1) = (1,\, 0)$, $\xi(c_2) = (0,\, 1)$. Определим эпиморфизмы $\varphi\colon X \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и $\psi\colon Y \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ следующим образом: $\varphi(x_i) = \delta_{is}$, $\psi(y_j) = \delta_{jt}$. Эпиморфизмы φ и ψ индуцируют эпиморфизм $\varphi \times \psi\colon X \times$

[7]Мы существенно используем при этом нечетность p.

$Y \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Осуществим подъем расширения (6) посредством эпиморфизма $\varphi \times \psi$. Получим расширение

$$1 \longrightarrow \langle \varepsilon_p \rangle \xrightarrow{\alpha\colon \varepsilon_p \mapsto (d,\,1,\,1)} E_{st} \xrightarrow{\pi\colon (x,\,y,\,z) \mapsto (y,\,z)} X \times Y \longrightarrow 1,$$

где, разумеется,

$$E_{st} = \{(x,\,y,\,z) \in G_{p^3} \times X \times Y \mid \xi(x) = (\varphi(y),\,\psi(z))\}.$$

Положим $\overline{x}_i = (1,\,x_i,\,1)$ для $i \neq s$, $\overline{x}_s = (c_1,\,x_s,\,1)$. Аналогично положим $\overline{y}_j = (1,\,1,\,y_j)$ для $j \neq t$, $\overline{y}_t = (c_2,\,1,\,y_t)$. Ясно, что все условия на расширение (5) будут выполнены. □

Лемма 8. *Пусть X и Y – p-группы с образующими $\{x_r\}_{r=1}^{d(X)}$ и $\{y_r\}_{r=1}^{d(Y)}$. Рассмотрим расширение*

$$1 \longrightarrow \langle \varepsilon_p \rangle \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} X \times Y \longrightarrow 1,$$

с классом $h \in H^2(X \times Y,\,\langle \varepsilon_p \rangle)$. Пусть $\overline{x}_r$ и $\overline{y}_l$ – прообразы элементов x_r и y_l относительно π для всех r, l. В таком случае $[\overline{x}_r,\,\overline{y}_l] = \varepsilon_p^{d_{rl}}$ для некоторых $d_{rl} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Тогда справедливо равенство

$$h = (\inf\nolimits_{X \to X \times Y} \mathrm{res}_{X \times Y \to X}\, h)(\inf\nolimits_{Y \to X \times Y} \mathrm{res}_{X \times Y \to Y}\, h) \prod_{i,\,j} h_{ij}^{d_{ij}}, \qquad (7)$$

где $h_{ij} \in H^2(X \times Y,\,\langle \varepsilon_p \rangle)$ – класс расширения (5) с $(s,\,t) = (i,\,j)$.

Доказательство. Положим

$$\widehat{h} = h^{-1}(\inf\nolimits_{X \to X \times Y} \mathrm{res}_{X \times Y \to X}\, h)(\inf\nolimits_{Y \to X \times Y} \mathrm{res}_{X \times Y \to Y}\, h) \prod_{i,\,j} h_{ij}^{d_{ij}}$$

и рассмотрим соответствующее расширение

$$1 \longrightarrow \langle \varepsilon_p \rangle \longrightarrow \widehat{H} \xrightarrow{\pi} X \times Y \longrightarrow 1. \qquad (8)$$

Поскольку $\mathrm{res}_{X \times Y \to X} \inf_{X \to X \times Y}$ и $\mathrm{res}_{X \times Y \to Y} \inf_{Y \to X \times Y}$ тождественны на группах $H^2(X,\,\langle \varepsilon_p \rangle)$ и $H^2(Y,\,\langle \varepsilon_p \rangle)$ соответственно, то в силу леммы 7 $\mathrm{res}_{X \times Y \to X} \widehat{h} = 1$ и $\mathrm{res}_{X \times Y \to Y} \widehat{h} = 1$.

Пусть $\widehat{x}_r$ и $\widehat{y}_l$ – прообразы образующих x_r и y_l относительно π в группе H. В таком случае для всех i, j имеем $[\widehat{x}_i,\,\widehat{y}_j] = 1$: действительно, если $[\overline{x}_i,\,\overline{x}_j] = 1$, то $d_{ij} = 0$; если же $[\overline{x}_i,\,\overline{y}_j] = \varepsilon_p^m$, для некоторого целого m, взаимно простого с p, то $d_{ij} = m$. Но тогда $\widehat{h} = 1$, откуда и вытекает (7). □

Предложение 1. *Пусть* (8) *– неполупрямое расширение с классом* $h \in H^2(X \times Y, \langle \varepsilon_p \rangle)$. *Пусть* K_X/k *и* K_Y/k *– расширения Галуа*[8] *с группами* X *и* Y *соответственно. Пусть* $\{x_r\}_{r=1}^{d(X)}$, $\{y_r\}_{r=1}^{d(Y)}$ *– соответственно образующие групп* X *и* Y. *Выберем* $a_1, \ldots, a_{d(X)}$ *и* $b_1, \ldots, b_{d(Y)}$ *из* $k^* \setminus k^{*p}$ *таким образом, чтобы* $\sqrt[p]{a_i} \in K_X$ *для всех* i, *а* $\sqrt[p]{b_j} \in K_Y$ *для всех* j, *причем*

$$\sqrt[p]{a_i}^{x_r} = \varepsilon_p^{\delta_{ri}} \sqrt[p]{a_i}, \quad \sqrt[p]{b_j}^{y_l} = \varepsilon_p^{\delta_{lj}} \sqrt[p]{b_j}.$$

Выберем прообразы $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{d(X)}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{d(Y)}$ *элементов* $x_1, \ldots, x_{d(X)}$ *и* $y_1, \ldots, y_{d(Y)}$ *относительно эпиморфизма* π; *при этом для всех* i, j *выполнено* $[\overline{x}_i, \overline{y}_j] = \varepsilon_p^{d_{ij}}$. *Тогда для* $K = K_X \otimes_k K_Y$ *задача погружения* $(K/k, H, \pi)$ *разрешима тогда и только тогда, когда в* $B(k)$

$$[K_X, X, \mathrm{res}_{X\times Y \to X}\, h][K_Y, Y, \mathrm{res}_{X\times Y\to Y}\, h] \prod_{i,j} k[a_i, b_j]^{d_{ij}} \sim 1.$$

Доказательство. В силу леммы 8 класс h удовлетворяет соотношению (7). Таким образом, препятствие для разрешимости брауэровской задачи $(K/k, H, \pi)$ есть элемент группы Брауэра $B(k)$ вида

$$[K, X \times Y, \inf_{X\to X\times Y} \mathrm{res}_{X\times Y\to X}\, h][K, X \times Y, \inf_{Y\to X\times Y} \mathrm{res}_{X\times Y\to Y}\, h] \times \prod_{i,j} [K, X \times Y, h_{ij}]^{d_{ij}}.$$

Первые два множителя есть соответственно $[K_X, X, \mathrm{res}_{X\times Y\to X}\, h]$ и $[K_Y, Y, \mathrm{res}_{X\times Y\to Y}\, h]$, ибо гомоморфизмы подъема когомологий Галуа $H^2(X, K_X^*) \to H^2(X \times Y, K^*)$ и $H^2(Y, K_Y^*) \to H^2(X \times Y, K^*)$ являются мономорфизмами. Таким образом, достаточно показать, что $[K, X \times Y, h_{ij}] = [k[a_i, b_j]]$. Вспомним, что класс h_{ij} определяет расширение вида (5) и, согласно лемме 7, получается подъемом класса, определяющего расширение (6): подъем осуществляется с помощью эпиморфизма $\varphi \times \psi$: $X \times Y \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, определенного в лемме 7. В силу выбора элементов $a_1, \ldots, a_{d(X)}$ и $b_1, \ldots, b_{d(Y)}$ эпиморфизм $\varphi \times \psi$ является в то же время и эпиморфизмом групп Галуа $\mathrm{Gal}(K/k) \to \mathrm{Gal}(k(\sqrt[p]{a_i}, \sqrt[p]{b_j})/k)$. Достаточно тем самым показать, что в брауэровской задаче[9] $(k(\sqrt[p]{a_i}, \sqrt[p]{b_j})/k, G_{p^3}, \xi)$, где $\xi(c_1) = x_i$, $\xi(c_2) = y_j$,

[8] Линейно разделенные над k.

[9] Группа G_{p^3} определена в (6).

препятствие имеет вид $k[a_i, b_j]$. Для этого изучим простую компоненту $\Lambda = (G_{p^3} \times k(\sqrt[p]{a_i}, \sqrt[p]{b_j}))e_\chi$ скрещенного произведения $G_{p^3} \times k(\sqrt[p]{a_i}, \sqrt[p]{b_j})$, где e_χ – идемпотент групповой алгебры $k(\sqrt[p]{a_i}, \sqrt[p]{b_j})\langle d\rangle$, соответствующий характеру $\chi \in \mathrm{Hom}(\langle d\rangle, k(\sqrt[p]{a_i}, \sqrt[p]{b_j})^*)$, такому, что $\chi(d) = \varepsilon_p$. Легко видеть, что алгебра Λ представима в виде тензорного произведения над k коммутирующих подалгебр $\Lambda_1 = \langle c_1 e_\chi, \sqrt[p]{a_i} e_\chi\rangle_k$ и $\Lambda_2 = \langle c_2 \sqrt[p]{a_i} e_\chi, \sqrt[p]{b_j} e_\chi\rangle_k$. Более того, $\Lambda_1 \cong k[1, a_i]$, а $\Lambda_2 \cong k[a_i, b_j]$. Поэтому $\Lambda \cong k[1, a_i] \otimes_k k[a_i, b_j]$, т.е. $\Lambda \sim k[a_i, b_j]$ в группе Брауэра $B(k)$. □

Мы в предложении 1 соответствующим образом обобщаем на случай $p > 2$ результат [7, теорема 2.4].

§3. Основной результат

3.1. Пусть F – абелева p-группа, A – циклическая p-группа порядка p^n с порождающим элементом a. Ясно, что полупрямое расширение не может быть ультраразрешимым в силу [4, гл. 1, §9, теорема 1.9]. Оказывается, что расширение (1) в этом случае ультраразрешимо тогда и только тогда, когда не является полупрямым. Это очевидно при $n = 1$ (см. [4, гл. 1, §6, следствие 5]), поэтому всюду далее считаем $n > 1$.

Выберем образующие группы F согласно лемме 3. В таком случае можно считать, что $a^{f_1} = a^{1+p^i}$ для некоторого $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ (при $i = n$ получается тривиальное действие); остальные образующие группы F (если $d(F) > 1$) тривиально действуют на a. Пусть k – p-локальное поле достаточно высокой степени над $\mathbb{Q}_p$ с условиями

$$\begin{cases} \varepsilon_{p^i} \in k,\ \varepsilon_{p^{i+1}} \notin k, & i < n, \\ \varepsilon_{p^{i-1}} \in k,\ \varepsilon_{p^i} \notin k, & i = n. \end{cases} \tag{9}$$

Сначала реализуем как группу Галуа расширения полей K_0/k группу F_0, определяемую как гомоморфный образ группы F посредством эпиморфизма θ из условий 1. Именно, положим при $d(F) > 1$ в качестве K_0 тензорное произведение над k поля $k_1 = k(\varepsilon_{p^{n-1}})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1})$ и полей вида $k_r = k(\sqrt[p]{m_r})$ для $r \in [2, d(F)] \cap \mathbb{N}$; при $d(F) = 1$ положим $K_0 = k_1$. Параметры m_r пока произвольны – лишь бы K_0 было полем с условием $\varepsilon_{p^n} \notin K_0$ (позднее мы конкретизируем выбор параметров $\{m_r\}_{r=1}^{d(F)}$). Определим действие образующих $\{f_r^0\}_{r=1}^{d(F)}$ группы F_0 на K_0

следующим образом: если $i < n$, то положим

$$\begin{aligned} &\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1}^{f_1^0} = \varepsilon_{p^{n-1}}^{p^{i-1}} \sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1},\ \varepsilon_{p^{n-1}}^{f_1^0} = \varepsilon_{p^{n-1}}^{1+p^i}, \\ &\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1}^{f_r^0} = \sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1}\,\forall\, r > 1,\ \sqrt[p]{m_r}^{f_s^0} = \varepsilon_p^{\delta_{rs}} \sqrt[p]{m_r}\,\forall\, r,\, s. \end{aligned} \tag{10}$$

Соотношения (10) корректно определяют на K_0 структуру k-алгебры Галуа с группой F_0, ибо[10]

$$\begin{aligned} \theta^{(f_1^0)^{p^{n-i}}} &= (\varepsilon_{p^{n-1}}^{p^{i-1}} \theta)^{(f_1^0)^{p^{n-i-1}}} = (\varepsilon_{p^{n-1}}^{(1+p^i)p^{i-1}+p^{i-1}} \theta)^{(f_1^0)^{p^{n-i}}-2} = \dots \\ &= \varepsilon_{p^{n-1}}^{p^{i-1}(1+(1+p^i)+\dots+(1+p^i)^{p^{n-i}-1})} \theta = \varepsilon_{p^{n-1}}^{p^{i-1}p^{n-i}} \theta = \theta, \end{aligned}$$

причем $\theta^{(f_1^0)^{p^{n-i-1}}} \neq \theta$ из-за того, что $\varepsilon_{p^{n-1}}^{p^{i-1}p^{n-i-1}} \neq 1$; более того, имеем

$$(\theta^p)^{f_1^0} = (\varepsilon_{p^{n-1}} m_1)^{f_1^0} = \varepsilon_{p^{n-1}}^{1+p^i} m_1 = (\varepsilon_{p^{n-1}}^{p^{i-1}} \theta)^p = (\theta^{f_1^0})^p.$$

Из леммы 1 вытекает теперь, что K_0/k – расширение Галуа с группой F_0.

Если же $i = n$, то положим

$$\begin{aligned} &\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1}^{f_1^0} = \varepsilon_p \sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1},\ \sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1}^{f_r^0} = \sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1}\,\forall\, r > 1; \\ &\sqrt[p]{m_r}^{f_s^0} = \varepsilon_p^{\delta_{rs}} \sqrt[p]{m_r}\,\forall\, r,\, s; \end{aligned} \tag{11}$$

ясно, что и в этом случае K_0/k – расширение Галуа с группой F_0.

Из (10) и (11) вытекает, что все элементы ядра $\ker\beta$ диаграммы (2) определяют (при отождествлении $F_0 = \mathrm{Gal}(K_0/k)$) брауэровские задачи погружения. Выясним, при каких значениях параметров $\{m_r\}_{r=1}^{d(F)}$ все они разрешимы.

Лемма 9. *Пусть $i < n$. Все элементы ядра $\ker\beta$ диаграммы (2) разрешимы тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие на символы Гильберта p-й степени*

$$(\varepsilon_{p^i},\, m_1) = 1, \quad (m_1,\, m_r) = 1\,\forall\, r > 1. \tag{12}$$

Доказательство. В силу леммы 5 достаточно выяснить условия разрешимости задач погружения $(K_0/k,\, X_r,\, \varphi)$ для всех $r \in [1,\, d(F)] \cap \mathbb{N}$, где группы X_r заданы копредставлениями (3), а $\varphi(d) = 1$, $\varphi(c_s) = f_s^0$ для всех s.

[10] Положим для краткости $\theta = \sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1}$.

Задача $(K_0/k,\, X_1,\, \varphi)$ допускает спуск[11] по подгруппе $\langle c_2, \ldots, c_{d(F)}\rangle$ к равносильной брауэровской задаче погружения расширения k_1/k в поле с группой $\langle c_1\rangle$. Условия разрешимости такой задачи есть $\varepsilon_{p^i} \in N_{k_1/k}(k_1^*)$, что в силу локальной теории полей классов равносильно тривиальности действия символа Артина $\theta_k(\varepsilon_{p^i})$ на поле k_1. Но символ $\theta_k(\varepsilon_{p^i})$ тривиально действует на $k(\varepsilon_{p^{n-1}})$ – ведь поле $k(\varepsilon_{p^{n-1}})$ погружается[12] в поле $k(\varepsilon_{p^{n-1+i}})$. Поэтому условия разрешимости задачи $(K_0/k,\, X_1,\, \varphi)$ таковы: $\theta_k(\varepsilon_{p^i})(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1}) = \sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1}$. Так как поле $k(\varepsilon_{p^n})$ погружается в поле $k(\varepsilon_{p^{n+i}})$, то (вновь в силу леммы 1) искомые условия разрешимости равносильны тривиальности действия символа $\theta_k(\varepsilon_{p^i})$ на $\sqrt[p]{m_1}$, что эквивалентно тривиальности символа Гильберта p-й степени $(\varepsilon_{p^i},\, m_1)$. В случае $d(F) = 1$ доказательство леммы на этом заканчивается.

Задача $(K_0/k,\, X_2,\, \varphi)$ допускает спуск[13] по подгруппе $\langle c_3, \ldots, c_{d(F)}\rangle$ к равносильной задаче $(k_1 \cdot k_2/k,\, Y_2,\, \gamma)$, где

$$Y_2 = \langle d,\, c_1,\, c_2 \mid d^{p^{n-1}} = 1,\, c_1^{p^{n-i}} = 1,\, c_2^p = d,$$
$$[c_1,\, c_2] = d^{-p^{i-1}},\, d^{c_1} = d^{1+p^i},\, d^{c_2} = d\rangle;$$

разумеется, $\gamma(c_1) = f_1^0$, $\gamma(c_2) = f_2^0$, а $\gamma(d) = 1$. Вычислим препятствие для брауэровской задачи $(k_1 \cdot k_2/k,\, Y_2,\, \gamma)$. Для этого достаточно выяснить условия распадения центрально-простой k-алгебры $\Lambda = (Y_2 \times k_1 \cdot k_2)e_\chi$, где e_χ – идемпотент групповой алгебры $k_1 \cdot k_2\langle d\rangle$, соответствующий такому элементу χ группы характеров $\mathrm{Hom}(\langle d\rangle,\, (k_1 \cdot k_2)^*)$, что $\chi(d) = \varepsilon_{p^{n-1}}$. Ясно, что e_χ – центральный идемпотент скрещенного произведения $Y_2 \times k_1 \cdot k_2$. При этом Λ – скрещенная алгебра, класс которой в $H^2(\langle f_1^0,\, f_2^0\rangle,\, (k_1 \cdot k_2)^*)$ равен $\chi(h)$, где $h \in H^2(\langle f_1^0,\, f_2^0\rangle,\, \langle d\rangle)$ – класс, определяющий Y_2. Пусть $\widetilde{Y}_2 = \langle d,\, c_1\rangle$, тогда определена полупрямая сопутствующая задача $(k_1 \cdot k_2/k_2,\, \widetilde{Y}_2,\, \gamma)$. Но тогда алгебра $k_2 \otimes_k \Lambda$ распадается как k_2-алгебра. В таком случае класс $\chi(h)$ получается подъемом некоторого вполне определенного[14] класса $\widehat{h} \in H^2(\langle f_2^0\rangle,\, k_2^*)$. Выясним, какую скрещенную алгебру определяет класс $\widehat{h}$. Для этого в алгебре Λ рассмотрим элемент $\widehat{c}_2 e_\chi = c_2(\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1})^{-1} e_\chi$. Ясно, что

[11] Который является излишним при $d(F) = 1$.

[12] Пользуемся леммой 1.

[13] Который является излишним при $d(F) = 2$.

[14] В силу теоремы Шпейзера группа $H^1(\langle f_1^0\rangle,\, (k_1 \cdot k_2)^*)$ тривиальна.

$(\widehat{c}_2 e_\chi)^p = m_1^{-1} e_\chi$, ибо $de_\chi = \chi(d)e_\chi = \varepsilon_{p^{n-1}} e_\chi$. Далее, вычислим коммутатор $[c_1 e_\chi, \widehat{c}_2 e_\chi]$. Имеем

$$\begin{aligned}[c_1 e_\chi, \widehat{c}_2 e_\chi] &= c_1^{-1} e_\chi \sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1} e_\chi c_1 e_\chi [c_1 e_\chi, c_2 e_\chi] (\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1})^{-1} e_\chi \\ &= \sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1} \varepsilon_{p^{n-1}}^{p^{i-1}} \varepsilon_{p^{n-1}}^{-p^{i-1}} (\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1})^{-1} e_\chi = e_\chi.\end{aligned}$$

Таким образом, в алгебре Λ имеются соотношения $(\widehat{c}_2 e_\chi)^p = m_1^{-1} e_\chi$ а также $[c_1 e_\chi, \widehat{c}_2 e_\chi] = e_\chi$. Но это означает, что класс $\widehat{h}$ определяет в $H^2(\langle f_2^0 \rangle, k_2^*)$ алгебру обобщенных кватернионов $k[m_1^{-1}, m_2]$ степени p. Условием распадения такой алгебры является тривиальность символа Гильберта p-й степени (m_1^{-1}, m_2), что равносильно тривиальности символа (m_1, m_2). Задачи $(K_0/k, X_r, \varphi)$ при $r > 2$ рассматриваются аналогично. □

Лемма 10. *Пусть $i = n$. Все элементы ядра $\ker \beta$ диаграммы (2) разрешимы тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие на символы Гильберта p-й степени:*

$$(\varepsilon_{p^{n-1}}, m_r) = 1 \, \forall r \geqslant 1. \tag{13}$$

Доказательство. В силу леммы 6 достаточно выяснить условия разрешимости задач погружения $(K_0/k, X_r, \varphi)$ для всех $r \in [1, d(F)] \cap \mathbb{N}$, где группы X_r заданы копредставлениями (4), а $\varphi(d) = 1$, $\varphi(c_s) = f_s^0$ для всех s. Задача $(K_0/k, X_1, \varphi)$ допускает спуск[15] по подгруппе $\langle c_2, \ldots, c_{d(F)} \rangle$ к равносильной брауэровской задаче погружения расширения k_1/k в поле с циклической группой порядка p^n. Условием разрешимости такой задачи является тривиальность символа Гильберта p-й степени $(\varepsilon_{p^{n-1}} m_1, \varepsilon_{p^{n-1}})$, что равносильно тривиальности символа $(\varepsilon_{p^{n-1}}, m_1)$. Задачи $(K_0/k, X_r, \varphi)$ для $r > 1$ рассматриваются аналогично. □

3.2. Пусть F – абелева p-группа с образующими $\{f_r\}_{r=1}^{d(F)}$, A – циклическая p-группа порядка p^n для $n \geqslant 2$ с порождающим элементом a. В силу леммы 3 образующие $f_1, \ldots, f_{d(F)}$ можно выбрать так, чтобы при $d(F) > 1$ элементы $f_2, \ldots, f_{d(F)}$ действовали на a тривиально, а f_1 действовал на a либо также тривиально, либо как возведение в степень $1 + p^i$ для некоторого $i \in [1, n-1] \cap \mathbb{N}$ – тем самым на A вводится структура F-модуля. Определим группу F_0 из условий (1) с образующими $\{f_r^0\}_{r=1}^{d(F)}$ и эпиморфизм $\theta\colon F \to F_0$, такой что $\theta(f_r) = f_r^0$

[15] Который является излишним при $d(F) = 1$.

для всех r. Эпиморфизм θ корректно определен в силу выбора F_0 (см. условия 1). При этом A является также и F_0-модулем, а F действует на A отступлением вдоль эпиморфизма θ.

Рассмотрим гомоморфизм когомологий

$$\varkappa\colon H^2(F,\, \langle a^{p^{n-1}}\rangle) \to H^2(F,\, A),$$

индуцированный вложением.

Предложение 2. *Пусть $a^{f_1} = a^{1+p^i}$ для некоторого $i \in [1,\, n-1] \cap \mathbb{N}$, тогда любой нетривиальный класс $h \in \operatorname{im} \varkappa$ определяет ультраразрешимое расширение.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент

$$h_0 \in H^2(F,\, \langle a^{p^{n-1}}\rangle),$$

такой, что $\varkappa(h_0) = h$. Класс h_0 определяет группу H_0 как расширение F с помощью $\langle a^{p^{n-1}}\rangle$. Пусть $z_r \in H_0$ – прообраз элемента f_r. Тогда между $\{z_r\}_{r=1}^{d(F)}$ имеются соотношения вида

$$z_r^{p^{l_r}} = d^{w_r}\, \forall\, r, \quad [z_s,\, z_t] = d^{w_{st}}\, \forall\, s < t, \tag{14}$$

где $d = a^{p^{n-1}}$, параметры w_r, w_{st} либо нули, либо взаимно просты с p; наконец[16], $l_1 \geqslant n - i$, а $l_r \geqslant 1$ для всех $r > 1$.

Шаг 1. Сначала рассмотрим случай, когда существует пара $(s,\, t)$, такая, что $(w_{st},\, p) = 1$, причем $1 < s < t$. Рассмотрим реализацию группы F_0 в виде группы Галуа расширения K_0/k из пункта 3.1: k – p-локальное поле с достаточно высокой степенью $(k : \mathbb{Q}_p)$, удовлетворяющее условиям (9), а $K_0 = k_1 \otimes_k \ldots \otimes_k k_{d(F)}$; автоморфизмы группы F_0 действуют на K_0 согласно (10). Выберем параметры $\{m_r\}_{r=1}^{d(F)}$, определяющие поле K_0 таким образом, чтобы для всех r расширение k_r/k погружалось бы в поле с циклической группой порядка p^{l_r}. Как отмечено в пункте 1.2, для этого необходима и достаточна разрешимость всех элементарных сопутствующих брауэровских задач, отвечающих $\mathrm{Gal}(k_r/k)$-операторным характерам ядра. Из условий (9) вытекает, что для любого r достаточно решить задачу погружения расширения k_r/k с ядром порядка p^i – все остальные элементарные сопутствующие брауэровские задачи сопутствуют рассматриваемой. Так как k_r/k – циклическое p-расширение, то искомым условием будет тривиальность действия символа Артина $\theta_k(\varepsilon_{p^i})$ на поле k_r. Для

[16]Вспомним, что группа F_0 из условий 1 – гомоморфный образ группы F.

$r > 1$ это равносильно тривиальности символа Гильберта p-й степени $(\varepsilon_{p^i},\, m_r)$, ибо при $r > 1$ имеем $k_r = k(\sqrt[p]{m_r})$. Для $r = 1$ это равносильно (см. доказательство леммы 9 для задачи $(K_0/k,\, X_1,\, \varphi)$) тривиальности действия $\theta_k(\varepsilon_{p^i})$ на элементе $\sqrt[p]{m_1}$, т.е. тривиальности символа Гильберта p-й степени $(\varepsilon_{p^i},\, m_1)$.

Итак, выберем в рассматриваемом случае параметры $\{m_r\}_{r=1}^{(d(F))}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_{p^i},\, m_r) = 1\, \forall\, r,\, \varepsilon_{p^n} \notin K_0; \\ &(m_s,\, m_t) = \varepsilon_p,\, (m_r,\, m_l) = 1\, \forall\, r < l:\ (r,\, l) \neq (s,\, t). \end{aligned} \tag{15}$$

Покажем, что выбор (15) возможен. Выберем в векторном пространстве k^*/k^{*p} размерности $d(k) = (k : \mathbb{Q}_p) + 2$ базис $\{\widehat{a}_r\}_{r=1}^{d(k)}$, такой, что $\widehat{a}_1 = \varepsilon_{p^i}$, а

$$\begin{aligned} (\widehat{a}_1,\, \widehat{a}_2) = (\widehat{a}_3,\, \widehat{a}_4) = \ldots = (\widehat{a}_{d(k)-1},\, \widehat{a}_{d(k)}) = \varepsilon_p, \\ (\widehat{a}_2,\, \widehat{a}_1) = (\widehat{a}_4,\, \widehat{a}_3) = \ldots = (\widehat{a}_{d(k)},\, \widehat{a}_{d(k)-1}) = \varepsilon_p^{-1}; \end{aligned}$$

при этом значения символа Гильберта p-й степени на остальных парах базисных элементов тривиальны. Пусть $a_r \in k^*$ – прообраз элемента $\widehat{a}_r$, причем $a_1 = \varepsilon_p$. Положим $m_s = a_3$, $m_t = a_4$, а для $j \notin \{s,\, t\}$ положим $m_j = a_{2j+3}$. При таком выборе все условия (15) будут выполнены: действительно, достаточно проверить условие $\varepsilon_{p^n} \notin K_0$. Если $\varepsilon_{p^n} \in K_0$, то в силу выбора поля k_1 непременно $\sqrt[p]{m_1} \in K_0$. Но тогда образы элементов $m_1, \ldots,\, m_{d(F)},\, \varepsilon_{p^i}$ в k^*/k^{*p} должны быть линейно зависимы над $\mathbb{F}_p$, что противоречит выбору элементов $a_1, \ldots,\, a_{d(k)}$.

Параметры $\{m_r\}_{r=1}^{d(F)}$ выбраны таким образом, что в рассматриваемом случае задача погружения $(K_0/k,\, F,\, \theta)$ имеет собственное решение K, причем по построению $\varepsilon_{p^n} \notin K$, ибо уже $\varepsilon_{p^n} \notin K_0$. Рассмотрим брауэровскую задачу погружения $(K/k,\, H_0,\, \varphi)$, где $\varphi(d) = 1$, а $\varphi(z_r) = f_r$ для всех r. По построению расширения K/k такая задача неразрешима – применяем предложение 1 с учетом условий (15). Условия (15) таковы, что все элементы ядра[17] $\ker\alpha$ диаграммы (2) определяют в силу леммы 9 и леммы 4 разрешимые брауэровские задачи. Наконец, образ класса $h_0 \in H^2(F,\, \langle d\rangle)$ в группе $H^2(F,\, \Phi(A))$ относительно гомоморфизма когомологий, индуцированного вложением, при котором $d \mapsto a^{p^{n-1}}$, определяет по построению расширения K/k

[17]После отождествления F с $\mathrm{Gal}(K/k)$.

брауэровскую задачу, которая является неразрешимой в силу леммы 2. Таким образом, все максимальные присоединенные задачи к задаче с классом $\varkappa(h_0) \in H^2(\mathrm{Gal}(K/k),\, A)$ неразрешимы; сама же такая задача разрешима: она не является брауэровской (потому что $\varepsilon_{p^n} \notin K$), а все элементарные сопутствующие брауэровские задачи полупрямые. Применим теперь [3, теорема 1], по которой рассматриваемая задача с классом $\varkappa(h_0)$ ультраразрешима. Но тогда из [8, теорема 1] вытекает ультраразрешимость расширения с классом $\varkappa(h_0)$.

Шаг 2. Рассмотрим случай, когда в (14) w_{st} нулевые для всех $1 < s < t$, но для некоторого $t > 1$ выполнено $(w_{1t},\, p) = 1$. В случае $l_t \geqslant i+1$ и $(w_t,\, p) = 1$ применимы рассуждения шага 3 (см. ниже). В случае $l_t \geqslant i+1$ и $w_t = 0$ поступим следующим образом. Класс $\varkappa(h_0)$ определяет группу G_0 с образующими $a,\, Z_1, \ldots,\, Z_{d(F)}$, соотношения на которые такие же, как и в (14) – надо только вместо d писать везде $a^{p^{n-1}}$ и учесть, что $a^{Z_1} = a^{1+p^i}$, а $a^{Z_r} = a$ для всех $r > 1$. Сделаем замену $\widehat{Z}_t = Z_t a^{w_{1t} p^{n-1-i}}$. Тогда $\widehat{Z}_t^{p^{l_t}} = 1$, ибо в рассматриваемом случае $l_t - i > 0$. Но легко видеть, что

$$[Z_1,\, \widehat{Z}_t] = Z_1^{-1} a^{-w_{1t} p^{n-1-i}} Z_t^{-1} Z_1 Z_t a^{w_{1t} p^{n-1-i}} = 1.$$

При такой замене класс $\varkappa(h_0)$ не меняется, а потому можно перейти к шагу 3, взяв вместо h_0 класс $\widehat{h}_0 \in H^2(F,\, \langle a^{p^{n-1}} \rangle)$, определяющий группу $\widehat{H}_0$ с образующими $d = a^{p^{n-1}}$, $\widehat{Z}_t$ и $\{Z_r \mid r \neq t\}$. При этом уже будет $w_{1t} = 0$.

Пусть теперь $l_t \leqslant i$. Выберем параметры $\{m_r\}_{r=1}^{d(F)}$ следующим образом:

$$\begin{gathered} (\varepsilon_{p^i},\, m_r) = 1 \,\forall\, r \neq t,\ \varepsilon_{p^n} \notin K_0; \\ (\varepsilon_{p^i},\, m_t) = \varepsilon_p,\ (m_r,\, m_l) = 1 \,\forall\, r < l. \end{gathered} \tag{16}$$

Покажем, что выбор (16) возможен. Положим $m_t = a_2$, $m_1 = a_3$, $m_r = a_{2r+3}$ для всех $1 < r \neq t$. Также как и в шаге 1 проверяется, что $\varepsilon_{p^n} \notin K_0$. Параметры $\{m_r\}_{r=1}^{d(F)}$ выбраны таким образом, что в рассматриваемом случае задача погружения $(K_0/k,\, F,\, \theta)$ имеет собственное решение K, причем по построению $\varepsilon_{p^n} \notin K$, ибо уже $\varepsilon_{p^n} \notin K_0$. Отметим, что расширение k_r/k погружается в поле K_r с циклической над k группой Галуа порядка p^{l_r} для всех $r \neq t$, так как $(\varepsilon_{p^i},\, m_r) = 1$ для всех $r \neq t$. Расширение k_t/k также погружается в поле K_t с циклической над k группой Галуа порядка p^{l_t}, ибо условия погружаемости в рассматриваемом случае имеют вид $(\varepsilon_{p^{l_t-1}},\, m_t) = 1$, а такое условие

выполняется для любого m_t в силу $l_t \leqslant i$. Вновь как и в шаге 1 получаем (используя лемму 9 и предложение 1) ультраразрешимость задачи с классом $\varkappa(h_0) \in H^2(\mathrm{Gal}(K/k),\, A)$, откуда следует ультраразрешимость расширения с классом $\varkappa(h_0)$ в силу [8, теорема 1].

Шаг 3. Наконец, рассмотрим случай, когда в (14) все w_{st} нулевые.

Пусть сначала для некоторого $t > 1$ в (14) $(w_t,\, p) = 1$. Изучим задачу погружения расширения k_t/k из шага 1 в поле с циклической группой порядка p^{l_t}.

В случае $l_t \geqslant i+1$ выберем параметры $\{m_r\}_{r=1}^{d(F)}$, определяющие расширение K_0/k, следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_{p^i},\, m_r) = 1\, \forall\, r,\, \varepsilon_{p^n} \notin K_0; \\ &(m_r,\, m_l) = 1\, \forall\, r < l. \end{aligned} \tag{17}$$

Выбор (17) возможен, если степень $(k : \mathbb{Q}_p)$ достаточно большая – достаточно положить[18] $m_r = a_{2r+1}$ для всех r. Как и в шаге 1 в таком случае для всех r расширение k_r/k погружается в некоторое поле K_r с циклической группой порядка p^{l_r}. Выберем в K_t подполе $\widetilde{k}_t$, отвечающее подгруппе порядка p^i; так как $l_t \geqslant i+1$, то $k_t \subseteq \widetilde{k}_t$. При этом $K_t = \widetilde{k}_t(\sqrt[p^i]{y})$ для некоторого $y \in \widetilde{k}_t^*$. Согласно [4, гл. 3, §1] для любого $x \in k^*$ расширение $\widetilde{k}_t(\sqrt[p^i]{yx})/k$ имеет циклическую группу Галуа порядка p^{l_t}. Более того, из равенства на символ Гильберта p-й степени $(\varepsilon_{p^i},\, m_t) = 1$ вытекает помимо прочего, что элемент y как и поле $\widetilde{k}_t$ могут быть выбраны со свойством $\theta_k(\varepsilon_p)(\sqrt[p^i]{y}) = \sqrt[p^i]{y}$ – действительно, условие $(\varepsilon_{p^i},\, m_t) = 1$ обеспечивает разрешимость задачи погружения расширения k_t/k с поле с циклической p-группой любого порядка (см. рассуждения шага 1). Выберем x так, чтобы $\theta_k(\varepsilon_p)(\sqrt[p^i]{yx}) \neq \sqrt[p^i]{yx}$ – это возможно, так как в силу условий (9) символ Гильберта p^i-й степени $(\varepsilon_p,\, x)$ нетривиален как функция от x. При таком выборе x положим $\widetilde{K}_t = \widetilde{k}_t(\sqrt[p^i]{yx})$ и рассмотрим в качестве K тензорное произведение над k поля $\widetilde{K}_t$ и полей K_r для всех $r \neq t$. Алгебра Галуа K в силу рассмотренного выбора параметров $\{m_r\}_{r=1}^{d(F)}$ является полем, решающим задачу погружения $(K_0/k,\, F,\, \theta)$, причем $\varepsilon_{p^n} \notin K$ – уже $\varepsilon_{p^n} \notin K_0$. В силу предложения 1 и специального выбора поля K задача

[18] Параметры $\{a_r\}_{r=1}^{d(k)}$ определены в шаге 1.

$(K/k,\, H_0,\, \varphi)$ из шага 1 неразрешима. Теперь можно применить рассуждения шага 1 для доказательства ультраразрешимости расширения с классом $\varkappa(h_0)$.

Пусть теперь $l_r < i+1$ для всех r, таких, что $(w_r, p) = 1$. Класс $\varkappa(h_0)$ определяет группу G_0 с образующими $a,\, Z_1, \ldots,\, Z_{d(F)}$, соотношения на которые такие же как и в (14) – надо только вместо d писать везде $a^{p^{n-1}}$ и учесть, что $a^{Z_1} = a^{1+p^i}$, а $a^{Z_r} = a$ для всех $r > 1$. Положим $\widehat{Z}_t = Z_t a^{-w_t p^{n-1-l_t}}$ – такая замена образующих корректна в силу $l_t \leqslant i \leqslant n-1$. При этом $\widehat{Z}_t^{p^{l_t}} = 1$, $[Z_r,\, \widehat{Z}_t] = [Z_r,\, Z_t]$ для всех $r > 1$, а $[Z_1,\, \widehat{Z}_t] = a^{w_t p^{n-1-l_t+i}}$. В самом деле, это очевидно для $r \neq 1$, а для $r = 1$ вытекает из соотношений[19]

$$\begin{aligned}[Z_1,\, \widehat{Z}_t] &= Z_1^{-1} a^{w_t p^{n-1-l_t}} Z_1 [Z_1,\, Z_t] a^{-w_t p^{n-1-l_t}} \\ &= a^{w_t p^{n-1-l_t+i}} [Z_1,\, Z_t] = a^{w_t p^{n-1-l_t+i}}.\end{aligned}$$

В случае $l_t = i$ имеем $[Z_1,\, \widehat{Z}_t] = a^{w_t p^{n-1}}$. При указанной замене образующих класс $\varkappa(h_0)$ не меняется, а потому можно перейти к шагу 2, взяв вместо h_0 класс $\widehat{h}_0 \in H^2(F,\, \langle a^{p^{n-1}} \rangle)$, определяющий группу $\widehat{H}_0$ с образующими $d = a^{p^{n-1}}$, $\widehat{Z}_t$ и $\{Z_r \mid r \neq t\}$.

В случае $l_t < i$ снова возьмем вместо h_0 класс $\widehat{h}_0 \in H^2(F,\, \langle a^{p^{n-1}} \rangle)$, определяющий группу $\widehat{H}_0$ с образующими $d = a^{p^{n-1}}$, $\widehat{Z}_t$ и $\{Z_r \mid r \neq t\}$ – при этом в (14) помимо $w_{rs} = 0$ для всех r, s уже будет и $w_t = 0$.

Итак, осталось рассмотреть случай, когда в (14) лишь $(w_1,\, p) = 1$, а остальные параметры нулевые. Без ограничения общности можно полагать $w_1 = 1$. Выберем параметры $\{m_r\}_{r=1}^{d(F)}$ следующим образом: положим[20] $m_r = a_{2r+1}$ для всех r. При этом выполняются условия (17) и условия (12). Для всех $r > 1$ расширение k_r/k погружается в некоторое поле K_r с циклической группой порядка p^{l_r} – ведь $(\varepsilon_{p^i},\, m_r) = 1$. Расширение k_1/k также погружается в некоторое поле K_1 с циклической группой порядка p^{l_1} – ведь $\theta_k(\varepsilon_{p^i})$ тривиально действует на поле $k(\varepsilon_{p^{n-1}})$ и элементе $\sqrt[p]{\varepsilon_{p^{n-1}} m_1}$ в силу равенства $(\varepsilon_{p^i},\, m_1) = 1$ (см. вывод условий разрешимости задачи $(K_0/k,\, X_1,\, \varphi)$ из леммы 9). В соотношениях (14) $l_1 \geqslant n - i$. Покажем, что в рассматриваемом случае будет $l_1 \geqslant n$.

[19] По предположению все w_{rs} нулевые.

[20] И вновь параметры $a_1, \ldots,\, a_{d(k)}$ уже выбраны в шаге 1.

В самом деле, в указанных допущениях[21] класс $\varkappa(h_0)$ получается подъемом класса $h \in H^2(\mathrm{Gal}(K_1/k), A)$, определяющего группу H с копредставлением

$$H = \langle a, b \mid a^{p^n} = 1, b^{p^{l_1}} = a^{p^{n-1}}, a^b = a^{1+p^i} \rangle. \tag{18}$$

Если $l_1 < n$, то в копредставлении (18) можно сделать замену $\widehat{b} = ba^{-p^{n-1-l_1}}$. Имеем

$$\begin{aligned}(ba^{-p^{n-1-l_1}})^{p^{l_1}} &= b^2 a^{-p^{n-1-l_1}(1+(1+p^i))}(ba^{-p^{n-1-l_1}})^{p^{l_1}-2}\\ &= \dots\\ &= b^{p^{l_1}} a^{-p^{n-1-l_1}(1+(1+p^i)+\dots+(1+p^i)^{p^{l_1}-1})}\\ &= a^{p^{n-1}-p^{n-1-l_1}(1+(1+p^i)+\dots+(1+p^i)^{p^{l_1}-1})}.\end{aligned}$$

Ясно, что

$$1 + (1+p^i) + \dots + (1+p^i)^{p^{l_1}-1} = \sum_{l=1}^{p^{l_1}} C^l_{p^{l_1}} p^{i(l-1)}. \tag{19}$$

Исследуем p-адические показатели слагаемых выражения (19). Ясно, что $\nu_p(C^l_{p^{l_1}}) = l_1 - \nu_p(l)$ для $l \in [1, p^{l_1}] \cap \mathbb{N}$, а потому $\nu_p(C^l_{p^{l_1}} p^{i(l-1)}) = l_1 + i(l-1) - \nu_p(l)$. Покажем, что $i(l-1) \geqslant \nu_p(l) + i$ при $l > 1$. Пусть $l = wp^r$, где $(w, p) = 1$, тогда $\nu_p(l) = r$, а $i(l-1) \geqslant i(p^r - 1)$. Мы вправе считать $r > 0$, так как иначе проверяемое неравенство очевидно. Таким образом, достаточно показать справедливость следующего неравенства (ведь $i \geqslant 1$, а $p > 2$)

$$3^r - 2 \geqslant r. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что неравенство (20) выполнено для всех натуральных $r \geqslant 1$, ибо функция $x \mapsto 3^x - x - 2$ монотонно возрастает при $x \geqslant 1$ и равна нулю при $x = 1$. Таким образом, значения p-адических показателей слагаемых суммы (19) не меньше $l_1 + i$ при $l > 1$; при $l = 1$ получаем значение показателя, равное l_1. Поэтому $\widehat{b}^{p^{l_1}} = 1$. Получаем противоречие с нерасщепляемостью класса $\varkappa(h_0)$.

Итак, в (14) $l_1 \geqslant n$, $w_1 = 1$, а все остальные параметры нулевые. Как уже отмечалось, циклическое расширение k_1/k степени p^{n-i} погружается в некоторое поле K_1 с циклической группой порядка p^{l_1}. Пусть

[21] В (14) лишь w_1 взаимно просто с p и без ограничения общности равно единице.

$\widetilde{k}_1$ – подполе в K_1, отвечающее подгруппе порядка p^i. Так как $l_1 \geqslant n$, то $k_1 \subseteq \widetilde{k}_1$. При этом $K_1 = \widetilde{k}_1(\sqrt[p^i]{y})$ для некоторого $y \in \widetilde{k}_1^*$. Согласно [4, гл. 3, §1] для любого $x \in k^*$ поле $\widetilde{k}_1(\sqrt[p^i]{yx})$ также будет решать задачу погружения расширения $\widetilde{k}_1/k$ в поле с циклической группой порядка p^{l_1}. Выберем x таким образом, чтобы $\theta_k(\varepsilon_p)(\sqrt[p^i]{yx}) \neq \sqrt[p^i]{yx}$ – это возможно, так как в силу (9) символ Гильберта p^i-й степени $(\varepsilon_p,\, x)$ нетривиален как функция от x, а $\theta_k(\varepsilon_p)$ тривиален на $\widetilde{k}_1$, откуда получаем $\theta_k(\varepsilon_p)(\sqrt[p^i]{y}) = \varepsilon_p^m \sqrt[p^i]{y}$ для некоторого m. Положим $\widetilde{K}_1 = \widetilde{k}_1(\sqrt[p^i]{yx})$ для такого x. Задача $(K_0/k,\, F,\, \theta)$ вновь оказывается разрешимой в собственном смысле: в качестве поля-решения K годится тензорное произведение над k поля $\widetilde{K}_1$ и полей K_r для $r > 1$ – ясно, что данные поля линейно разделены над k. При этом $\varepsilon_{p^n} \notin K$. По построению расширения K/k и в силу предложения 1 задача $(K/k,\, H_0,\, \varphi)$ неразрешима. Выполнение условий (12) и лемма 4 вновь, как и в шаге 1, дают возможность показать ультраразрешимость расширения с классом $\varkappa(h_0)$. □

Предложение 3. *Пусть $a^{f_1} = a$, тогда любой нетривиальный класс $h \in \operatorname{im} \varkappa$ определяет ультраразрешимое расширение.*

Доказательство. Рассуждения вполне аналогичны доказательству предложения 2, только вместо условий (12), нужно использовать условия (13), чтобы построить расширение Галуа K/k с группой F таким образом, что задача погружения $(K/k,\, H_0,\, \varphi)$ неразрешима, $\varepsilon_{p^n} \notin K$, а все элементы ядра гомоморфизма α диаграммы (2) задают разрешимые брауэровские задачи. □

3.3. Докажем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть* (1) *– неполупрямое p-расширение с циклическим ядром A и абелевой факторгруппой F, тогда* (1) *ультраразрешимо.*

Доказательство. Пусть $|A| = p^n$. Если $n = 1$, то из условий теоремы вытекает, что $A \leqslant \Phi(G)$, а потому расширение (1) ультраразрешимо из-за [4, гл. 1, §6 следствие 5]. Пусть $n > 1$. В таком случае существует такое $m \in [1,\, n-1] \cap \mathbb{N}$, что класс $h \in H^2(F,\, A)$ расширения (1) является образом некоторого класса $h_0 \in H^2(F,\, \langle a^{p^m} \rangle)$ при гомоморфизме когомологий, индуцированном вложением, но не является образом никакого класса из $H^2(F,\, \langle a^{p^{m+1}} \rangle)$. Профакторизовав расширение (1) по подгруппе $\langle a^{p^{m+1}} \rangle$, мы получим расширение

с циклическим ядром порядка p^{m+1}. К такому расширению применима конструкция предложений 2 и 3, согласно которой существует расширение Галуа p-локальных полей K/k с группой F, такое, что задача[22] $(K/k,\, G/\langle a^{p^{m+1}}\rangle,\, \varphi_1)$ ультраразрешима, но $\varepsilon_{p^{m+1}} \notin K$. Задача $(K/k,\, G,\, \varphi)$ будет разрешимой, так как не является брауэровской, а все элементарные сопутствующие брауэровские задачи, отвечающие F-операторным характерам ядра, сопутствуют разрешимой задаче $(K/k,\, G/\langle a^{p^{m+1}}\rangle,\, \varphi_1)$. Всякое решение L задачи $(K/k,\, G,\, \varphi)$ является и решением задачи $(L^{\langle a^{p^{m+1}}\rangle}/k,\, G,\, \varphi_0)$, где φ_0 – естественный эпиморфизм со свойством $\varphi = \varphi_1\varphi_0$. Но так как задача $(K/k,\, G/\langle a^{p^{m+1}}\rangle,\, \varphi_1)$ ультраразрешима, а $L^{\langle a^{p^{m+1}}\rangle}$ – ее решение, то $L^{\langle a^{p^{m+1}}\rangle}$ является полем. Поскольку $\ker\varphi_0 \leqslant \Phi(G)$, то и L – тоже поле. Итак, задача $(K/k,\, G,\, \varphi)$ ультраразрешима. Остается воспользоваться [8, теорема 1]. $\square$

3.4. Из теоремы 1 можно извлечь некоторое следствие. Для его формулировки понадобятся дополнительные определения.

Пусть $p \geqslant 2$ – некоторый простой делитель порядка группы A. Тогда можно профакторизовать расширение (1) по p'-подгруппе $A_{p'}$ группы A, т.е. рассмотреть расширение

$$1 \longrightarrow A/A_{p'} \longrightarrow G/A_{p'} \xrightarrow{\varphi_{p'}} F \longrightarrow 1, \tag{21}$$

где $\varphi_{p'}$ – эпиморфизм, индуцированный φ. Если в (21) $p \mid |F|$, то рассмотрим некоторую силовскую p-подгруппу F_p группы F и обозначим через G_p ее полный прообраз в $G/A_{p'}$ относительно $\varphi_{p'}$. Если же в (21) $p \nmid |F|$, то полагаем $F_p = F$, $G_p = G/A_{p'}$. Полученное расширение

$$1 \longrightarrow A/A_{p'} \longrightarrow G_p \xrightarrow{\varphi_{p'}} F_p \longrightarrow 1$$

мы будем называть *p-силовским подрасширением* к (1).

Следствие 1. *Пусть расширение* (1), *где A – циклическая группа нечетного порядка, а F – абелева группа нечетного порядка, ультраразрешимо. Тогда все силовские подрасширения к* (1) *ультраразрешимы*[23].

Доказательство. Пусть расширение (1) ультраразрешимо, т.е. существует расширение Галуа числовых полей K/k, такое, что задача

[22] φ_1 – эпиморфизм, индуцированный φ.

[23] В силу теоремы 1 это равносильно их нерасщепляемости.

погружения $(K/k,\, G,\, \varphi)$, соответствующая расширению (1), ультраразрешима. Хорошо известно, что задача $(K/k,\, G,\, \varphi)$ представима в виде прямого произведения задач $(K/k,\, G^{(p)},\, \varphi_p)$, где $G^{(p)} = G/A_{p'}$, а $\varphi_p\colon G^{(p)} \to \mathrm{Gal}(K/k)$ – эпиморфизм, индуцированный φ; ядром эпиморфизма φ_p является силовская p-подгруппа A_p группы $A = \ker\varphi$. Любое решение L задачи $(K/k,\, G,\, \varphi)$ получается в виде тензорного произведения над K решений задач $(K/k,\, G^{(p)},\, \varphi_p)$. Поскольку решения любой такой задачи линейно разделены с композитом остальных, то $(K/k,\, G,\, \varphi)$ ультраразрешима тогда и только тогда, когда $(K/k,\, G^{(p)},\, \varphi_p)$ ультраразрешима для всех $p \mid |A|$. В частности, если $(K/k,\, G,\, \varphi)$ ультраразрешима, то для всех $p \mid |A|$ задача $(K/k,\, G^{(p)}, \varphi_p)$ неполупрямая. Но в таком случае и все силовские подрасширения к (1) неполупрямые, что вытекает из теоремы Гашюца–Фаддеева (см. [9, гл. IV, §6, следствие 4]). Но тогда любое силовское подрасширение ультраразрешимо в силу теоремы 1. $\square$

Замечание 1. На самом деле утверждение следствия 1 обратимо, но найденное автором доказательство слишком громоздко и потому не приводится в данной работе.

Литература

1. В. В. Ишханов, *О полупрямой задаче погружения с нильпотентным ядром.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **40**, No. 1 (1976), 3–25.
2. А. В. Яковлев, *Задача погружения полей.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **28**, No. 3 (1964), 645–660.
3. Д. Д. Киселев, Б. Б. Лурье, *Ультраразрешимость и сингулярность в проблеме погружения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **414** (2013), 113–126.
4. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*, Наука, М., 1990.
5. Д. Д. Киселев, *Примеры задач погружения, у которых решения только поля.* — УМН **68**, No. 4 (2013), 181–182.
6. М. Холл, *Теория групп*, Изд. иностр. лит., М., 1962.
7. A. Ledet, *On 2-groups as Galois groups.* — Can. J. Math. **47**, No. 6 (1995), 1253–1273.
8. А. В. Яковлев, *Об ультраразрешимых задачах погружения для числовых полей.* — Алгебра и анализ **27**, No. 6 (2015), 260–263.
9. Дж. Касселс, А. Фрелих (ред.), *Алгебраическая теория чисел*, Мир., М., 1969.

Kiselev D. D. On ultrasolvability of p-extensions of an abelian group by a cyclic kernel.

We solve a problem in the embedding theory by A. V. Yakovlev for p-extensions of odd order with cyclic normal subgroup and abelian quotient-group: for such nonsplit extensions there exists a realization for the quotient-group as Galois group over number fields such as corresponding embedding problem is ultrasolvable (i.e. this embedding problem is solvable and has only fields as solutions). Also we give a solution for embedding problems of p-extensions of odd order with kernel of order p and with a quotient-group which is represented by direct product of its proper subgroups – this is a generalization for $p > 2$ an analogous result for $p = 2$ by A. Ledet.

Всероссийская академия
внешней торговли
минэкономразвития РФ,
Пудовкина 4а, 119285, Москва,
Россия
E-mail: denmexmath@yandex.ru

Поступило 04 июля 2016 г.